الرياضيات البحتة

القسم العلمي
الفصل الدراسي الأول

الجزء الخاص بالشرح و التمارين

يشمل مسائل جديدة تقيس مستويات عليا من التفكير

تقنية جديدة
امتحانات إلكترونية باستخدام تقنية QR

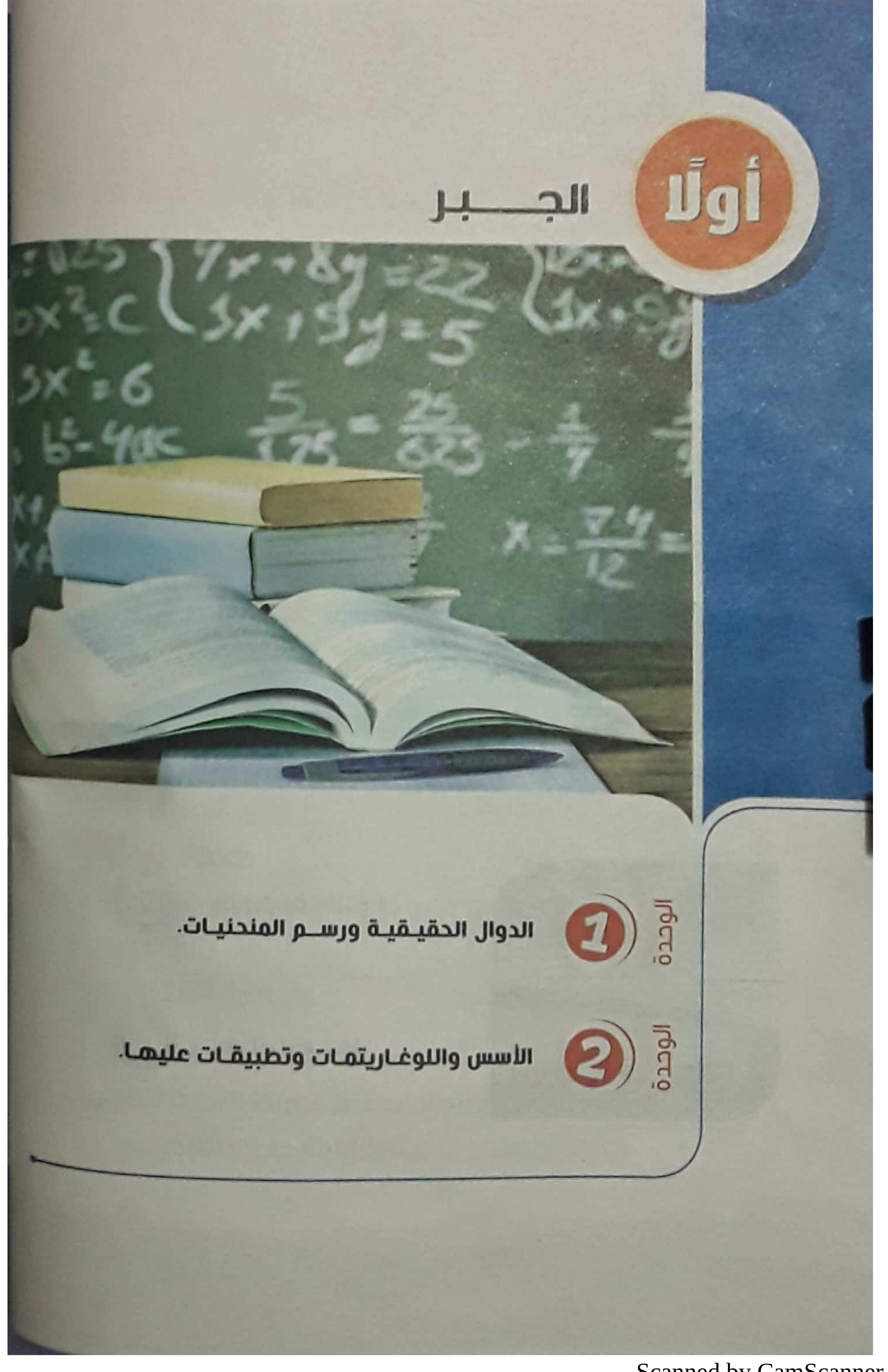
2
ثانوي
2020



إعداد نخبة من خبراء التعليم

محتويات الكتاب




أولًا
الجبر
الوحدة 1
الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات.
الوحدة 2
الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها.



الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

- متطلبات قبلية على الوحدة الأولى.

الدرس 1 الدوال الحقيقية (تحديد المجال والمدى - بحث الاطراد).

الدرس 2 العمليات على الدوال - تركيب دالتين.

الدرس 3 بعض خواص الدوال (الدوال الزوجية والفردية - الدوال الأحادية).

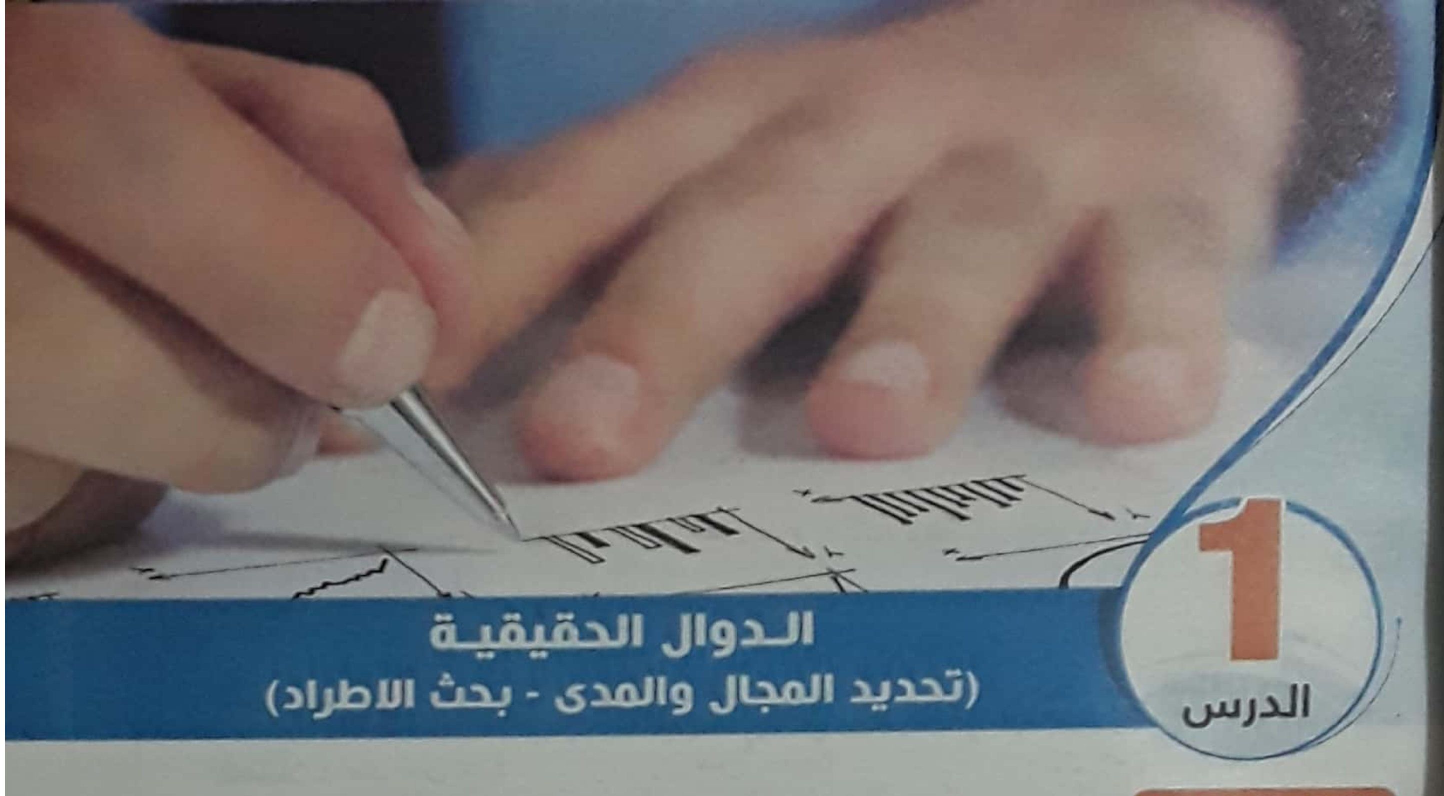
الدرس 4 التمثيل البيانى للدوال الأساسية ورسم الدالة مجزأة المجال.

الدرس 5 التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال الأساسية.

الدرس 6 حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة.

في نهاية الوحدة

- **تطبيقات حياتية على دروس الوحدة.**



الدرس 1

الـدوال الحقيقيـة
(تحديد المجال والمدى - بحث الاطراد)

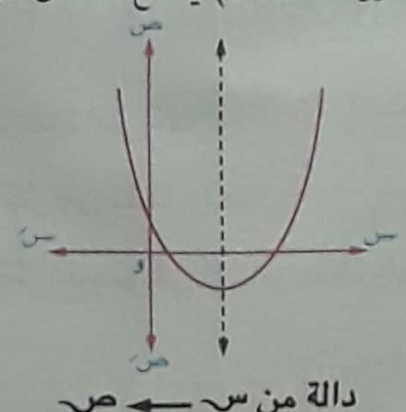
الدالة الحقيقية

الدالة د : س ← ص تسمى دالة حقيقية إذا كان كل من المجال (س) والمجال المقابل (ص) هو مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية فعلية منها.

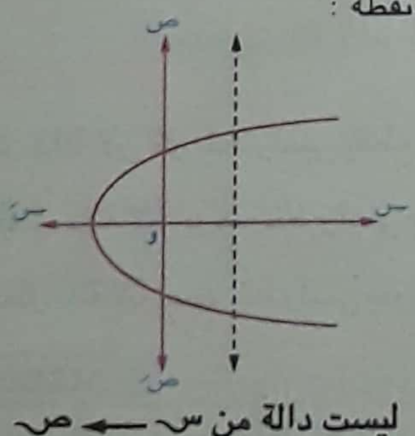
• تحديد كون العلاقة من س ← ص دالة أم لا :

١ جبريًا : العلاقة تكون دالة إذا كان كل قيمة للمتغير س ∈ س يناظرها قيمة واحدة فقط للمتغير ص ∈ ص

٢ بيانيًا (اختبار الخط الرأسى) : العلاقة لا تمثل دالة إذا وجد خط مستقيم رأسى (يوازى محور الصادات) يقطع الشكل البيانى فى أكثر من نقطة :



دالة من س ← ص



ليست دالة من س ← ص

مثال ١

بين أيًا من العلاقتين الآتيتين دالة وأيهما ليست دالة على ح مع ذكر السبب :

١ ص = $س^{٢}$ + ٣

٢ $ص^{٢}$ = $س^{٢}$ + ٩



الحـــل

١ العلاقة ص = س^{٢} + ٣ دالة

لأن كل قيمة حقيقية للمتغير س يناظرها قيمة وحيدة فقط للمتغير ص

فمثلًا : عند س = ٣ ∴ ص = ١٢

، وعند س = −٢ ∴ ص = ٧ ، .... وهكذا

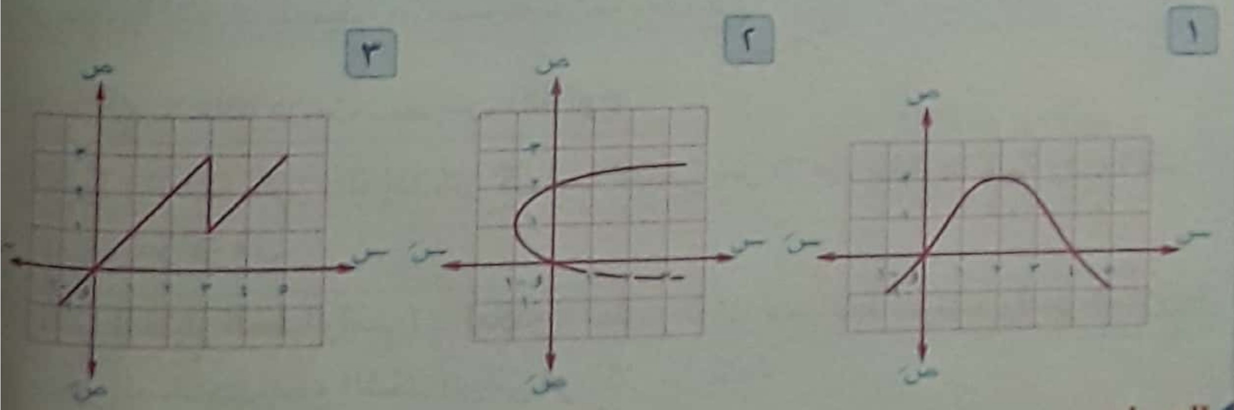
٢ العلاقة ص^{٢} = س^{٢} + ٩ ليست دالة

لأنه توجد على الأقل قيمة حقيقية للمتغير س يناظرها قيمتان مختلفتان للمتغير ص

فمثلًا : عند س = ٤ ∴ ص^{٢} = ٢٥ ∴ ص = ± ٥

مثال ٢

بين أيًا من الأشكال البيانية الآتية يمثل دالة من س ⟵ ص وأيها لا يمثل دالة مع ذكر السبب :



الحـــل

١ يمثل دالة لأن كل خط رأسى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة على الأكثر.

٢ لا يمثل دالة لأنه يوجد خط رأسى يقطع المنحنى فى أكثر من نقطة واحدة.

٣ لا يمثل دالة لأنه يوجد خط رأسى يمر بالنقطة (٣ ، ٠) ويقطع المنحنى فى أكثر من نقطة واحدة

ملاحظتان

١ العلاقة ص = ٤ (تمثل بخط مستقيم أفقى يوازى محور السينات) تعبر عن دالة من س إلى ص لأن كل عنصر من س يرتبط بعنصر واحد فقط من ص

٢ العلاقة س = ٤ (تمثل بخط مستقيم رأسى يوازى محور الصادات) لا تعبر عن دالة من س إلى ص لأن العنصر س = ٤ ارتبط بعدد لانهائى من عناصر ص

تحديد مجال الدوال الحقيقية

يتعين مجال الدالة من قاعدتها أو من الشكل البيانى لها.

أولاً تعيين مجال الدالة إذا علمت قاعدتها

١ الدالة كثيرة الحدود

د : د (س) = $أ_٠$ + $أ_١$ س + $أ_٢$ $س^٢$ + ... + $أ_ن$ $س^ن$ حيث : $أ_٠$ ، $أ_١$ ، $أ_٢$ ، .... ، $أ_ن$

ثوابت حقيقية ، $أ_ن$ ∈ ح − {٠} كثيرة حدود من الدرجة ن

فإن مجال الدالة كثيرة الحدود يساوى ح ما لم تكن معرفة على مجموعة جزئية منها.

فمثلاً : د : د (س) = ٣ كثيرة حدود ثابتة مجالها = ح

، د : د (س) = ٢ س + ١ ، س ≤ ١

كثيرة حدود من الدرجة الأولى مجالها =]− ∞ ، ١]

، د : د (س) = $س^٢$ − ٤ س + ٣ كثيرة حدود من الدرجة الثانية مجالها = ح

٢ الدالة الكسرية

إذا كانت د دالة كسرية حيث د (س) = $\frac{هـ (س)}{ن (س)}$ ، هـ ، ن كثيرتى حدود

فإن : مجال الدالة د هو ح − مجموعة أصفار المقام.

مثال ٣

عين مجال كل من الدوال الكسرية المعرفة بالقواعد الآتية :

١ د (س) = $\frac{١}{س}$

٢ د (س) = $\frac{٣}{س - ٢}$

٣ د (س) = $\frac{س - ١}{٢ س^٢ + ٥ س}$

٤ د (س) = $\frac{س - ٣}{س^٢ - ٥ س + ٦}$

٥ د (س) = $\frac{س + ١}{س^٢ - ٤ س + ٤}$

٦ د (س) = $\frac{س}{س^٢ + ٢٥}$

الحـــل

١ المجال = ح − {٠}

٢ المجال = ح − {٢}

٣ بوضع ٢ $س^{٢}$ + ٥ س = ٠

∴ س (٢ س + ٥) = ٠

∴ س = ٠ أ، س = $\frac{-٥}{٢}$

∴ المجال = ح − {٠ ، $\frac{-٥}{٢}$}

٤ بوضع $س^{٢}$ − ٥ س + ٦ = ٠

∴ (س − ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = ٣

∴ المجال = ح − {٢ ، ٣}

٥ بوضع $س^{٢}$ − ٤ س + ٤ = ٠

∴ $(س − ٢)^{٢}$ = ٠

∴ س = ٢

∴ المجال = ح − {٢}

٦ بوضع $س^{٢}$ + ٢٥ = ٠ وهذه المعادلة ليس لها حل فى ح أى لا يوجد أصفار حقيقية للمقام

∴ المجال = ح

٣ دالة الجذر النونى

إذا كانت د (س) = $\sqrt[ن]{هـ (س)}$ حيث ن ∈ $ص^{+}$ ، ن > ١ ، هـ (س) كثيرة حدود

أولاً : عندما ن عدد فردى فإن مجال الدالة د هو ح

ثانيًا : عندما ن عدد زوجى فإن مجال الدالة د هو مجموعة قيم س التى تحقق هـ (س) ≥

حيث ن تسمى دليل الجذر.

مثال ٤

عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

١ د (س) = $\sqrt{س + ٢}$

٢ د (س) = $\sqrt[٣]{س^{٢} + ٥}$

٣ د (س) = $\sqrt{-٢ - ٢ س + ٣}$

٤ د (س) = $\sqrt[٣]{٩ - س^{٢}}$

٥ د (س) = $\sqrt{٤ س^{٢} - ١٢ س + ٩}$

٦ د (س) = $\sqrt{س^{٢} - ٤}$

٧ د (س) = $\frac{١}{\sqrt{٤ + ٣ س - س^{٢}}}$

الحـــل

١ ∵ دليل الجذر عدد زوجي

∴ س ≥ -٢

∴ الدالة معرفة بشرط س + ٢ ≥ ٠

∴ المجال = [-٢ ، ∞[

٢ ∵ دليل الجذر عدد زوجي

∴ الدالة معرفة بشرط س^{٢} + ٥ ≥ ٠ وهو متحقق لكل قيم س الحقيقية

∴ المجال = ح

٣ ∵ دليل الجذر عدد زوجي

∴ -٢ س + ٣ ≥ ٠

∴ س ≤ $\frac{٣}{٢}$

∴ المجال =]-∞ ، $\frac{٣}{٢}$]

٤ ∵ دليل الجذر عدد فردي

∴ المجال = ح

٥ ∵ دليل الجذر عدد زوجي.

∴ الدالة معرفة بشرط أن : ٤ س^{٢} - ١٢ س + ٩ ≥ ٠

∴ (٢ س - ٣)^{٢} ≥ ٠

، ∵ مجموعة حل المتباينة = ح

∴ مجال الدالة د = ح

٦ ∵ دليل الجذر عدد زوجي.

∴ الدالة معرفة بشرط أن : س^{٢} - ٤ ≥ ٠

∴ (س - ٢) (س + ٢) ≥ ٠

، ∵ مجموعة حل المتباينة = ح -]-٢ ، ٢[

∴ مجال الدالة د = ح -]-٢ ، ٢[

٧ ∵ الدالة تكون معرفة بشرط أن :

٤ + ٣ س - س^{٢} > ٠

∴ س^{٢} - ٣ س - ٤ < ٠

∴ (س - ٤) (س + ١) < ٠

، ∵ مجموعة حل المتباينة =]-١ ، ٤[

∴ مجال الدالة د =]-١ ، ٤[

تذكر أن

(حل متباينات الدرجة الثانية فى متغير واحد)

إذا كان : ل ، م حيث ل > م هما جذران حقيقيان للمعادلة :

أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ ، أ > ٠

فإن مجموعة الحل فى ح للمتباينة :

١ أ س^{٢} + ب س + جـ ≥ ٠

هى ح -]ل ، م[

٢ أ س^{٢} + ب س + جـ > ٠

هى ح - [ل ، م]

٣ أ س^{٢} + ب س + جـ ≤ ٠

هى [ل ، م]

٤ أ س^{٢} + ب س + جـ < ٠

هى]ل ، م[



٤ الدالة مجزأة المجال «ذات المقاطع»

هى دالة معرفة بقواعد مختلفة فى فترات مختلفة من مجالها ومجال هذه الدالة يساوى اتحاد الفترات المعرفة فيها قواعدها.

مثال ٥

عين مجال كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين :

١ $د(س) = \begin{cases} ٢ - س & ، س < ٠ \\ س - ٢ & ، س > ٠ \end{cases}$

٢ $د(س) = \begin{cases} س^٢ & ، -٢ \leq س < ٠ \\ س & ، ٠ \leq س \leq ١ \\ \frac{١}{س} & ، س > ١ \end{cases}$

الحل

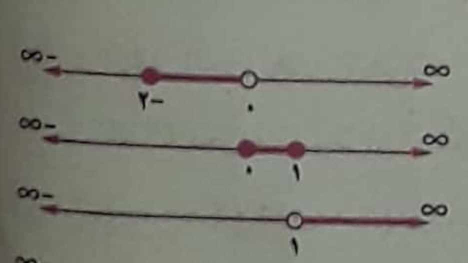
١ الدالة د معرفة على فترتين كما يلى :

معرفة عندما $س \in]-\infty ، ٠[$

، معرفة عندما $س \in]٠ ، \infty[$

$\therefore$ مجال د $=]-\infty ، ٠[\cup]٠ ، \infty[= ح - \{٠\}$

٢ الدالة د معرفة على ثلاث فترات كما يلى :



معرفة عندما $س \in [-٢ ، ٠[$

، معرفة عندما $س \in [٠ ، ١]$

، معرفة عندما $س \in]١ ، \infty[$

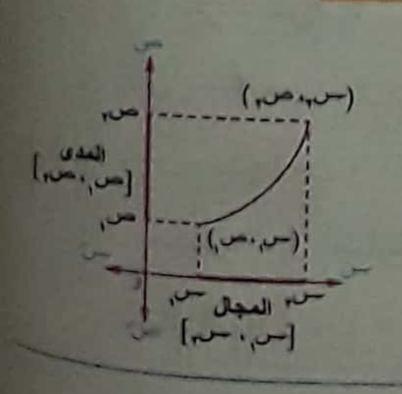
$\therefore$ مجال د $= [-٢ ، ٠[\cup [٠ ، ١] \cup]١ ، \infty[= [-٢ ، \infty[$

ثانيًا تعيين مجال ومدى الدالة من الشكل البيانى لها

من الشكل البيانى للدالة يمكن استنتاج مجال ومدى الدالة فيكون :

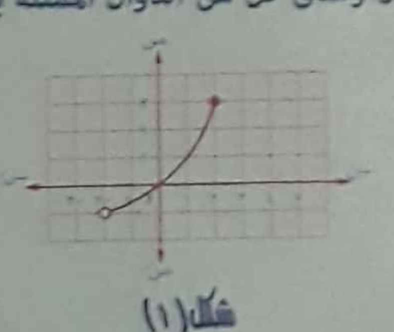
١ مجال الدالة هو مجموعة الإحداثيات السينية لجميع النقط التى تنتمى إلى منحنى الدالة.

٢ مدى الدالة هو مجموعة الإحداثيات الصادية لجميع النقط التى تنتمى إلى منحنى الدالة.

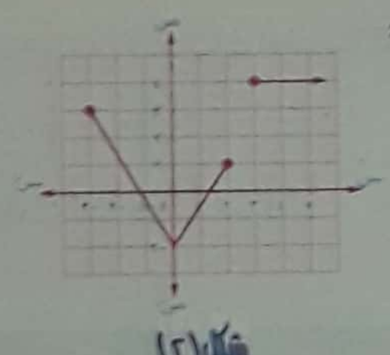


مثال ٦

عيّن مجال ومدى كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية :



شكل(١)



شكل(٢)

الحـــل

في شكل(١) :

* الإحداثيات السينية لجميع نقط منحنى الدالة

هى الفترة]–٢ ، ٢]

∴ المجال =]–٢ ، ٢]

* الإحداثيات الصادية لجميع نقط منحنى الدالة

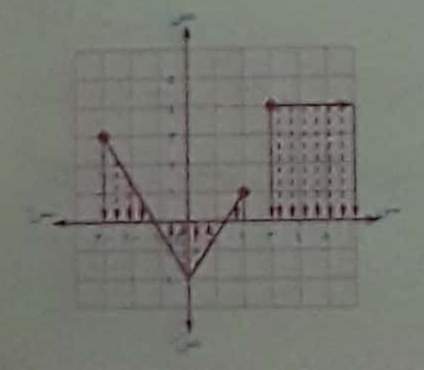
هى الفترة]–١ ، ٣]

∴ المدى =]–١ ، ٣]

لاحظ أن :

* الدائرة المفرغة عند النقطة (–٢ ، –١) توضح أن النقطة ∌ بيان الدالة وبالتالي –٢ ∌ مجال الدالة ، –١ ∌ مدى الدالة
* الدائرة المغلقة عند النقطة (٢ ، ٣) توضح أن النقطة ∈ بيان الدالة وبالتالي ٢ ∈ مجال الدالة ، ٣ ∈ مدى الدالة

في شكل(٢) :

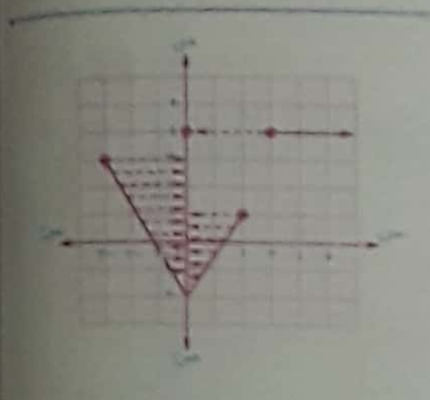


* الإحداثيات السينية لجميع نقط منحنى الدالة

هى الفترتين [–٣ ، ٢] ، [٣ ، ∞[

∴ المجال = [–٣ ، ٢] ∪ [٣ ، ∞[





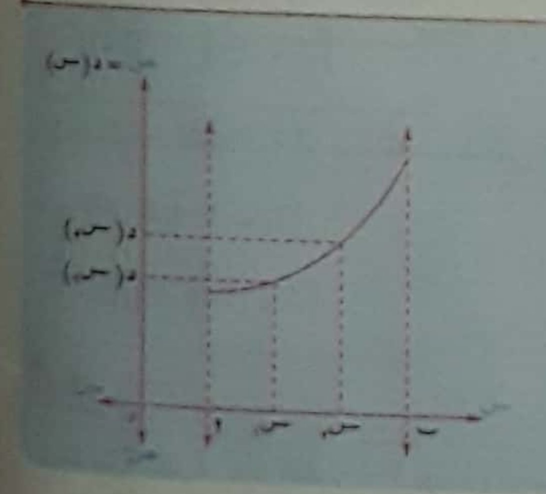
* ∵ الإحداثيات الصادية لجميع نقط الشعاع الأفقى هى ص = ٤ ، الإحداثيات الصادية لجزء المنحنى الآخر هى الفترة [-٢ ، ٣]

∴ المدى = [-٢ ، ٣] ∪ {٤}

تعيين اطراد الدالة من الشكل البيانى لها

* يقصد ببحث اطراد دالة ما تحديد الفترات التى تكون فيها الدالة تزايدية والفترات التى تكون فيها الدالة تناقصية والفترات التى تكون فيها الدالة ثابتة.

تعريف ① تزايد الدالة



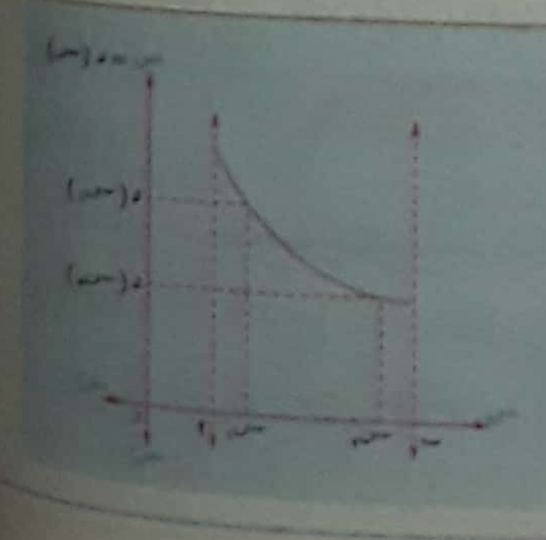
يقال للدالة د إنها تزايدية فى الفترة]أ ، ب[

إذا كان :

$س_٢ > س_١ \Leftarrow د(س_٢) > د(س_١)$

لكل $س_١$ ، $س_٢$ ∈]أ ، ب[

تعريف ② تناقص الدالة



يقال للدالة د إنها تناقصية فى الفترة]أ ، ب[

إذا كان :

$س_٢ > س_١ \Leftarrow د(س_٢) < د(س_١)$

لكل $س_١$ ، $س_٢$ ∈]أ ، ب[

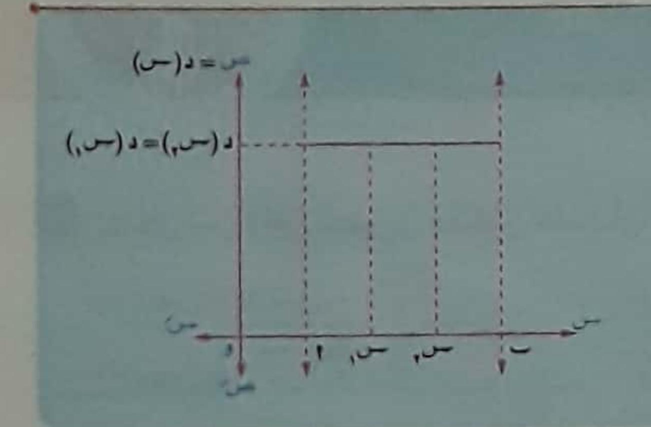
تعريف ③ ثبوت الدالة

يقال للدالة د إنها ثابتة فى الفترة]أ ، ب[

إذا كان :

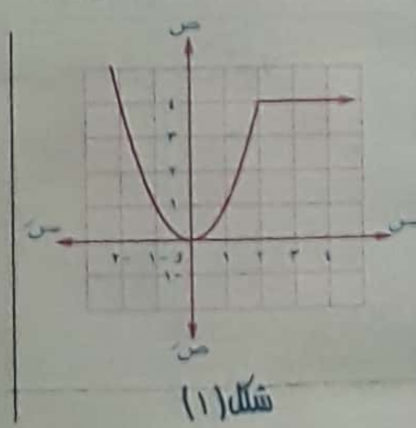
$س_{٢} > س_{١} \Rightarrow د(س_{٢}) = د(س_{١})$

لكل $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ∈]أ ، ب[

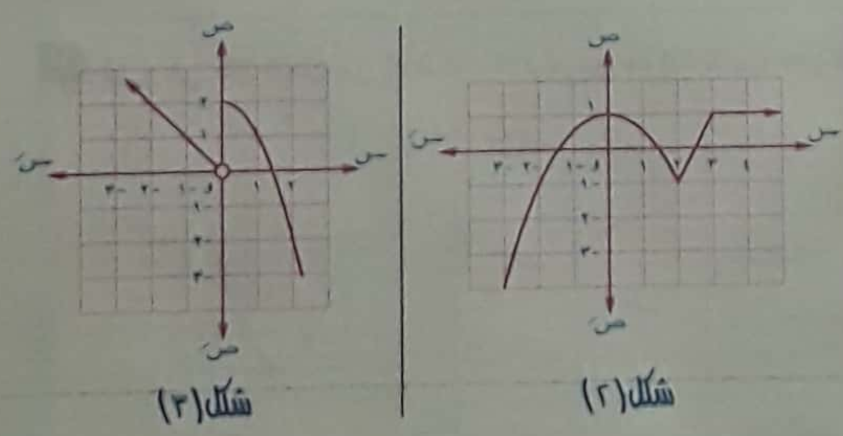


مثال ٧

ابحث اطراد كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية :



شكل(١)



شكل(٢)

شكل(٣)

الحـــل

شكل(١) : الدالة تناقصية فى الفترة]− ∞ ، ٠[، تزايدية فى الفترة]٠ ، ٢[

، ثابتة فى الفترة]٢ ، ∞[

شكل(٢) : الدالة تزايدية فى الفترة]− ∞ ، ٠[، تناقصية فى الفترة]٠ ، ٢[

، تزايدية فى الفترة]٢ ، ٣[، ثابتة فى الفترة]٣ ، ∞[

شكل(٣) : الدالة تناقصية فى كل من الفترتين]− ∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[





تمارين 1

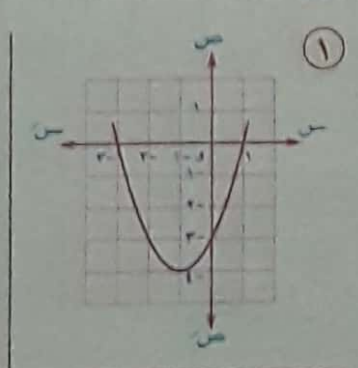
على الدوال الحقيقية
(تحديد المجال والمدى - بحث الاطراد)

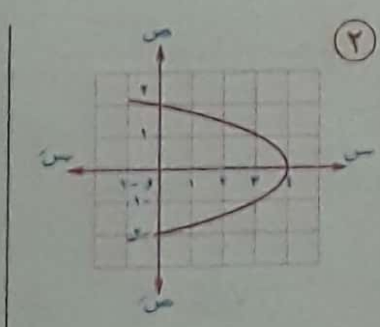
من أسئلة الكتاب المدرسي

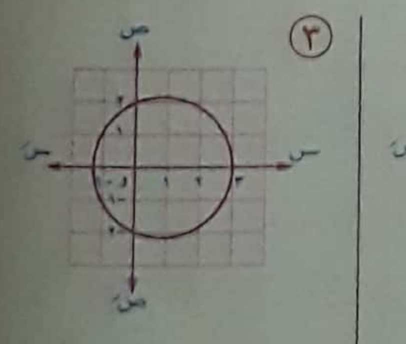
١ إذا كان س ، ص متغيرين حقيقيين فحدد أي علاقة مما يأتي تمثل قاعدة دالة في س وأيها لا :

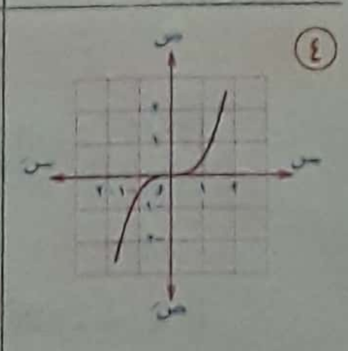
(١) ص = ٢ س + ٥
(٢) $ص^٢$ = س + ٤
(٣) ص = $\sqrt{س^٢ + ٤}$
(٤) $(س - ص)^٢ = ٥$
(٥) $ص^٣ - س^٢ = ٢$
(٦) $ص^٤ = س^٢ - ٤ س + ٤$
(٧) ص = ٢
(٨) س = ٣
(٩) ص = ٢ جا س + جتا ٢ س
(١٠) س ص + ص = ٢ س + ٢

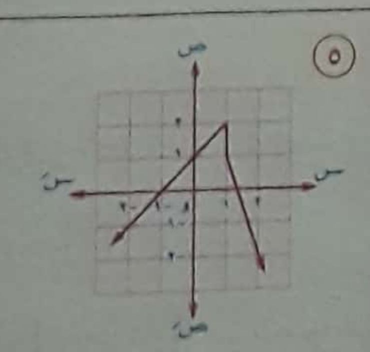
٢ في كل شكل من الأشكال الآتية بين ما إذا كانت ص تمثل دالة في س أم لا :

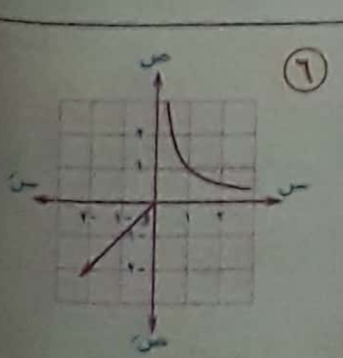
(١)


(٢)


(٣)


(٤)


(٥)


(٦)


٣ عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

(١) د (س) = $\frac{٢ س + ١}{س - ٢}$

(٢) د (س) = $\frac{س + ٣}{س^٢ - ٩}$

③ $د(س) = \frac{٢س + ٣}{س^{٢} - ٣س + ٢}$

④ $د(س) = \frac{س^{٢} + ١}{س^{٢} + ٤س}$

⑤ $د(س) = \frac{س^{٢} - ١}{٣س^{٢} + ١٢س}$

⑥ $د(س) = \frac{٥ + ٢س}{س^{٢} + س + ١}$

⑦ $د(س) = \frac{٧}{س^{٢} - س}$

⑧ $د(س) = \frac{٨}{س^{٢} - ٦س + ٩}$

⑨ $د(س) = \frac{س + ٣}{٣س^{٢} - س - ٢}$

⑩ $د(س) = \frac{س + ١}{س^{٢} + ١}$

٤ عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

① $د(س) = \sqrt{س - ٣}$

② $د(س) = \sqrt{٢ - س}$

③ $د(س) = \sqrt[٣]{س - ٥}$

④ $د(س) = \sqrt{س^{٢} + ٤}$

⑤ $د(س) = \frac{٤}{\sqrt{٢س - ٥}}$

⑥ $د(س) = \frac{٣}{\sqrt{س - ٣}}$

⑦ $د(س) = \frac{٢}{\sqrt{١ - س}}$

⑧ $د(س) = \sqrt{س^{٢} - ١٦}$

⑨ $د(س) = \sqrt{٤ - س^{٢}}$

⑩ $د(س) = \frac{٥}{\sqrt{٩ - س^{٢}}}$

⑪ $د(س) = \sqrt{س^{٢} + ٢س + ٥}$

⑫ $د(س) = \frac{١}{\sqrt{س^{٢} - ٥س - ٦}}$

⑬ $د(س) = \frac{١}{\sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤}}$

⑭ $د(س) = \frac{٥}{\sqrt{س - ١}}$

٥ عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

① $د(س) = \begin{cases} -٢ & ، س < ٢ \\ ٣ & ، س > ٢ \end{cases}$

② $د(س) = \begin{cases} -٣ & ، س < ٣ \\ ٥ - س & ، س \geq ٣ \end{cases}$

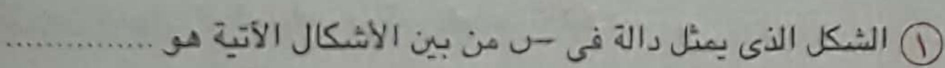
③ $د(س) = \begin{cases} س & ، ٠ \leq س \leq ١ \\ ٢ - س & ، ١ < س \leq ٢ \end{cases}$

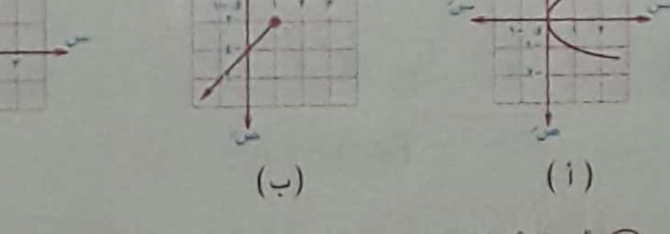
④ $د(س) = \begin{cases} س^2 - 1 & ، \quad س \le 2 \\ -5 & ، \quad 2 < س < 4 \end{cases}$

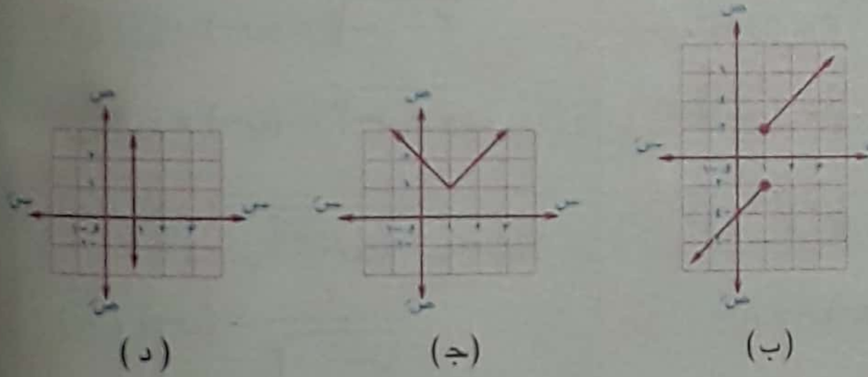
⑤ $د(س) = \begin{cases} 3س & ، \quad س \in [0 ، 2] \\ 6 & ، \quad س \in]2 ، 4[\\ س + 2 & ، \quad س \in [4 ، 6] \end{cases}$

٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الشكل الذى يمثل دالة فى س من بين الأشكال الآتية هو ....

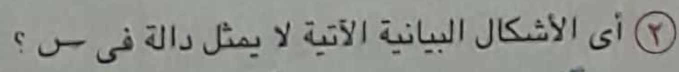


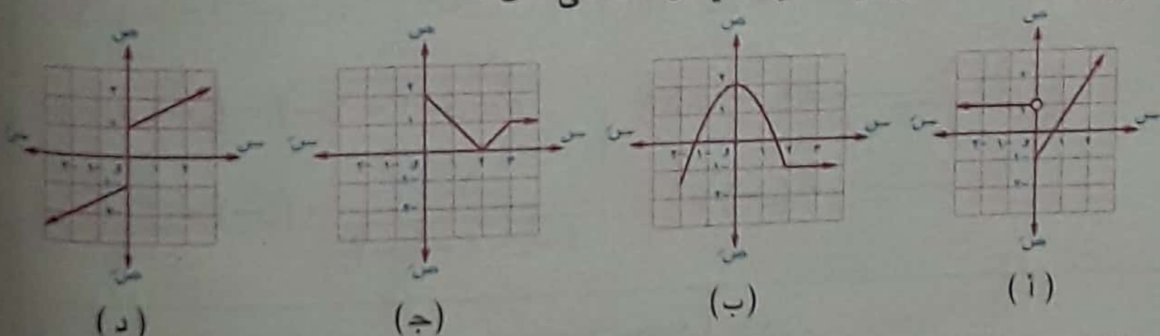




(أ) (ب) (جـ) (د)

② أى الأشكال البيانية الآتية لا يمثل دالة فى س ؟





(أ) (ب) (جـ) (د)

③ جميع العلاقات الآتية تكون فيها ص دالة فى س ما عدا العلاقة ....

(أ) ص = ٣ س + ١ (ب) ص = $س^2$ − ٤

(جـ) س = $ص^2$ − ٢ (د) ص = جا س

④ إذا كان مجال الدالة د : $د(س) = \frac{2}{س^2 - 6س + ك}$ هو ع − {٣}

فإن : ك = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ± ٩ (د) ١٨

٧ عين مجال ومدى ثم ابحث اطراد كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية :

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت العلاقة بين قياسات زوايا المضلع (ص) ، عدد أضلاع المضلع (س) هي ص = π (س − ٢) فإن مجال الدالة ص = ...

(أ) $ع^+$ (ب) ع − {٢}

(جـ) $ص^+$ (د) $ص^+$ − {١ ، ٢}

② مجال الدالة د (س) = $\frac{س}{\sqrt[3]{س - ٢}}$ هو ....

(أ) ع (ب) ع − {٢}

(جـ) ع − {٠ ، ٢} (د) ع − {٨}

③ مجال الدالة د (س) = $\frac{س}{\sqrt[3]{س} - س}$ هو ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٠[

(جـ)]٠ ، ∞[− {١} (د)]٠ ، ∞[− {٢}

④ مجال الدالة د (س) = $\frac{٥}{\sqrt{س - ١} - ٣}$ هو ....

(أ) [١ ، ∞[(ب) [١ ، ∞[− {٣}

(جـ) [١ ، ∞[− {١٠} (د)]−٣ ، ∞[

⑤ مجال الدالة د (س) = $\frac{٧}{\sqrt{س - ١} + ٣}$ هو ....

(أ) [١ ، ∞[(ب) [١ ، ∞[− {−٣}

(جـ) [١ ، ∞[− {١٠} (د) [٣ ، ∞[

⑥ مجال الدالة د (س) = $\sqrt{٦س - ٩ - س^٢}$ هو ....

(أ) ع (ب) ع − {٣}

(جـ) [٣ ، ∞[(د) {٣}



الدرس 2

العمليات على الدوال - تركيب دالتين

* إذا كانت $د_1$ ، $د_2$ دالتين مجالاهما $م_1$ ، $م_2$ فإن :

1. $(د_1 \pm د_2)(س) = د_1(س) \pm د_2(س)$ ، مجال $(د_1 \pm د_2)$ هو $م_1 \cap م_2$
2. $(د_1 \times د_2)(س) = د_1(س) \times د_2(س)$ ، مجال $(د_1 \times د_2)$ هو $م_1 \cap م_2$
3. $\left(\frac{د_1}{د_2}\right)(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)}$ حيث $د_2(س) \neq ٠$.

، مجال $\left(\frac{د_1}{د_2}\right)$ هو $(م_1 \cap م_2) - ص(د_2)$ حيث $ص(د_2)$ مجموعة أصفار $د_2$

ونلاحظ أنه فى جميع العمليات على الدوال يكون مجال الدالة الناتجة يساوى تقاطع مجالى الدالتين مع استثناء القيم التى تجعل المقام يساوى الصفر فى عملية القسمة.

مثال 1

إذا كانت $د : ح^+ \longrightarrow ح$ حيث $د(س) = ٢ س^٢ - ٧ س + ٥$

، $ر :]-\infty ، ٤] \longrightarrow ح$ حيث $ر(س) = ٢ س - ٥$ **أوجد :**

1. $(د + ر)(س)$
2. $(د - ر)(س)$
3. $(د \times ر)(س)$
4. $\left(\frac{د}{ر}\right)(س)$

وعين مجال كل منهم ثم احسب قيمة كل من :

$(د + ر)(٣)$ ، $(د - ر)(٠)$ ، $(د \times ر)(-٣)$ ، $\left(\frac{د}{ر}\right)(١)$



الحل

مجال د = $م_1 = ح^+ =]٠ ، \infty[$

، مجال ر = $م_2 =]-\infty ، ٤]$

$\therefore$ المجال المشترك للدالتين = $م_1 \cap م_2 = ح^+ \cap]-\infty ، ٤] =]٠ ، ٤]$

١ $(د + ر)(س) = (٢س^٢ - ٧س + ٥) + (٢س - ٥) = ٢س^٢ - ٥س$

، المجال = $]٠ ، ٤]$

٢ $(د - ر)(س) = (٢س^٢ - ٧س + ٥) - (٢س - ٥) = ٢س^٢ - ٩س + ١٠$

، المجال = $]٠ ، ٤]$

٣ $(د \times ر)(س) = (٢س^٢ - ٧س + ٥)(٢س - ٥)$

$= ٤س^٣ - ٢٤س^٢ + ٤٥س - ٢٥$ ، المجال = $]٠ ، ٤]$

٤ $\left(\frac{د}{ر}\right)(س) = \frac{٢س^٢ - ٧س + ٥}{٢س - ٥} = \frac{(٢س - ٥)(س - ١)}{٢س - ٥} = س - ١$

، المجال = $]٠ ، ٤] - \left\{\frac{٥}{٢}\right\}$

القيم العددية : • $(د + ر)(٣) = ٢ \times ٩ - ٥ \times ٣ = ٣$

• $(د - ر)(٠)$ غير معرفة لأن صفر $\notin]٠ ، ٤]$

• $(د \times ر)(-٣)$ غير معرفة لأن $-٣ \notin]٠ ، ٤]$

• $\left(\frac{د}{ر}\right)(١)$ = صفر

مثال ٢

إذا كانت د ، ر دالتين حيث $د(س) = \frac{س}{س + ١}$ ، $ر(س) = \frac{س + ١}{س - ٢}$ فأوجد :

١ $(د + ر)(س)$ ثم احسب قيمة $(د + ر)(٣)$

٢ $(د - ر)(س)$ ثم احسب قيمة $(د - ر)(٢)$

٣ $(د \times ر)(س)$ ثم احسب قيمة $(د \times ر)(٣)$

٤ $\left(\frac{د}{ر}\right)(س)$ ثم احسب قيمة $\left(\frac{د}{ر}\right)(-١)$ ، $\left(\frac{د}{ر}\right)(١)$

الحل

مجال د = م_1 = ح − {−١} ، مجال ر = م_2 = ح − {٢}

∴ المجال المشترك للدالتين د ، ر = $\text{م}_1 \cap \text{م}_2$ = ح − {−١ ، ٢}

١ $(\text{د} + \text{ر})(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} + ١} + \frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ٢} = \frac{\text{س}(\text{س} - ٢) + (\text{س} + ١)^٢}{(\text{س} + ١)(\text{س} - ٢)}$

$= \frac{\text{س}^٢ - ٢\text{س} + \text{س}^٢ + ٢\text{س} + ١}{(\text{س} + ١)(\text{س} - ٢)} = \frac{٢\text{س}^٢ + ١}{(\text{س} + ١)(\text{س} - ٢)}$

، المجال = ح − {−١ ، ٢} ، $(\text{د} + \text{ر})(٣) = \frac{٢ \times ٩ + ١}{٤ \times ١} = \frac{١٩}{٤}$

٢ $(\text{د} - \text{ر})(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} + ١} - \frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ٢} = \frac{\text{س}(\text{س} - ٢) - (\text{س} + ١)^٢}{(\text{س} + ١)(\text{س} - ٢)}$

$= \frac{-٤\text{س} - ١}{(\text{س} + ١)(\text{س} - ٢)}$ ، المجال = ح − {−١ ، ٢}

، (د − ر) (٢) غير معرفة لأن ٢ ∉ مجال (د − ر)

٣ $(\text{د} \times \text{ر})(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} + ١} \times \frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ٢} = \frac{\text{س}}{\text{س} - ٢}$

، المجال = ح − {−١ ، ٢} ، $(\text{د} \times \text{ر})(٣) = \frac{٣}{١} = ٣$

٤ $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} + ١} \div \frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ٢} = \frac{\text{س}}{\text{س} + ١} \times \frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ١} = \frac{\text{س}(\text{س} - ٢)}{(\text{س} + ١)^٢}$

، المجال = ح − {−١ ، ٢}

، $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)(-١)$ غير معرفة لأن −١ ∉ مجال $\frac{\text{د}}{\text{ر}}$ ، $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)(١) = \frac{١ \times -١}{٢^٢} = \frac{-١}{٤}$

مثال ٣

إذا كانت : $\text{د}_1(\text{س}) = \sqrt{\text{س} - ٢}$ ، $\text{د}_2(\text{س}) = \sqrt{٥ - \text{س}}$ ، $\text{د}_3(\text{س}) = \text{س} - ٣$

فأوجد قاعدة ومجال كل من الدوال الآتية :

١ $(\text{د}_1 + \text{د}_2)$ ٢ $(\text{د}_2 - \text{د}_3)$ ٣ $(\text{د}_1 \times \text{د}_3)$ ٤ $\left(\frac{\text{د}_2}{\text{د}_3}\right)$ ٥ $\left(\frac{\text{د}_3}{\text{د}_1}\right)$



الحـــل

مجال $د_1$ = $م_1$ = [٢ ، ∞[

، مجال $د_2$ = $م_2$ =]-∞ ، ٥]

، مجال $د_3$ = $م_3$ = ح

١ ($د_1$ + $د_2$) (س) = $\sqrt{س - ٢}$ + $\sqrt{٥ - س}$ ، المجال = [٢ ، ٥]

٢ ($د_2$ - $د_3$) (س) = $\sqrt{٥ - س}$ + ٣ - س ، المجال =]-∞ ، ٥]

٣ ($د_1$ × $د_2$) (س) = $\sqrt{س - ٢}$ × $\sqrt{٥ - س}$ ، المجال = [٢ ، ٥]

٤ $\left(\frac{د_2}{د_3}\right)$ (س) = $\frac{\sqrt{٥ - س}}{س - ٣}$ ، المجال =]-∞ ، ٥] - {٣}

٥ $\left(\frac{د_3}{د_1}\right)$ (س) = $\frac{س - ٣}{\sqrt{س - ٢}}$ ، المجال =]٢ ، ∞[

تركيب الدوال

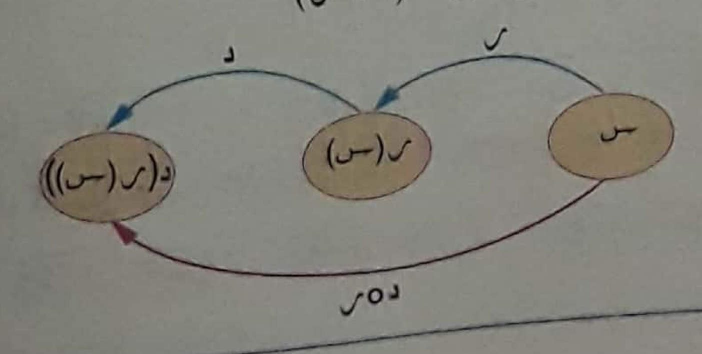
إذا كانت : د ، ر دالتين وكان مدى الدالة ر تقاطع مجال الدالة د لايساوى ∅ فإن تركيب الدالة د مع الدالة ر ينتج دالة جديدة يرمز لها بالرمز (د ∘ ر) وتقرأ [د تركيب ر] أو [د بعد ر]

ويكون (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) وتطبق قاعدة الدالة ر أولاً ثم قاعدة الدالة د

حيث : مجال (د ∘ ر) يتكون من قيم س التى فى مجال الدالة ر والتى تجعل ر (س) فى مجال الدالة د

اى أن مجال (د ∘ ر) = {س : س ∈ مجال ر ، ر (س) ∈ مجال د}

والشكل التالى يساعدنا فى توضيح تعريف (د ∘ ر)

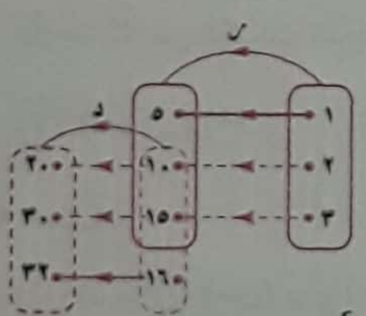


مثال توضيحى

إذا كانت : ر ، د دالتين معرفتين كمجموعة من الأزواج المرتبة كالتالى :

بيان ر = {(١ ، ٥) ، (٢ ، ١٠) ، (٣ ، ١٥)}

، بيان د = {(١٠ ، ٢٠) ، (١٥ ، ٣٠) ، (١٦ ، ٣٢)}



فإن : مجال ر = {١ ، ٢ ، ٣}

، مجال د = {١٠ ، ١٥ ، ١٦}

مجال (د ∘ ر) = {س : س ∈ مجال ر ، ر (س) ∈ مجال د}

= مجموعة المساقط الأولى فى بيان ر والتى مساقطها الثانية تظهر كمساقط أولى فى بيان د

∴ مجال (د ∘ ر) = {٢ ، ٣} ، مدى (د ∘ ر) = {٢٠ ، ٣٠}

، بيان (د ∘ ر) = {(٢ ، ٢٠) ، (٣ ، ٣٠)}

مثال ٤

إذا كانت : د (س) = س^٣ ، ر (س) = س + ١ **فأوجد :**

١ (د ∘ ر) (١) ٢ (ر ∘ د) (١) ٣ (د ∘ د) (−١) ٤ (ر ∘ ر) (−١)

الحل

١ ∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) ∴ (د ∘ ر) (١) = د (ر (١))

، ∵ ر (١) = ١ + ١ = ٢ ∴ (د ∘ ر) (١) = د (٢) = ٢^٣ = ٨

٢ ∵ (ر ∘ د) (س) = ر (د (س)) ∴ (ر ∘ د) (١) = ر (د (١))

، ∵ د (١) = ١^٣ = ١ ∴ (ر ∘ د) (١) = ر (١) = ١ + ١ = ٢

٣ ∵ (د ∘ د) (س) = د (د (س)) ∴ (د ∘ د) (−١) = د (د (−١))

، ∵ د (−١) = (−١)^٣ = −١ ∴ (د ∘ د) (−١) = د (−١) = −١

٤ ∵ (ر ∘ ر) (س) = ر (ر (س)) ∴ (ر ∘ ر) (−١) = ر (ر (−١))

، ∵ ر (−١) = −١ + ١ = ٠ ∴ (ر ∘ ر) (−١) = ر (٠) = ٠ + ١ = ١

مثال ٥

إذا كانت : د (س) = ٢ س + ١ ، ر (س) = س^{٢} − ٣

فأوجد كلًا من تركيبات الدوال الآتية :

١ (د ∘ ر) (س) ٢ (ر ∘ د) (س) ٣ (د ∘ د) (س)

الحل

١ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) وبوضع ر (س) بدلًا من س فى الدالة د

∴ (د ∘ ر) (س) = ٢ ر (س) + ١ وبوضع ر (س) = س^{٢} − ٣

∴ (د ∘ ر) (س) = ٢ (س^{٢} − ٣) + ١ وبتبسيط المقدار الناتج

∴ (د ∘ ر) (س) = ٢ س^{٢} − ٦ + ١ = ٢ س^{٢} − ٥

٢ (ر ∘ د) (س) = ر (د (س)) وبوضع د (س) بدلًا من س فى الدالة ر

∴ (ر ∘ د) (س) = (د (س))^{٢} − ٣ وبوضع د (س) = ٢ س + ١

∴ (ر ∘ د) (س) = (٢ س + ١)^{٢} − ٣ وبتبسيط المقدار الناتج

∴ (ر ∘ د) (س) = ٤ س^{٢} + ٤ س + ١ − ٣ = ٤ س^{٢} + ٤ س − ٢

٣ (د ∘ د) (س) = د (د (س)) ∴ (د ∘ د) (س) = ٢ (د (س)) + ١

∴ (د ∘ د) (س) = ٢ (٢ س + ١) + ١

∴ (د ∘ د) (س) = ٤ س + ٢ + ١ = ٤ س + ٣

ملاحظة

فى المثال السابق لاحظ أن : (د ∘ ر) (س) ≠ (ر ∘ د) (س)

ومن ذلك يمكن استنتاج أن : د ∘ ر ≠ ر ∘ د

أى أن عملية تركيب دالتين ليست عملية إبدالية.

مثال ٦

إذا كانت د (س) دالة خطية وكانت (د ∘ د) (س) = ٤ س + ٣ **أوجد** : د (س)

الحل

نفرض أن : د (س) = أ س + ب

، ∵ (د ∘ د) (س) = ٤ س + ٣   ∴ د (د (س)) = ٤ س + ٣

∴ د (أ س + ب) = ٤ س + ٣   ∴ أ (أ س + ب) + ب = ٤ س + ٣

∴ أ^{2} س + أ ب + ب = ٤ س + ٣   ∴ أ^{2} = ٤ ومنها أ = ± ٢

، أ ب + ب = ٣   ∴ ب = $\frac{٣}{أ + ١}$

، عند أ = ٢   ∴ ب = ١

، عند أ = -٢   ∴ ب = -٣

∴ د (س) = ٢ س + ١   أو ،   د (س) = -٢ س - ٣

مثال ٧

إذا كانت د (س) = ٢ س + ١ ، (د ∘ ر) (س) = س^{2} + س - ١ **أوجد** : ر (س)

الحل

∵ (د ∘ ر) (س) = س^{2} + س - ١   ∴ د (ر (س)) = س^{2} + س - ١

∴ ٢ ر (س) + ١ = س^{2} + س - ١   ∴ ٢ ر (س) = س^{2} + س - ٢

∴ ر (س) = $\frac{١}{٢}$ س^{2} + $\frac{١}{٢}$ س - ١

مثال ٨

إذا كانت د : ح ⟵ ح ، د (س) = ٥ س - ٢ ، ر (س) = { س + ١ ، س > ٣ ؛ ٢ س ، س ≤ ٣ }

أوجد : (د ∘ ر) (٤) ، (ر ∘ د) (١)



الحــــل

١ (د ∘ ر) (٤) = د (ر (٤)) (لاحظ أن : (ر (٤) = ٤ + ١ = ٥)

= د (٥) = ٥ × ٥ − ٢ = ٢٣

٢ (ر ∘ د) (١) = ر (د (١)) (لاحظ أن : د (١) = ٥ × ١ − ٢ = ٣)

= ر (٣) = ٢ × ٣ = ٦

لتعيين مجال الدالة (د ∘ ر) نتبع الخطوات التالية :

١ نوجد $م_١$ = مجال الدالة ر ٢ نوجد $م_٢$ = قيم س التى تجعل ر (س) فى مجال د

٣ نوجد $م_١ \cap م_٢$ وهو مجال (د ∘ ر)

مثال ٩

أوجد مجال (د ∘ ر) إذا كان : د (س) = $\frac{٣}{س - ٤}$ ، ر (س) = $\frac{٤}{س + ٢}$

الحــــل

لإيجاد مجال (د ∘ ر) نتبع الخطوات الآتية :

* نوجد مجال ر وليكن $م_١$:

∵ ر (س) = $\frac{٤}{س + ٢}$ ∴ $م_١$ = مجال ر = ح − {−٢}

* نوجد قيم س التى تجعل ر (س) فى مجال الدالة د ولتكن $م_٢$:

∵ د (س) = $\frac{٣}{س - ٤}$ ∴ د (ر (س)) = $\frac{٣}{ر (س) - ٤}$

∴ ر (س) فى مجال د إذا كان : ر (س) ≠ ٤

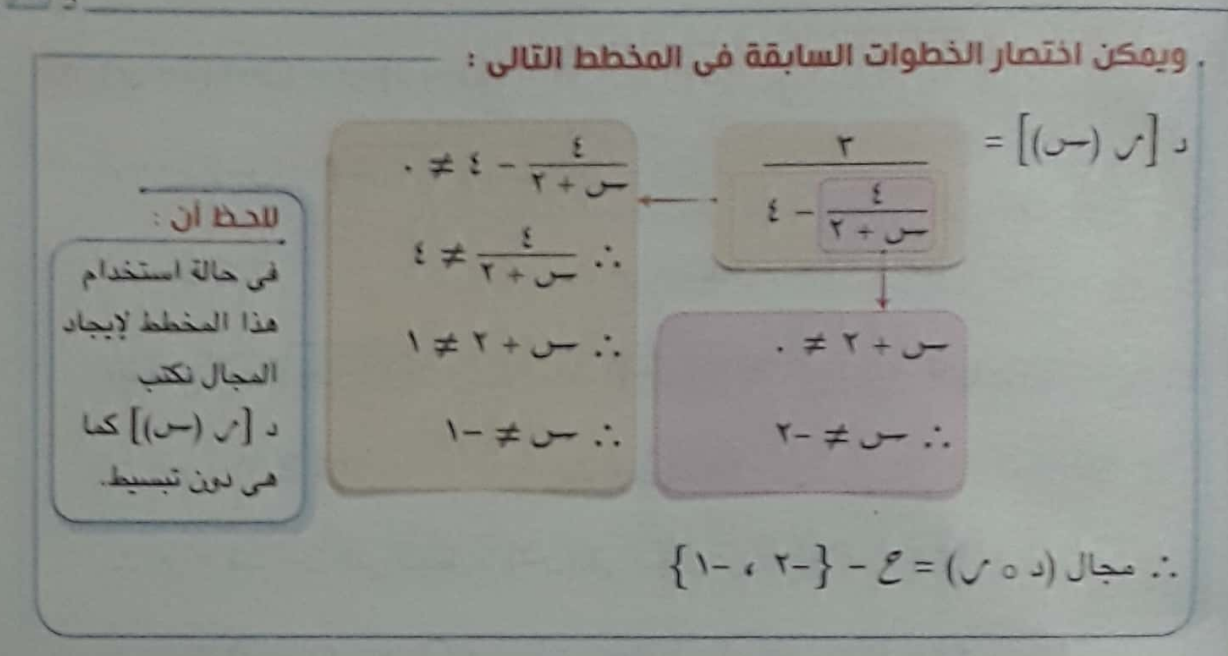
، عندما ر (س) = ٤ ∴ $\frac{٤}{س + ٢}$ = ٤

∴ س + ٢ = ١ ∴ س = −١

∴ $م_٢$ = قيم س التى تجعل ر (س) فى مجال د = ح − {−١}

* نوجد مجال (د ∘ ر) = $م_١ \cap م_٢$ = (ح − {−٢}) ∩ (ح − {−١}) = ح − {−٢ ، −١}

ويمكن اختصار الخطوات السابقة فى المخطط التالى :



مثال 10

إذا كانت : $\text{د}\,(\text{س}) = \sqrt{\text{س} - 2}$ ، $\text{ر}\,(\text{س}) = \sqrt{6 - \text{س}}$

فأوجد مجال كل من الدالتين الآتيتين : [1] $\text{د} \circ \text{ر}$ [2] $\text{ر} \circ \text{د}$

الحل

[1] $(\text{د} \circ \text{ر})(\text{س}) = \text{د}\,(\text{ر}\,(\text{س})) = \sqrt{\text{ر}\,(\text{س}) - 2} = \sqrt{\sqrt{6 - \text{س}} - 2}$

، $\because \text{ر}\,(\text{س}) = \sqrt{6 - \text{س}}$ وبوضع $6 - \text{س} \ge 0$

$\therefore \text{س} \le 6$ $\therefore$ م_1 = مجال ر $=]-\infty ، 6]$

وبوضع $\text{ر}\,(\text{س}) - 2 \ge 0$ $\therefore \sqrt{6 - \text{س}} - 2 \ge 0$

$\therefore \sqrt{6 - \text{س}} \ge 2$ (بتربيع الطرفين)

$\therefore 6 - \text{س} \ge 4$ $\therefore \text{س} \le 2$

$\therefore$ م_2 = قيم س التى تجعل ر (س) فى مجال د $=]-\infty ، 2]$

$\therefore$ مجال $(\text{د} \circ \text{ر}) = \text{م}_1 \cap \text{م}_2 =]-\infty ، 6] \cap]-\infty ، 2] =]-\infty ، 2]$

٢ $(ر \circ د)(س) = ر(د(س)) = \sqrt{٦ - د(س)} = \sqrt{٦ - \sqrt{س - ٢}}$

، ∵ $د(س) = \sqrt{س - ٢}$ وبوضع $س - ٢ \geq ٠$

∴ $س \geq ٢$ ∴ $م_١$ = مجال د = $[٢ ، \infty[$

وبوضع $٦ - \sqrt{س - ٢} \geq ٠$ ∴ $\sqrt{س - ٢} \leq ٦$ (بتربيع الطرفين)

∴ $س - ٢ \leq ٣٦$ ∴ $س \leq ٣٨$

∴ $م_٢$ = قيم س التى تجعل د (س) فى مجال ر = $]-\infty ، ٣٨]$

∴ مجال $(ر \circ د) = م_١ \cap م_٢ = [٢ ، \infty[\cap]-\infty ، ٣٨] = [٢ ، ٣٨]$

حل آخر لإيجاد مجال $(ر \circ د)$:

∵ مجال د = $[٢ ، \infty[$ ، مجال ر = $]-\infty ، ٦]$

، ∵ مجال $(ر \circ د) = \{س : س \in$ مجال د ، $د(س) \in$ مجال ر$\}$

∵ $س \in$ مجال د ∴ $س \in [٢ ، \infty[$

∵ $د(س) \in$ مجال ر ∴ $د(س) \in]-\infty ، ٦]$

∴ $\sqrt{س - ٢} \in]-\infty ، ٦]$ ∴ $\sqrt{س - ٢} \leq ٦$

∴ $س - ٢ \leq ٣٦$ ∴ $س \leq ٣٨$

∴ $س \in]-\infty ، ٣٨]$

اى أن مجال $(ر \circ د) = [٢ ، \infty[\cap]-\infty ، ٣٨] = [٢ ، ٣٨]$

مثال ١١

إذا كانت : د (س) = √(س − ١) ، ر (س) = س^2 − ٣

أوجد (د ∘ ر) (س) في أبسط صورة موضحًا المجال ثم أوجد (د ∘ ر) (٢)

الحل

(د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) = √(ر (س) − ١) = √(س^2 − ٣ − ١) = √(س^2 − ٤)

∵ مجال د = [١ ، ∞[، مجال ر = ح

، ∵ مجال (د ∘ ر) = {س : س ∈ مجال ر ، ر (س) ∈ مجال د}

∵ س ∈ مجال ر ∴ س ∈ ح

، ∵ ر (س) ∈ مجال د ∴ ر (س) ∈ [١ ، ∞[

∴ س^2 − ٣ ∈ [١ ، ∞[∴ س^2 − ٣ ≥ ١

∴ س^2 − ٤ ≥ صفر

∴ (س − ٢) (س + ٢) ≥ صفر

∴ س ≥ ٢ ، س ≤ −٢ ∴ س ∈ ح −]−٢ ، ٢[

س
س^2−٤ | + + + | − − − | + + +
−٢ ، ٢
٠ ، ٠

∴ مجال (د ∘ ر) = ح ∩ (ح −]−٢ ، ٢[) = ح −]−٢ ، ٢[

، (د ∘ ر)(٢) = √(٤ − ٤) = صفر





تمارين 2 على العمليات على الدوال - تركيب دالتين

من أسئلة الكتاب المدرسي

١ إذا كانت د دالة حيث : د (س) = $س^٢$ − س − ١٢ ومجالها [−٤ ، ٨] ، ر دالة حيث ر (س) = س − ٤ ومجالها [−٧ ، ٤] فأوجد كلاً من الدوال الآتية مع تعيين مجال كل منها :

① (د + ر) (س) ② (د − ر) (س) ③ (د . ر) (س)

④ $\left(\frac{د}{ر}\right)$ (س) ⑤ $\left(\frac{ر}{د}\right)$ (س)

---

٢ إذا كانت د ، ر دالتين حقيقيتين حيث : د (س) = $س^٢$ − ٤ ، ر (س) = $\sqrt{س - ١}$

أوجد : ① مجال كل من الدوال الآتية : (د + ر) ، (د . ر) ، $\left(\frac{د}{ر}\right)$ ، $\left(\frac{ر}{د}\right)$

② القيمة العددية – إن أمكن – لكل من :

(د + ر) (٥) ، (د . ر) (٢) ، $\left(\frac{د}{ر}\right)$ (٣) ، $\left(\frac{ر}{د}\right)$ (−٢)

---

٣ إذا كان : د (س) = $س^٢$ − ٤ س ، ر (س) = $\sqrt{س + ٢}$ ، ع (س) = $\sqrt{٤ - س}$

أولًا : أوجد قاعدة ومجال كل من الدوال الآتية :

① (د + ر) ② (ر − ع) ③ (د . ع) ④ $\left(\frac{ع}{د}\right)$

ثانيًا : احسب القيمة العددية - إن أمكن - لكل من :

① (ر − ع) (١) ② (د . ع) (٥) ③ $\left(\frac{ع}{د}\right)$ (٣)

---

٤ عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

① د (س) = $\frac{١}{س} + \frac{١}{س + ٢}$

② د (س) = $\frac{س - ١}{س^٢ - ١} + \frac{١}{س + ١}$

③ د (س) = $\frac{س}{\sqrt{١ - س}}$

④ د (س) = $\frac{٣ س}{\sqrt{٢ س - ١}}$

⑤ د (س) = $\sqrt{س - ١} + \sqrt{س + ٢}$

⑥ د (س) = $\sqrt{س + ٢} - \sqrt{٣ - س}$

⑦ د(س) = ∛(س − ٤) + √(س − ٢)

⑧ د(س) = √(س − ٤) / (س − ٦)

⑨ د(س) = (س + ١) / √(س − ١)

⑩ د(س) = √(س − ٣) / (س² − ٤)

⑪ د(س) = √(س − ٣) / √(س − ٥)

⑫ د(س) = √(س − ٣) / √(٥ − س)

---

٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت د : ح⁺ ← ح حيث د(س) = س − ٥ ، ر : [−١ ، ٥] ← ح
حيث ر(س) = س − ٢ فإن مجال (د/ر)(س) هو ....

(أ)]٠ ، ٥] (ب)]٠ ، ٥] − {٢}

(جـ) [−١ ، ∞[(د) ح

② إذا كانت د : ح⁺ ← ح حيث د(س) = س² − ٧ ، ر : [−٣ ، ٢] ← ح
حيث ر(س) = س² + ٣ فإن : (د − ر)(−٥) = ...

(أ) −٥ (ب) −١٠ (جـ) −٢٠ (د) غير معرفة.

③ إذا كانت : د ، ر : ح ← ح حيث د(س) = ٣ س + ١ ، وكان
(د + ر)(س) = س² + ٢ س − ١ فإن : ر(−١) = ...

(أ) −٢ (ب) −١ (جـ) صفر (د) ٢

④ مجال الدالة د : د(س) = √(س − ٢) − √(٧ − س) هو ....

(أ) [٢ ، ٧] (ب)]٢ ، ٧[

(جـ) ح − [٢ ، ٧] (د) ح −]٢ ، ٧[

⑤ إذا كان د : ح ← ح حيث د(س) = س² − س ، ر : ح ← ح حيث
ر(س) = ٣ س − ٢ فإن : (د . ر − ٦ ر)(٢) = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٤٠ (جـ) ١٦ (د) −١٦

⑥ إذا كان : د (س) = $\sqrt[3]{\text{س} - 3}$ ، ر (س) = $\sqrt{3 - \text{س}}$

فإن مجال ($\frac{\text{د}}{\text{ر}}$) هو ....

(أ)]٣ ، ∞[(ب) [٣ ، ∞[

(جـ)]-∞ ، ٣[(د)]-∞ ، ٣]

⑦ إذا كانت د دالة حيث د = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٨)}

، ر دالة حيث ر = {(١ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٧)} فإن : د + ر = ...

(أ) {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٨) ، (١ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٧)}

(ب) {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٨) ، (٥ ، ٧)}

(جـ) {(١ ، ٥) ، (٣ ، ١١)}

(د) {(١ ، ٥) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ١١) ، (٤ ، ٨) ، (٥ ، ٧)}

٦ إذا كانت د ، ر دالتين حقيقيتين حيث :

د (س) = { س - ٢ ، س ≥ ٢ ؛ - س + ٢ ، س < ٢ ، ر (س) = س فأوجد كلاً من :

① (د . ر) (س) ② ($\frac{\text{د}}{\text{ر}}$) (س) ③ ($\frac{\text{ر}}{\text{د}}$) (س)

مع تعيين مجال كل دالة.

٧ عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

① د (س) = $\sqrt{\frac{\text{س} - 3}{\text{س} - 5}}$

② د (س) = $\frac{5\text{س} + 2}{\sqrt{\text{س} - 2} - 1}$

③ د (س) = $\frac{\sqrt{\text{س} + 2}}{\text{س}^2 - 6\text{س} - 7}$

④ د (س) = $\frac{\frac{3}{\text{س} - 1}}{\frac{1}{\text{س} - 2} + 4}$

٨ إذا كان : د (س) = ٣ س + ١ ، ر (س) = س^2 - ٥ ، ع (س) = س^3

أوجد : ① (د ∘ ر) (٢) ② (ر ∘ د) (-٣)

③ (ر ∘ ع) (١) ④ (ع ∘ د) (-٢)

٠-٢ ، ٥٩ ، -٤ ، -١٢٥

٩ إذا كان : د (س) = $\frac{١}{س}$ ، ر (س) = س + ٣

أوجد : ① (د ○ ر) (س) ② (ر ○ د) (س) وحدد مجال كل منهما .

---

١٠ إذا كان : د (س) = $\frac{١}{س - ١}$ ، ر (س) = س^{٢}

فأوجد فى أبسط صورة موضحًا المجال :

① (د ○ ر) (س) ② (ر ○ د) (س)

---

١١ إذا كان : د (س) = س^{٢} + ٦ ، ر (س) = ٣ س

① أوجد : (د ○ ر) (٣)

② حدد : قيم س التى تجعل (د ○ ر) (س) = ٤٢ «٨٧ ، ± ٢»

---

١٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : د (١) = ٤ ، ر (٤) = ٧ فإن : (ر ○ د) (١) = ...

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) ١١

② إذا كان : د (س) = $\sqrt[٣]{س}$ ، ر (س) = س^{٣} فإن : (د ○ ر) (س) = ...

(أ) س (ب) س^{٣} (جـ) $\sqrt[٣]{س}$ (د) | س |

③ إذا كان : د (س) = $\sqrt{س}$ ، ر (س) = س^{٢}

فإن : مجال (ر ○ د) = ...

(أ)]- ∞ ، ٠] (ب) [٠ ، ∞[(جـ) ح$^{+}$ (د) ح

④ إذا كان : د (س) = $\sqrt{س}$ ، ر (س) = س^{٢}

فإن : مجال (د ○ ر) = ...

(أ)]- ∞ ، ٠] (ب) [٠ ، ∞[(جـ) ح$^{+}$ (د) ح

⑤ إذا كانت العلاقة بين س ، د (س)

، ر (س) كما بالشكل المقابل

فإن : ر (د (٦)) = ...

(أ) ٣ (ب) ١

(جـ) –٤ (د) –٧

س	د (س)	س	ر (س)
–٣	٤	–٤	٣
–٢	٣	–١	١
٣	١	١	–٤
٦	–١	٤	–٧

١٣ إذا كان : د (س) = س^{٢} – ٣ ، ر (س) = √(س – ٢)

أوجد (د ० ر) (س) فى أبسط صورة محددًا المجال ثم أوجد (د ० ر) (٣)

١٤ إذا كان : د (س) = √(س + ١) ، ر (س) = ٢ / (س – ٣) فأوجد مجال (د ० ر)

١٥ إذا كان : د (س) = √(س – ٢) ، ر (س) = √(٤ – س)

فأوجد كلًا من الدالتين الآتيتين موضحًا مجالها :

① د ० ر ② ر ० د

١٦ إذا كان : د (س) = √(س – ١) ، ر (س) = √(س^{٢} – ٤)

فأوجد مجال كل من الدالتين الآتيتين :

① د ० ر ② ر ० د

١٧ إذا كان : ع (س) = √(س^{٢} – ٤) فأوجد الدالتين د ، ر بحيث يكون :

ع (س) = (د ० ر) (س)

١٨ إذا كانت : د (س) دالة خطية وكان (د ० د) (س) = ١٦ س + ١٥ أوجد : د (س)

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

١٩ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = √(س − ١) ، ر (س) = √(١ − س)

فإن مجال (د + ر) هو ....

(أ) [١ ، ∞[(ب)]−∞ ، ١]

(جـ) [−١ ، ∞[(د) {١}

② إذا كانت : د (س) = { −س + ٢ ، س > ٠ ؛ ٣ س ، س ≤ ٠ .

، ر (س) = { ٢ س − ١ ، س ≥ ١ ؛ س + ٢ ، س < ١

فإن : (د + ر) (س) = ... حيث ٠ < س < ١

(أ) ٤ س + ٢ (ب) س + ١

(جـ) ٥ س − ١ (د) ٤

③ إذا كانت : د (س) = { س² + ١ ، س < ٠ ؛ ٣ س + ١ ، س ≥ ٠ .

، ر (س) = { ٤ س − ٢ ، س < ٢ ؛ س² + ٢ ، س ≥ ٢ فإن : (ر ∘ د) (−١) = ...

(أ) ٣٧ (ب) −١٧ (جـ) ١٠ (د) ٦

④ إذا كانت : د (س) = س² ، ر (س) = ٢ س + ٣

فإن مجموعة حل المعادلة د (ر (س)) = د (س) هي ....

(أ) {١ ، ٢} (ب) {−٣ ، ١}

(جـ) {−١ ، −٣} (د) {−١ ، ٣}

⑤ إذا كانت : د (س) = ٢ س + ١ وكان : (د ∘ ر) (س) = ٣ س + ٢

فإن : ر (س) = ...

(أ) س + ١ (ب) ٥ س + ٣ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ س + $\frac{١}{٢}$ (د) ٢ س + ٣

٦ إذا كانت د : ح ← ح وكان : د (س) = ٢ س − ٣ ، (ر ∘ د) (س) = س + ٢

فإن : ر (س) = ...

(أ) ٢ $س^{٢}$ + س − ٦ (ب) $\frac{س + ٢}{٢ س - ٣}$

(جـ) $\frac{س + ٣}{٢}$ (د) $\frac{س + ٧}{٢}$

٧ إذا كانت : د (س) = س + ٢ ، ر (س) = $\frac{س - ك}{٣ س - ١}$

وكان : (ر ∘ د) (٠) = (د ∘ ر) (١) فإن : ك = ...

(أ) ٧ (ب) ٥ (جـ) ١ (د) $\frac{٧}{٢}$

٨ الشكل المقابل يمثل

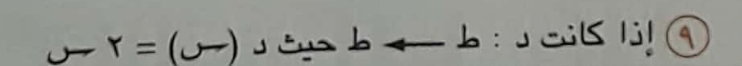
منحنى ص = د (س)

فإن : (د ∘ د ∘ د) (١) = ...

(أ) −٥ (ب) −١

(جـ) ١ (د) ٢

٩ إذا كانت د : ط ← ط حيث د (س) = ٢ س



، ت : ط ← ط حيث ت (س) = $\begin{cases} \frac{س}{٢} & \text{، س زوجي} \\ \frac{س + ١}{٢} & \text{، س فردي} \end{cases}$

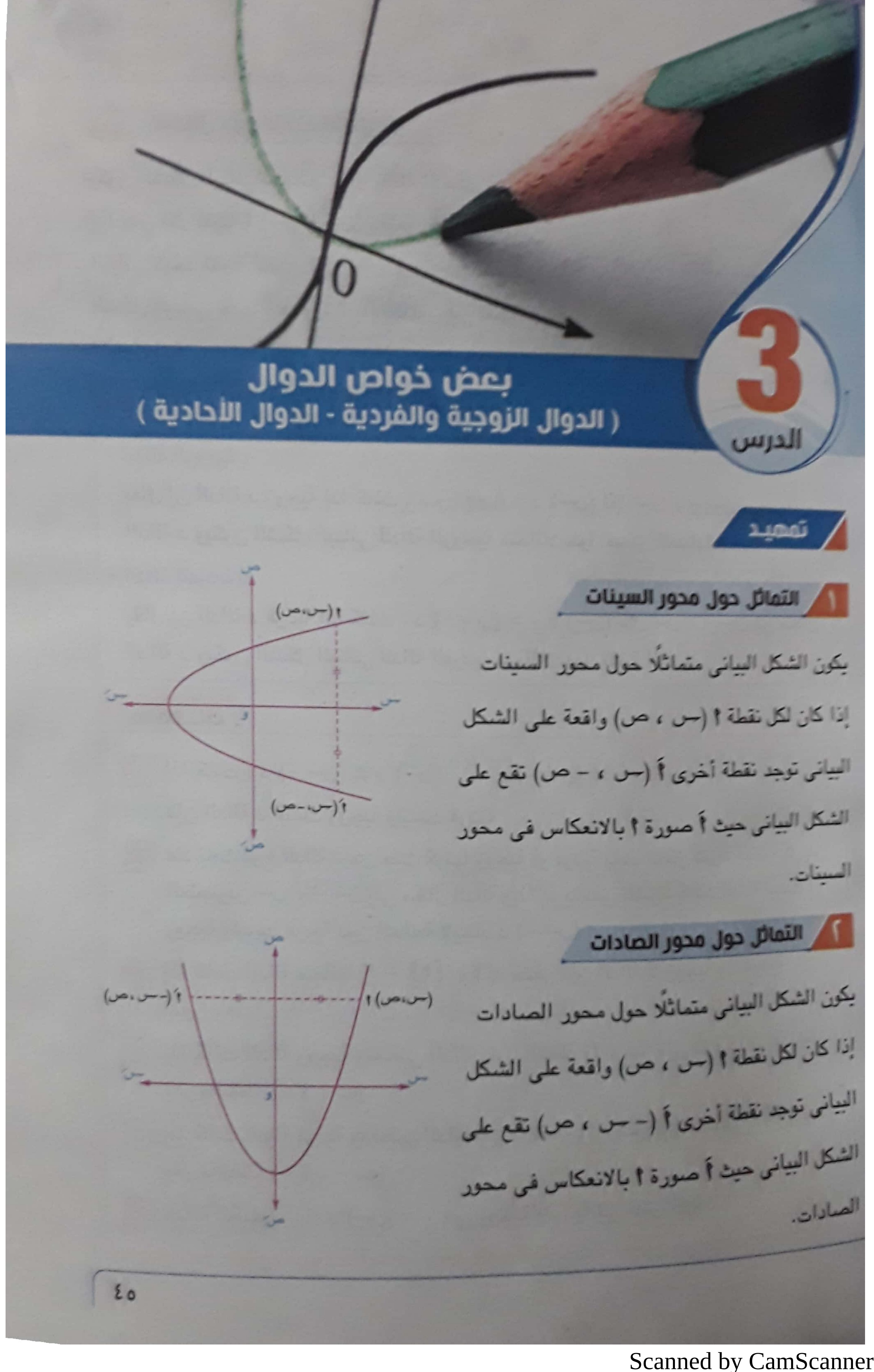
فإن : (د ∘ ت) (٣) − (د ∘ ت) (٨) = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) −٤ (د) −٥

٢٠ إذا كانت د : ح − {٠} ← ح وكان د (س) = $\frac{١}{س}$ أوجد :

١ (د ∘ د) (س) ٢ (د ∘ د ∘ د) (س)

٣ (د ∘ د ∘ د ∘ ..... إلى ن من المرات) (س)



الدرس 3

بعض خواص الدوال
(الدوال الزوجية والفردية - الدوال الأحادية)

تمهيد

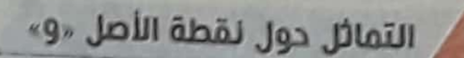
١ التماثل حول محور السينات

يكون الشكل البيانى متماثلًا حول محور السينات إذا كان لكل نقطة أ (س ، ص) واقعة على الشكل البيانى توجد نقطة أخرى أ َ (س ، − ص) تقع على الشكل البيانى حيث أ َ صورة أ بالانعكاس فى محور السينات.

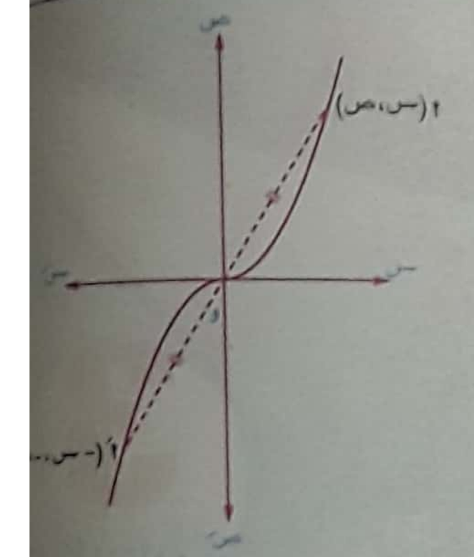
٢ التماثل حول محور الصادات

يكون الشكل البيانى متماثلًا حول محور الصادات إذا كان لكل نقطة أ (س ، ص) واقعة على الشكل البيانى توجد نقطة أخرى أ َ (− س ، ص) تقع على الشكل البيانى حيث أ َ صورة أ بالانعكاس فى محور الصادات.





٣ التماثل حول نقطة الأصل «و»



يكون الشكل البيانى متماثلًا حول نقطة الأصل (و) إذا كان لكل نقطة أ (س ، ص) واقعة على الشكل البيانى توجد نقطة أخرى أَ (- س ، - ص) تقع على الشكل البيانى حيث أَ صورة أ بالانعكاس فى نقطة الأصل (و)

الدالة الزوجية والدالة الفردية

• الدالة الزوجية :

يقال إن الدالة د زوجية إذا كانت : د (- س) = د (س) لكل س ، - س فى مجال الدالة د ويكون الشكل البيانى للدالة الزوجية متماثلًا حول محور الصادات.

• الدالة الفردية :

يقال إن الدالة د فردية إذا كانت : د (- س) = - د (س) لكل س ، - س فى مجال الدالة د ويكون الشكل البيانى للدالة الفردية متماثلًا حول نقطة الأصل.

ملاحظـــات

١ إذا كانت : د (- س) ≠ د (س) ، د (- س) ≠ - د (س)
فإن الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

٢ عند بحث نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أو فردية يجب تحقق شرط انتماء كل من العنصرين س ، - س إلى مجال الدالة وإذا لم يتحقق الشرط كانت الدالة ليست زوجية وليست فردية دون الحاجة لإيجاد د (- س)

٣ إذا كانت الدالة مجالها ع - {أ} ، أ ≠ صفر فإن الدالة لا زوجية ولا فردية بدون بحثها.

٤ إذا كانت الدالة زوجية ومنحنى الدالة يمر بالنقطة (أ ، ب) فإن منحنى الدالة أيضًا يمر بالنقطة (- أ ، ب)

٥ إذا كانت الدالة فردية ومنحنى الدالة يمر بالنقطة (أ ، ب) فإن منحنى الدالة أيضًا يمر بالنقطة (- أ ، - ب)

٦ الدالة الصفرية د : د (س) = ٠ هى زوجية وفردية فى نفس الوقت.

مثال ١

ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

١ د (سـ) = سـ^{٢}

٢ د (سـ) = ٢ سـ^{٣}

٣ د (سـ) = $\sqrt{\text{سـ} - ١}$

٤ د (سـ) = حاسـ

٥ د (سـ) = سـ^{٢} − ٥ ، سـ $\in$ [−٢ ، ٢]

الحـــل

١ ∵ د كثيرة حدود ∴ مجال د = ع

∴ لكل سـ ، −سـ $\in$ ع يكون :

د (−سـ) = (−سـ)^{٢} = سـ^{٢} = د (سـ)

∴ د دالة زوجية.

٢ ∵ د كثيرة حدود ∴ مجال د = ع

∴ لكل سـ ، −سـ $\in$ ع يكون :

د (−سـ) = ٢ (−سـ)^{٣} = ٢ (−سـ^{٣}) = −٢ سـ^{٣} = − د (سـ)

∴ د دالة فردية.

٣ ∵ مجال د هو مجموعة قيم سـ التى تجعل سـ − ١ $\geq$ ٠ أى : سـ $\geq$ ١

∴ مجال د = [١ ، ∞[

∴ لكل سـ $\in$ [١ ، ∞[لا يوجد −سـ $\in$ [١ ، ∞[

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

لاحظ أن

٣ $\in$ [١ ، ∞[

ولكن −٣ $\notin$ [١ ، ∞[



٤ مجال الدالة د : د (س) = جتا س هو ح

∴ لكل س ، -س ∈ ح يكون :

د (-س) = جتا (-س) = جتا س = د (س)

∴ د دالة زوجية.

٥ ∵ -٢ ∈ مجال الدالة ، ٢ ∉ مجال الدالة

∴ د ليست زوجية وليست فردية.

تذكر أن

جا (-س) = - جا س

جتا (-س) = جتا س

ظا (-س) = - ظا س

ملاحظتان

١ تُسمى الدالة د : ح ⟵ ح ، د (س) = أ $س^{ن}$ حيث أ ≠ ٠ ، ن ∈ $ص_+$ دالة القوى وتكون الدالة د :

⟸ زوجية إذا كان ن عددًا زوجيًا. ⟸ فردية إذا كان ن عددًا فرديًا

٢ د (س) = جتا س ، د (س) = قا س دوال زوجية

بينما د (س) = جا س ، د (س) = قتا س ، د (س) = ظا س

، د (س) = ظتا س دوالًا فردية.

مثال ٢

إذا كانت د دالة زوجية حيث : د (س) = أ $س^{٢}$ + ب س + ٥ وكان منحنى الدالة يمر بالنقطة (١ ، ٦) **فأوجد** : قيمة أ ، ب

الحـــل

∵ الدالة زوجية ومنحناها يمر بالنقطة (١ ، ٦)

∴ المنحنى يمر بالنقطة (-١ ، ٦)

عند النقطة (١ ، ٦) ∴ ٦ = أ + ب + ٥ (١)

، عند النقطة (-١ ، ٦) ∴ ٦ = أ - ب + ٥ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ١٢ = ٢ أ + ١٠ ∴ ٢ أ = ٢ ∴ أ = ١

، بالتعويض فى (١) : ∴ ٦ = ١ + ب + ٥ ∴ ب = صفر

خواص هامة

إذا كان كل من د$_1$ ، د$_2$ دالة زوجية وكل من ر$_1$ ، ر$_2$ دالة فردية فإن :

1. د$_1$ ± د$_2$ دالة زوجية.
2. ر$_1$ ± ر$_2$ دالة فردية.
3. د$_1$ ± ر$_1$ دالة ليست زوجية وليست فردية.
4. كل من (د$_1$ × د$_2$) ، $\left(\frac{د_1}{د_2}\right)$ دالة زوجية.
5. كل من (ر$_1$ × ر$_2$) ، $\left(\frac{ر_1}{ر_2}\right)$ دالة زوجية.
6. كل من (د$_1$ × ر$_1$) ، $\left(\frac{د_1}{ر_1}\right)$ دالة فردية.

مثال ٣

ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

1. د (س) = س^2 + جتا س 2. د (س) = س^3 + جا س 3. د (س) = ٣ س^4 ظا س

الحل

1. ∵ د (− س) = (− س)^2 + جتا (− س) = س^2 + جتا س = د (س)

∴ د دالة زوجية.

حل آخر : بفرض أن : د (س) = د$_1$ (س) + د$_2$ (س)

حيث د$_1$ (س) = س^2 ، د$_2$ (س) = جتا س دالتان زوجيتان.

∴ د$_1$ + د$_2$ دالة زوجية. ∴ د دالة زوجية.

2. ∵ د (− س) = (− س)^3 + جا (− س) = − س^3 − جا س

= − (س^3 + جا س) = − د (س)

∴ د دالة فردية.

لاحظ أن : الدالة الناتجة من جمع دالتين فرديتين هي دالة فردية.

3. ∵ د (− س) = ٣ (− س)^4 ظا (− س) = ٣ س^4 (− ظا س)

= −٣ س^4 ظا س = − د (س)

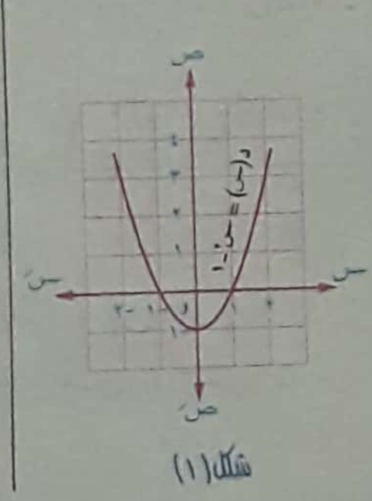
∴ د دالة فردية.

لاحظ أن : الدالة الناتجة من ضرب دالتين إحداهما زوجية والأخرى فردية هي دالة فردية.

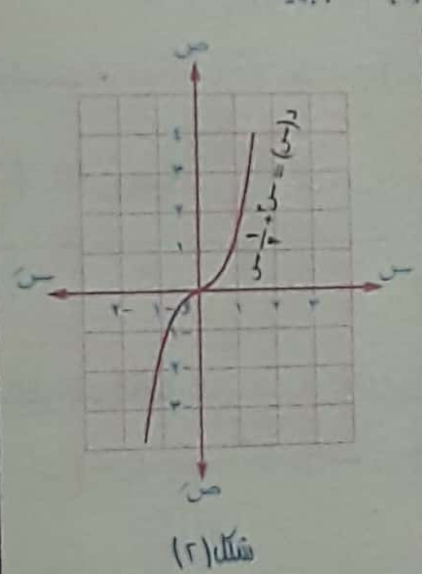


مثال ٤

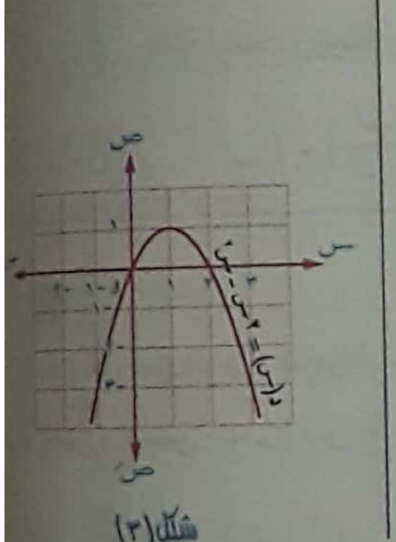
كل من الأشكال الآتية يوضح الشكل البيانى للدالة د ، حدد من الرسم ما إذا كانت الدالة د زو...
أم فردية أم غير ذلك وحقق إجابتك جبريًا :



شكل(١)



شكل(٢)



شكل(٣)

الحـــل

شكل(١) : د (س) = س^{٢} − ١

∵ مجال الدالة د = ح والمنحنى متماثل حول محور الصادات ∴ الدالة د دالة زوجية

التحقق الجبرى : ∵ لكل س ، − س ∈ ح

د (− س) = (− س)^{٢} − ١ = س^{٢} − ١ = د (س) ∴ الدالة د دالة زوجية

شكل(٢) : د (س) = س^{٣} + $\frac{١}{٢}$ س

∵ مجال الدالة د = ح والمنحنى متماثل حول نقطة الأصل

∴ الدالة د دالة فردية.

التحقق الجبرى : ∵ لكل س ، − س ∈ ح

د (− س) = (− س)^{٣} + $\frac{١}{٢}$ (− س) = − س^{٣} − $\frac{١}{٢}$ س = − (س^{٣} + $\frac{١}{٢}$ س)

= − د (س)

∴ الدالة د دالة فردية.

Scanned by CamScanner

شكل (٣) : $\text{د}(\text{س}) = ٢\,\text{س} - \text{س}^{٢}$

∵ مجال الدالة د = ح والمنحنى ليس متماثلاً حول محور الصادات وليس متماثلاً حول نقطة الأصل.

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

التحقق الجبري : لكل س ، − س ∈ ح

$$\text{د}(-\text{س}) = ٢(-\text{س}) - (-\text{س})^{٢} = -٢\,\text{س} - \text{س}^{٢} = -(٢\,\text{س} + \text{س}^{٢})$$

∴ $\text{د}(-\text{س}) \neq \text{د}(\text{س})$ ، $\text{د}(-\text{س}) \neq -\text{د}(\text{س})$

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

مثال ٥

ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

١ $\text{د}(\text{س}) = ٣\,\text{س}^{٤} - ٥\,\text{س}^{٢} + ١$

٢ $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + ٢\,\text{س} - ٥$

٣ $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} - \text{جا}\,٣\,\text{س}}{١ + \text{س}^{٢}}$

٤ $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} - \text{طا}\,\text{س}}{\text{س}^{٢} + \text{س}}$

الحل

١ ∵ $\text{د}(-\text{س}) = ٣(-\text{س})^{٤} - ٥(-\text{س})^{٢} + ١ = ٣\,\text{س}^{٤} - ٥\,\text{س}^{٢} + ١ = \text{د}(\text{س})$

∴ الدالة د زوجية.

٢ ∵ $\text{د}(-\text{س}) = (-\text{س})^{٣} + ٢(-\text{س}) - ٥ = -\text{س}^{٣} - ٢\,\text{س} - ٥ = -(\text{س}^{٣} + ٢\,\text{س} + ٥)$

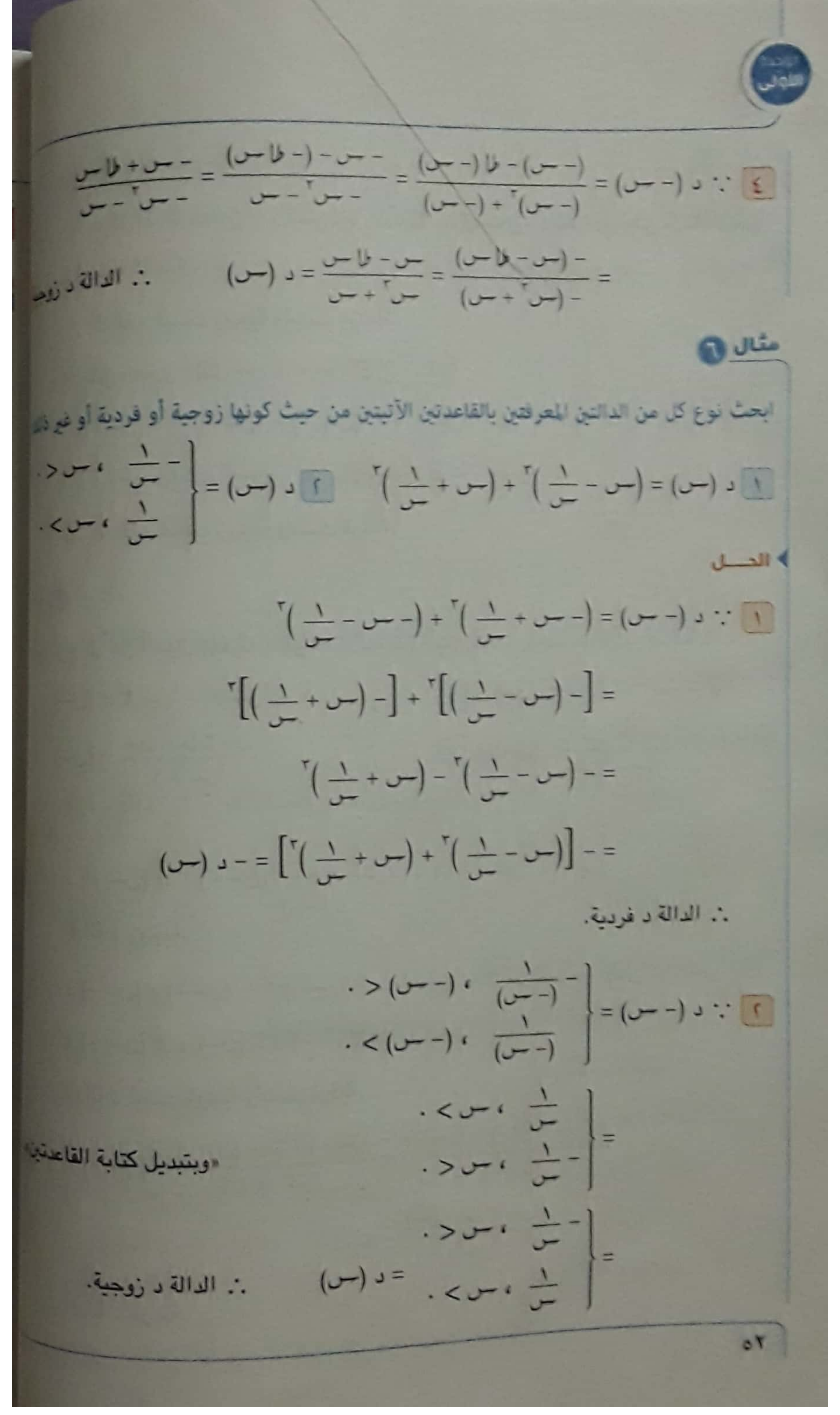
∴ $\text{د}(-\text{س}) \neq \text{د}(\text{س})$ ، $\text{د}(-\text{س}) \neq -\text{د}(\text{س})$

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

٣ ∵ $\text{د}(-\text{س}) = \dfrac{(-\text{س}) - \text{جا}\,٣(-\text{س})}{١ + (-\text{س})^{٢}} = \dfrac{(-\text{س}) - (-\text{جا}\,٣\,\text{س})}{١ + \text{س}^{٢}}$

$$= \dfrac{-(\text{س} - \text{جا}\,٣\,\text{س})}{١ + \text{س}^{٢}} = -\text{د}(\text{س})$$

∴ الدالة د فردية.



٤ $\because \text{د}(-\text{س}) = \dfrac{(-\text{س}) - \text{طا}(-\text{س})}{(-\text{س})^{٣} + (-\text{س})} = \dfrac{-\text{س} - (-\text{طا س})}{-\text{س}^{٣} - \text{س}} = \dfrac{-\text{س} + \text{طا س}}{-\text{س}^{٣} - \text{س}}$

$= \dfrac{-(\text{س} - \text{طا س})}{-(\text{س}^{٣} + \text{س})} = \dfrac{\text{س} - \text{طا س}}{\text{س}^{٣} + \text{س}} = \text{د}(\text{س})$ ∴ الدالة د زوج

مثال ٦

ابحث نوع كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذ

١ $\text{د}(\text{س}) = \left(\text{س} - \dfrac{١}{\text{س}}\right)^{٣} + \left(\text{س} + \dfrac{١}{\text{س}}\right)^{٣}$

٢ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} -\dfrac{١}{\text{س}} &، \text{س} < ٠ \\ \dfrac{١}{\text{س}} &، \text{س} > ٠ \end{cases}$

الحل

١ $\because \text{د}(-\text{س}) = \left(-\text{س} + \dfrac{١}{\text{س}}\right)^{٣} + \left(-\text{س} - \dfrac{١}{\text{س}}\right)^{٣}$

$= \left[-\left(\text{س} - \dfrac{١}{\text{س}}\right)\right]^{٣} + \left[-\left(\text{س} + \dfrac{١}{\text{س}}\right)\right]^{٣}$

$= -\left(\text{س} - \dfrac{١}{\text{س}}\right)^{٣} - \left(\text{س} + \dfrac{١}{\text{س}}\right)^{٣}$

$= -\left[\left(\text{س} - \dfrac{١}{\text{س}}\right)^{٣} + \left(\text{س} + \dfrac{١}{\text{س}}\right)^{٣}\right] = -\text{د}(\text{س})$

∴ الدالة د فردية.

٢ $\because \text{د}(-\text{س}) = \begin{cases} -\dfrac{١}{(-\text{س})} &، (-\text{س}) < ٠ \\ \dfrac{١}{(-\text{س})} &، (-\text{س}) > ٠ \end{cases}$

$= \begin{cases} \dfrac{١}{\text{س}} &، \text{س} > ٠ \\ -\dfrac{١}{\text{س}} &، \text{س} < ٠ \end{cases}$ «وبتبديل كتابة القاعدتين»

$= \begin{cases} -\dfrac{١}{\text{س}} &، \text{س} < ٠ \\ \dfrac{١}{\text{س}} &، \text{س} > ٠ \end{cases} = \text{د}(\text{س})$ ∴ الدالة د زوجية.

الدالة الأحادية

تعريف

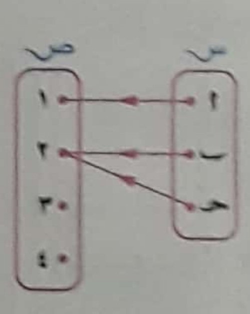
الدالة د : س ← ص تسمى دالة أحادية إذا كان :

لكل أ ، ب ∈ س ، د (أ) = د (ب) فإن : أ = ب

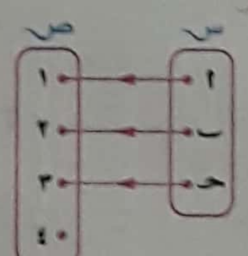
أو : لكل أ ، ب ∈ س ، أ ≠ ب فإن : د (أ) ≠ د (ب)

وهذا يعنى أنه لا يوجد عنصران فى مجال الدالة الأحادية لهما نفس الصورة.


فمثلًا :



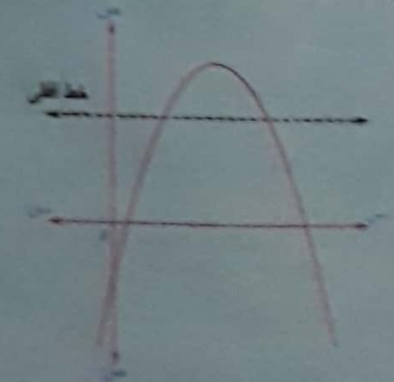
دالة ليست أحادية
من س ← ص



دالة أحادية
من س ← ص

اختبار الخط الأفقى

إذا وجد خط أفقى (يوازى محور السينات) يقطع منحنى الدالة فى أكثر من نقطة فإن المنحنى يمثل دالة ليست أحادية.



الخط الأفقى يقطع المنحنى فى نقطتين لذلك فإن الدالة ليست أحادية

أى خط أفقى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة على الأكثر لذلك فإن الدالة أحادية



مثال ٧

أثبت أن كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية دالة أحادية :

١ د (س) = $س^٢$ + ٢ ٢ د (س) = $\frac{٢س - ٣}{٣س + ٢}$

الحل

١ بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د

∴ د (أ) = $أ^٢$ + ٢ ، د (ب) = $ب^٢$ + ٢ وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ $أ^٢$ + ٢ = $ب^٢$ + ٢ ∴ $أ^٢$ = $ب^٢$

∴ أ = ب ∴ الدالة د دالة أحادية.

٢ بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د

∴ د (أ) = $\frac{٢أ - ٣}{٣أ + ٢}$ ، د (ب) = $\frac{٢ب - ٣}{٣ب + ٢}$ وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ $\frac{٢أ - ٣}{٣أ + ٢} = \frac{٢ب - ٣}{٣ب + ٢}$ ∴ (٢أ - ٣) (٣ب + ٢) = (٣أ + ٢) (٢ب - ٣)

∴ ٦أب + ٤أ - ٩ب - ٦ = ٦أب - ٩أ + ٤ب - ٦

∴ ٤أ + ٩أ = ٤ب + ٩ب ∴ ١٣أ = ١٣ب

∴ أ = ب ∴ الدالة د دالة أحادية.

مثال ٨

أثبت أن كلًا من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين ليست أحادية :

١ د (س) = ٣ - $س^٢$ ٢ د (س) = $س^٢$ + س

الحل

١ بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د

∴ د (أ) = ٣ - $أ^٢$ ، د (ب) = ٣ - $ب^٢$ وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ ٣ - أ^{٢} = ٣ - ب^{٢} ∴ أ^{٢} = ب^{٢} ∴ أ = ± ب

∴ أ لها قيمتان هما ب ، - ب

∴ الدالة د ليست أحادية.

٢ بفرض أن أ ، ب ∋ مجال الدالة د

∴ د (أ) = أ^{٢} + أ ، د (ب) = ب^{٢} + ب

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ أ^{٢} + أ = ب^{٢} + ب ∴ أ^{٢} - ب^{٢} + أ - ب = ٠

∴ (أ - ب) (أ + ب) + (أ - ب) = ٠ ∴ (أ - ب) (أ + ب + ١) = ٠

∴ إما أ - ب = ٠ ومنها أ = ب أو أ + ب + ١ = ٠ ومنها أ = - ب - ١

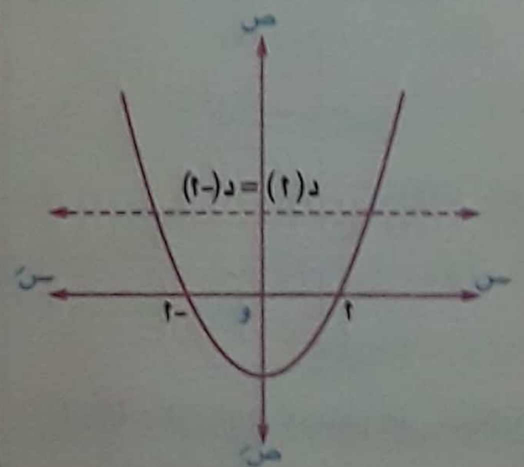
∴ أ لها قيمتان هما ب ، - ب - ١

∴ الدالة د ليست أحادية.

ملاحظة

- الدوال الزوجية بصفة عامة ليست دوال أحادية لأنه لكل قيمتين مختلفتين أ ، - أ ∋ مجال الدالة الزوجية يكون د (- أ) = د (أ)

أى أن القيمتين أ ، - أ للمتغير س يناظرهما قيمة وحيدة للمتغير ص ولذلك فإن الدالة الزوجية ليست دالة أحادية كما يتضح ذلك باستخدام اختبار الخط الأفقى كما فى الشكل المقابل.



- الدالة الفردية قد تكون أحادية أو غير أحادية.

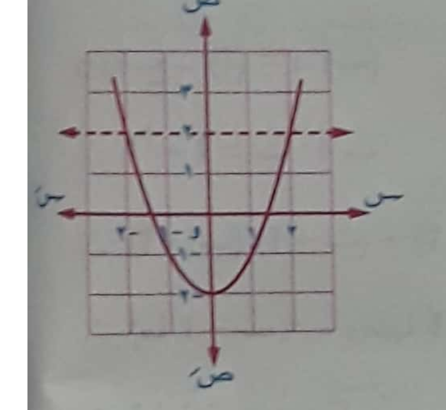


مثال ٩

مثل بيانيًا منحنى دالة زوجية يمر بالنقط : (٠ ، −٢) ، (−١ ، −١) ، (−٢ ، ٢)

ومن الرسم : بيِّن أن الدالة ليست أحادية.

الحــل



∵ الدالة زوجية ∴ د (س) = د (− س)

∴ د (١) = د (−١) = −١ ، د (٢) = د (−٢) = ٢

أى أن منحنى الدالة يمر أيضًا بالنقطتين :

(١ ، −١) ، (٢ ، ٢)

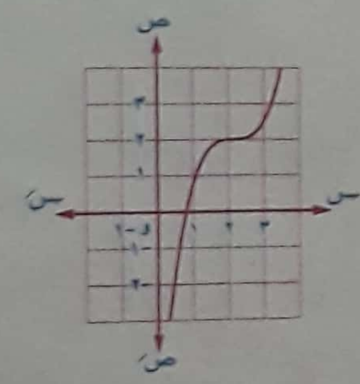
من الرسم :

الدالة ليست أحادية لأنه يوجد خط أفقى يقطع منحنى الدالة فى نقطتين.

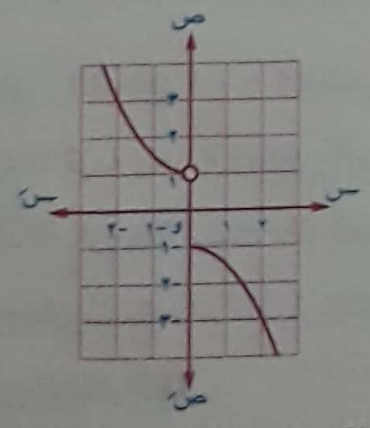
ملاحظــة

إذا كانت الدالة د فى تزايد مستمر أو فى تناقص مستمر لجميع القيم التى تنتمى إلى مجال الدالة فإن الدالة د تكون أحادية.

فمثلًا : فى كل من الشكلين الآتيين :



الدالة د فى تزايد مستمر على مجالها
لذلك د دالة أحادية



الدالة د فى تناقص مستمر على مجالها
لذلك الدالة د دالة أحادية



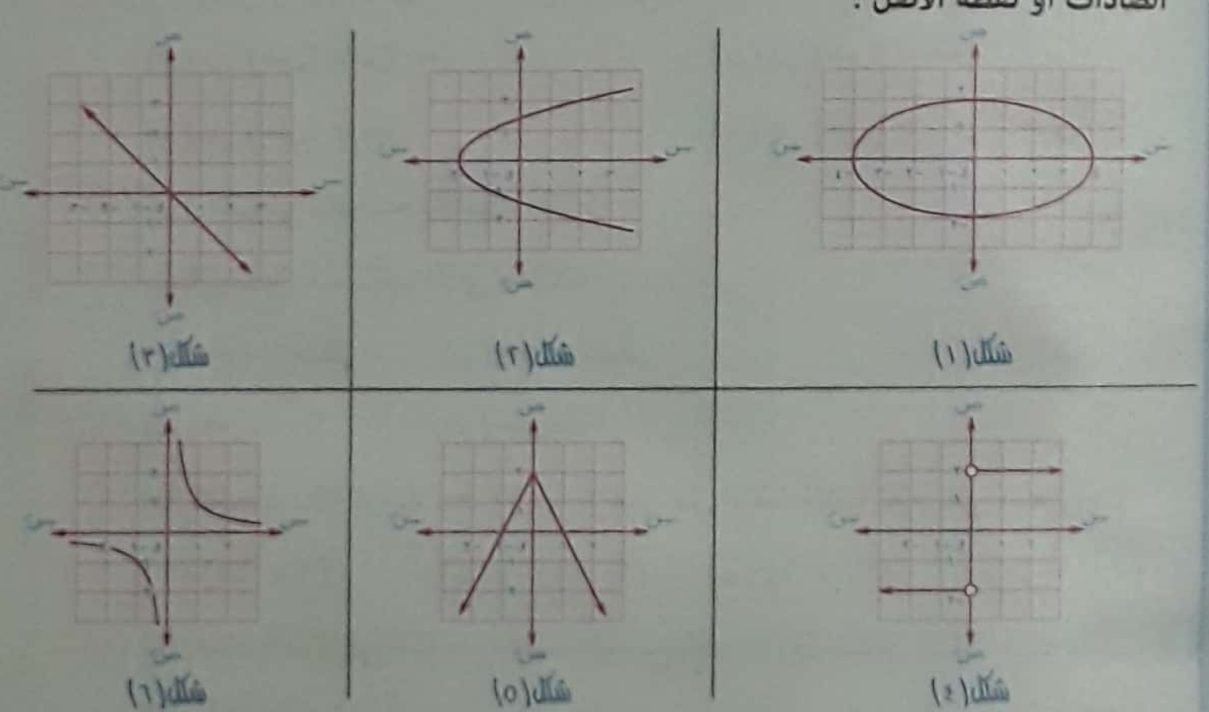


تمارين 3

على بعض خواص الدوال
(الدوال الزوجية و الفردية - الدوال الأحادية)

من أسئلة الكتاب المدرسي

1 في كل من الأشكال الآتية اذكر ما إذا كان تماثل المنحنى حول محور السينات أو محور الصادات أو نقطة الأصل :



2 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الدالة الزوجية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هي ....

(أ) د (س) = $س^٣$ (ب) د (س) = جا س

(جـ) د (س) = س جتا س   (د) د (س) = س جا س

② الدالة الفردية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هي ....

(أ) د (س) = $س^٢$ جا س   (ب) د (س) = $ظا^٢$ س

(جـ) د (س) = جتا س   (د) د (س) = ١

③ إذا كانت د دالة زوجية ، ٢ ∋ مجال د فإن : د (٢) + د (-٢) = ...

(أ) صفر   (ب) ٤   (جـ) ٢   (د) ٢ د (٢)

④ إذا كانت د دالة فردية ، أ ∈ مجال د فإن : د (أ) + د (– أ) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ د (أ) (جـ) ٢ أ (د) د (أ)

⑤ إذا كانت الدالة د دالة زوجية فى الفترة [أ ، ب] فإن : ب = ...

(أ) أ (ب) – أ (جـ) ٢ أ (د) $أ^٢$

⑥ الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) $د_١$ (س) = جا س (ب) $د_٢$ (س) = $س^٢$

(جـ) $د_٣$ (س) = $س^٣$ (د) $د_٤$ (س) = $س^٤$ + $س^٢$

⑦ المنحنى الموضح بالشكل المقابل

متماثل حول المستقيم الذى معادلته ....

(أ) س = صفر (ب) ص = صفر

(جـ) ص = –٢ (د) س = ٢

⑧ إذا كانت د دالة فردية ، د (١) = ٢ فأى من النقط الآتية تقع على منحنى د ؟

(أ) (–١ ، ٢) (ب) (–١ ، –٢) (جـ) (١ ، –٢) (د) (–١ ، ٠)

⑨ إذا كانت الدالة فى تناقص مستمر لجميع قيم س ∈ مجال الدالة

فإن الدالة تكون ....

(أ) زوجية. (ب) فردية. (جـ) أحادية. (د) ليست أحادية.

⑩ إذا كانت : د (س) = $س^٢$ + أ س + ٩ دالة زوجية فإن : أ = ...

(أ) ٦ (ب) ٣ (جـ) صفر (د) –٦

⑪ إذا كانت : د (س) = أ $س^٣$ + ب دالة فردية وكان منحنى الدالة يمر بالنقطة (٢ ، ٨)

فإن : أ + $ب^٢$ = ...

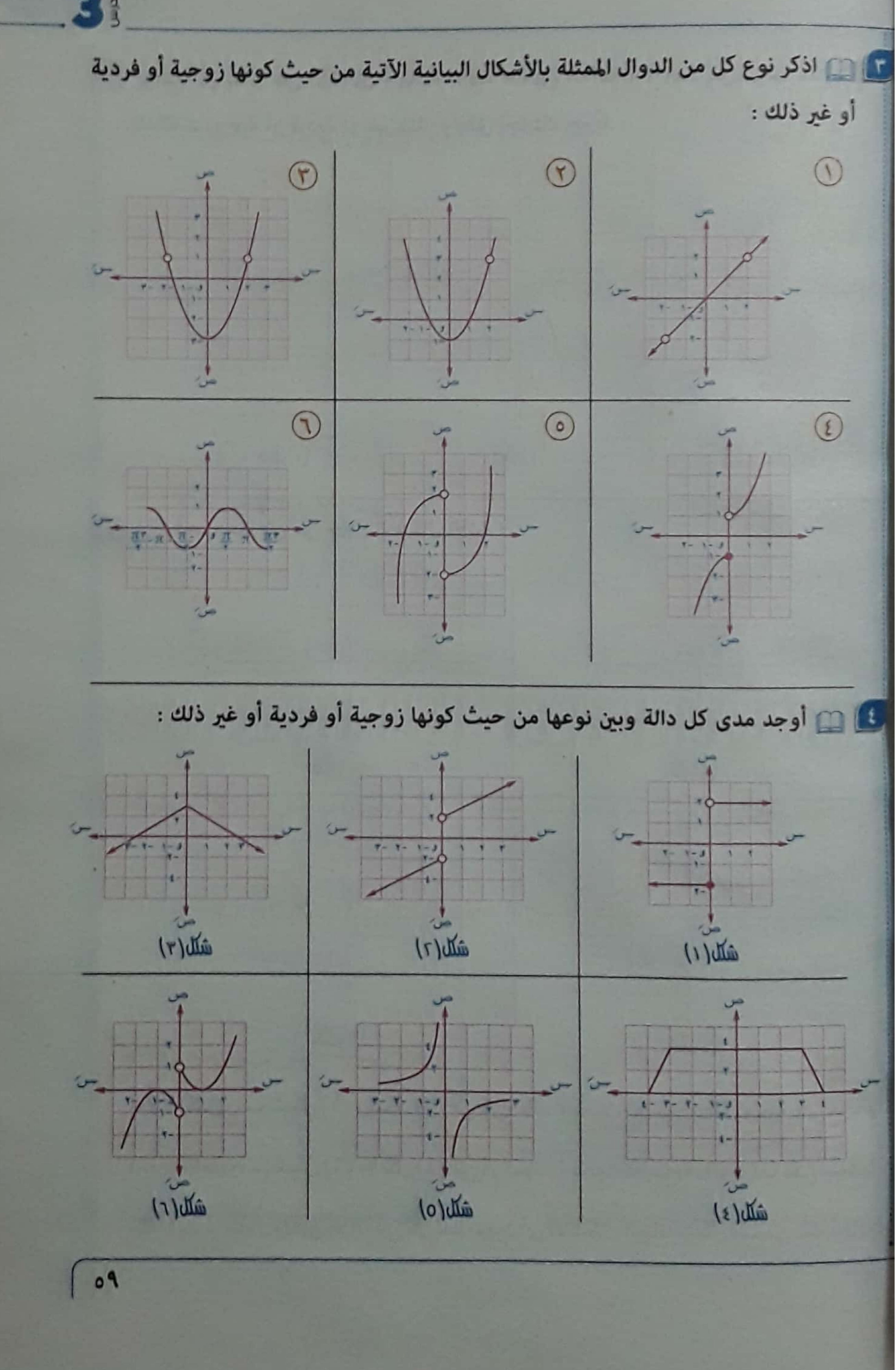
(أ) صفر (ب) –١ (جـ) ١ (د) ٥

⑫ إذا كان د ، ر دالتين حيث : د (س) = $س^٣$ ، ر (س) = س + ٢

فإن : (ر ∘ د) هى دالة ....

(أ) أحادية. (ب) فردية. (جـ) زوجية. (د) خطية.

٣ اذكر نوع كل من الدوال الممثلة بالأشكال البيانية الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :



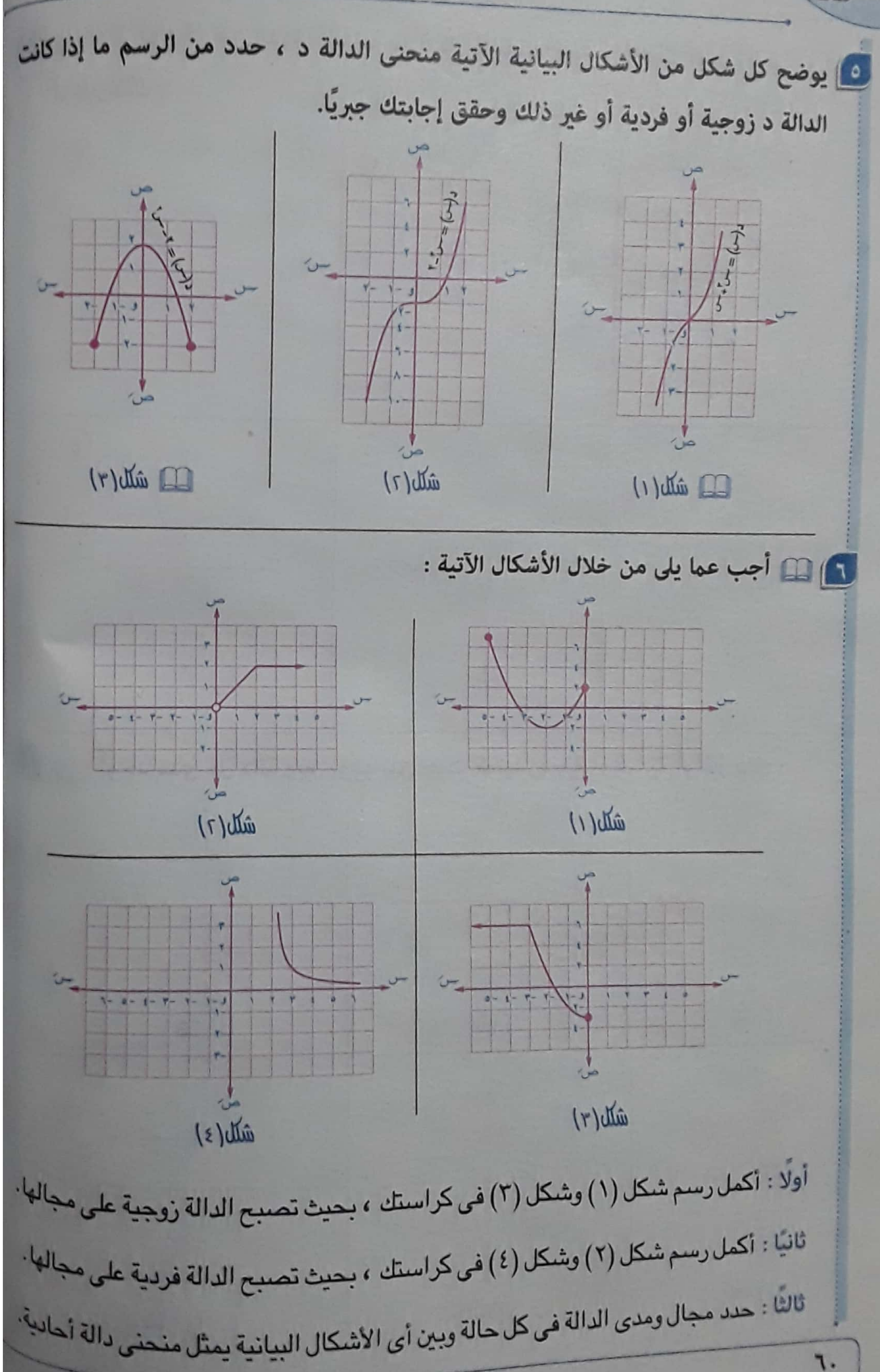
٤ أوجد مدى كل دالة وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

شكل (١) شكل (٢) شكل (٣)

شكل (٤) شكل (٥) شكل (٦)

٥ يوضح كل شكل من الأشكال البيانية الآتية منحنى الدالة د ، حدد من الرسم ما إذا كانت الدالة د زوجية أو فردية أو غير ذلك وحقق إجابتك جبريًا.

٦ أجب عما يلى من خلال الأشكال الآتية :



أولًا : أكمل رسم شكل (١) وشكل (٣) فى كراستك ، بحيث تصبح الدالة زوجية على مجالها.

ثانيًا : أكمل رسم شكل (٢) وشكل (٤) فى كراستك ، بحيث تصبح الدالة فردية على مجالها.

ثالثًا : حدد مجال ومدى الدالة فى كل حالة وبين أى الأشكال البيانية يمثل منحنى دالة أحادية.

٧ ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

① د (س) = ٥

② د (س) = س^{٤} + س^{٢} − ١

③ د (س) = ٣ س − ٤ س^{٣}

④ د (س) = س^{٢} − ٣ س + ٤

⑤ د (س) = س^{٣} (س^{٢} − ١)

⑥ د (س) = (س − ٣)^{٢} − ٧

⑦ د (س) = (س^{٢} + ٢) / (س − ٣)

⑧ د (س) = (٢ س^{٣} − س^{٥}) / س

⑨ د (س) = س^{٢} / (١ + س)

⑩ د (س) = √(س + ٣)

⑪ د (س) = (س^{٢} + ١)^{٣}

⑫ د (س) = √(س^{٢} + ٦)

⑬ د (س) = ∛(س^{٣} + س)

⑭ د (س) = س^{٢} − ١ / س

⑮ د (س) = (س − ٢ / س)^{٣}

⑯ د (س) = (س^{٢} / ٣ − ٥ / س^{٤})^{٥}

⑰ د (س) = ((٢ − س) / (٢ + س))^{٢} + ((٢ + س) / (٢ − س))^{٢}

⑱ د (س) = ((١ − س) / (١ + س))^{٢} − ((١ + س) / (١ − س))^{٢}

⑲ د (س) = ((س − ١) / (س + ١))^{٥} + ((س + ١) / (س − ١))^{٥}

⑳ د (س) = (س^{٣} + ١)^{٤} − (س^{٣} − ١)^{٤}

(٢١) د (س) = س جتا س

(٢٢) د (س) = ٣ س / طا س

(٢٣) د (س) = س^{٢} جا ٣ س / (١ + س^{٤})

(٢٤) د (س) = (٣ س^{٢} − جتا س) / (س^{٣} − ٦ س)

(٢٥) د (س) = س^{٢} جا^{٣} س

(٢٦) د (س) = س جا س^{٣}

(٢٧) د (س) = (س^{٢} + طا س) / (س^{٤} + جا س)

(٢٨) د (س) = جا س^{٢} − جا^{٢} س

(٢٩) د (س) = س^{٤} + جا^{٦} س

(٣٠) د (س) = س^{٧} + طا^{٥} س

(٣١) د (س) = $\frac{\text{حا ٢ س حتا ٢ س}}{\text{قا س}}$

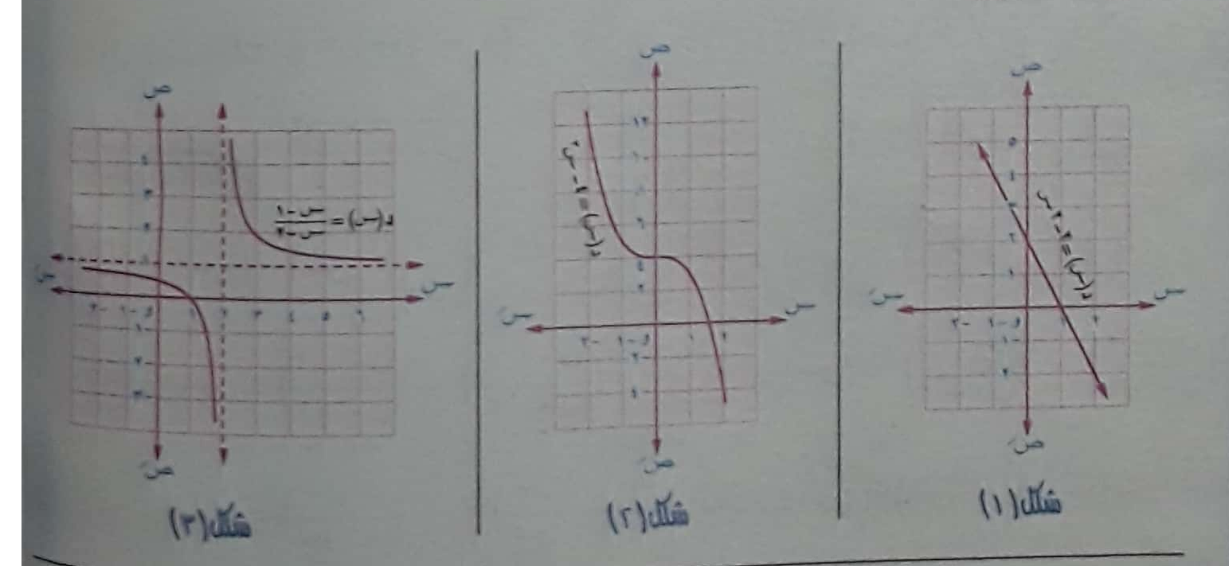
(٣٢) د (س) = ٤^س + حتا س + ٢^{-٢}س

(٣٣) د (س) = (حتا س + حا س − ١) (حتا س + حا س + ١)

(٣٤) د (س) = { ٢ س ، س ≤ ٠ ؛ −٢ س ، س < ٠

(٣٥) د (س) = { ٢ س + س^٢ ، س ≤ ٠ ؛ ٢ س − س^٢ ، س > ٠

٨ يوضح كل شكل من الأشكال البيانية الآتية منحنى الدالة د ، بين من الرسم أن الدالة د أحادية وحقق ذلك جبريًا.



٩ أثبت أن الدوال المعرفة بالقواعد الآتية دوال أحادية :

(١) د (س) = ٢ س − ٣

(٢) د (س) = ٤ − س^٣

(٣) د (س) = $\frac{٣}{\text{٢ س + ٥}}$

(٤) د (س) = $\frac{\text{٣ س − ٥}}{\text{٤ س + ٣}}$

١٠ أثبت أن الدوال المعرفة بالقواعد الآتية دوال ليست أحادية :

(١) د (س) = ٣

(٢) د (س) = (س + ٣)^٢

(٣) د (س) = س^٢ − ٥ س + ٦

(٤) د (س) = $\frac{١}{\text{س}^٢ − ٤}$

١١ في كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية حدد ما إذا كانت الدالة أحادية أم لا مع توضيح السبب :

① د (س) = س^{٣} + ١ ② د (س) = س^{٢} − ١

③ د (س) = ٢ س^{٢} − س − ٣ ④ د (س) = س^{٤} + ٢ س^{٢} + ١

⑤ د (س) = $\frac{\text{٢ س + ١}}{\text{س − ٢}}$ ⑥ د (س) = $\frac{\text{٣ − س}}{\text{س + ٢}}$

---

١٢ اذكر نوع كل من الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

① د : ح ⟵ ح ، د (س) = س + ٢

② د : [−٣ ، ٣] ⟵ ح ، د (س) = ٣ س^{٢}

③ د : ح$^{+}$ ⟵ ح حيث د (س) = س^{٢}

④ د (س) = س^{٢} حيث س ∈ ح − {٣}

---

١٣ إذا كانت د دالة مجالها ح أوجد قيمة : $\frac{\text{٧ د (−٥) + ٣ د (٥)}}{\text{٢ د (−٥)}}$ إذا كان :

① د دالة فردية. ② د دالة زوجية. «٢٠ ، ٥»

---

١٤ إذا كانت د ، ر دالتين حقيقيتين حيث د (س) = (١ − س)^{٢} ، ر (س) = (١ + س)^{٢}

فبين أى الدوال الآتية زوجية وأيها فردية وأيها غير ذلك :

① د + ر ② د − ر ③ د . ر ④ $\frac{\text{د}}{\text{ر}}$

---

١٥ إذا كانت د$_{١}$ ، د$_{٢}$ ، ر$_{١}$ ، ر$_{٢}$ دوال حقيقية حيث د$_{١}$ (س) = س^{٤}

، د$_{٢}$ (س) = جتا^{٥} س ، ر$_{١}$ (س) = ٢ س^{٣} ، ر$_{٢}$ (س) = جا^{٢} س

فبين أى الدوال الآتية زوجية وأيها فردية وأيها غير ذلك :

① د$_{١}$ + ر$_{٢}$ ② د$_{١}$ − د$_{٢}$ ③ ر$_{١}$ + ر$_{٢}$

④ د$_{١}$. ر$_{٢}$ ⑤ ر$_{١}$. ر$_{٢}$ ⑥ $\frac{\text{د}_{٢}}{\text{د}_{١}}$

١٦ مثل بيانيًا منحنى يحقق الشروط الآتية :

① يمر بالنقط (٠ ، −٢) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٧) ويمثل دالة زوجية.

② يمر بالنقط (٠ ، ٠) ، (−٢ ، ١) ، (−٣ ، ٥) ويمثل دالة فردية.

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

١٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت د دالة أحادية وكانت النقطة (٢ ، ٣) تنتمى لبيان الدالة د

فأى النقط الآتية يمكن أن تنتمى لبيان د ؟

(أ) (٥ ، ٣) (ب) (٢ ، −١) (جـ) (٣ ، ٢) (د) كل ما سبق.

② إذا كانت د دالة أحادية وكانت النقطتان (٢ ، ٩) ، (٣ ، ب) تنتميان للدالة د

فأى مما يأتى صحيح دائمًا ؟

(أ) ٩ > ب (ب) ٩ = ب (جـ) ٩ ≠ ب (د) ٩ + ب = ٥

③ إذا كانت د (س) دالة زوجية وكان د (س) + س^{٢} د (−س) = ٣

فإن : د (١) = ...

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) ١ (جـ) ١ $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

④ إذا كانت د دالة فردية وكان د (١) = ك وكانت د (س + ٢) = د (س) + د (٢) فإن :

د (٣) = ...

(أ) صفر (ب) ٣ ك (جـ) ٦ ك (د) ٩ ك

⑤ إذا كانت : د (س) = $\frac{١ + س}{١ - س}$ وكانت ر (س) = $\frac{١ - س}{١ + س}$ فإن كل من مجموع

الدالتين وحاصل ضربهما يكون دالة ....

(أ) زوجية. (ب) فردية.

(جـ) أحادية. (د) ليست زوجية وليست فردية.

⑥ إذا كانت د دالة حقيقية وكانت س ، − س ∋ مجال الدالة

فإن الدالة ر (س) = د (س) + د (− س) تكون دائمًا ....

(أ) فردية. (ب) زوجية.

(جـ) ليست زوجية وليست فردية. (د) أحادية.

⑦ إذا كانت : د معرفة على ح وكانت ٣ د (س) + ٢ د (− س) = $س^٣$ − حا س

فإن : د (س) تكون ....

(أ) فردية. (ب) زوجية.

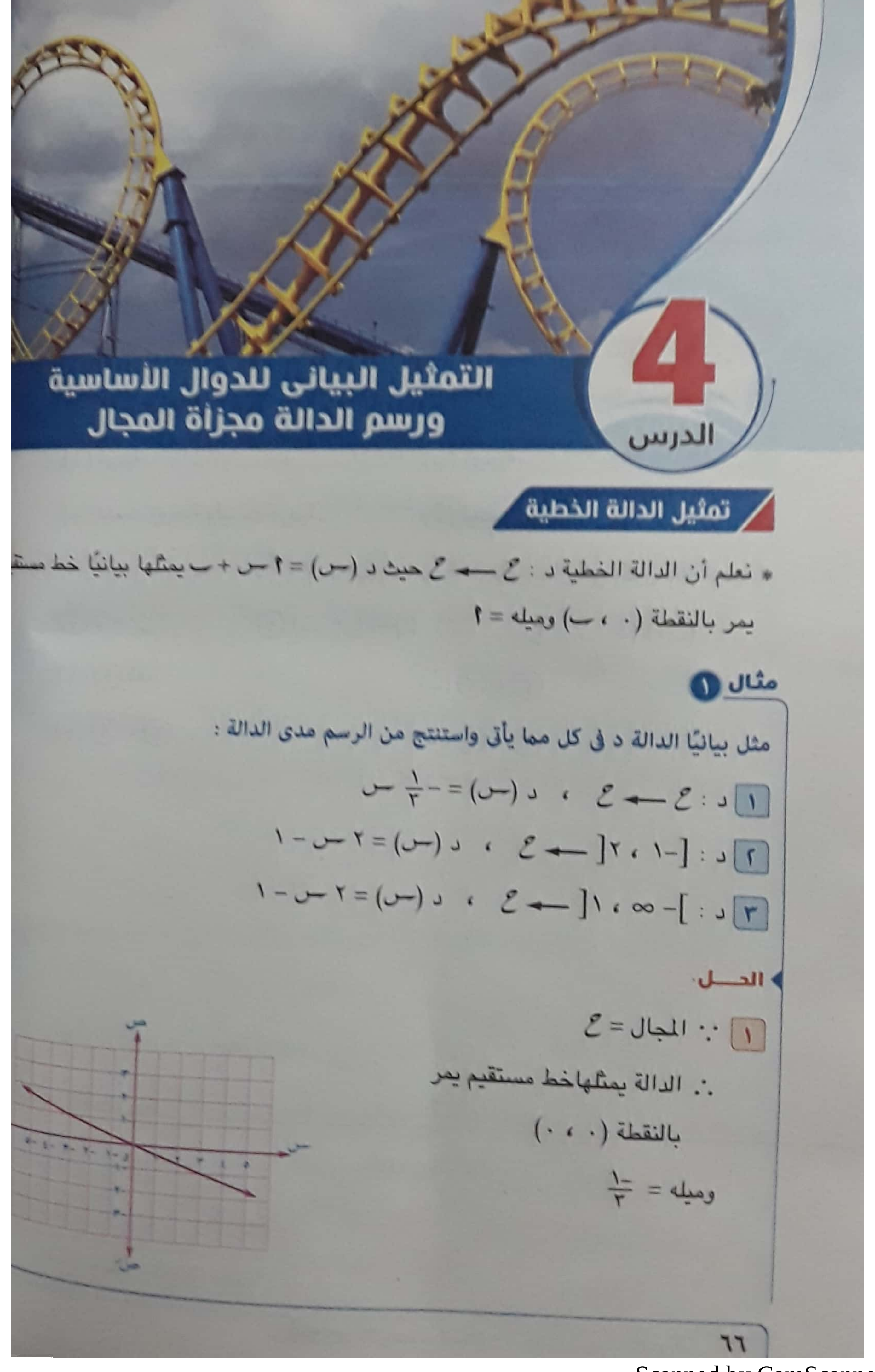
(جـ) ليست زوجية وليست فردية. (د) ليست أحادية.

⑧ إذا كانت : د (س) = $س^٣$ ، ر (س) = $س^٢$ + ١ فأى مما يأتى يكون دالة فردية ؟

① د × ر ② (د ∘ ر) (س) ③ (ر ∘ د) (س)

(أ) ① فقط. (ب) ② ، ③

(جـ) ① ، ② (د) ① ، ③



الدرس 4

التمثيل البيانى للدوال الأساسية ورسم الدالة مجزأة المجال

تمثيل الدالة الخطية

* نعلم أن الدالة الخطية د : ح ⟵ ح حيث د (س) = أ س + ب يمثلها بيانيًا خط مستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ب) وميله = أ

مثال ١

مثل بيانيًا الدالة د فى كل مما يأتى واستنتج من الرسم مدى الدالة :

١ د : ح ⟵ ح ، د (س) = $-\frac{١}{٢}$ س

٢ د : [-١ ، ٢] ⟵ ح ، د (س) = ٢ س - ١

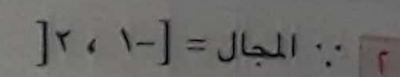
٣ د :]- ∞ ، ١] ⟵ ح ، د (س) = ٢ س - ١

الحــل

١ ∵ المجال = ح

∴ الدالة يمثلهاخط مستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ٠)

وميله = $\frac{-١}{٢}$


٢ ∵ المجال = [-١ ، ٢[

س	-١	٠	②
د (س)	-٣	-١	③

لاحظ أن : النقطة (٢ ، ٣) ∉ بيان الدالة لذلك استبعدنا هذه النقطة من الشكل البيانى بوضع دائرة مفرغة عندها.

، من الرسم : المدى = [-٣ ، ٣[

٣ ∵ المجال =]-∞ ، ١[

س	①	٠	-١
د (س)	①	-١	-٣

لاحظ أن : النقطة (١ ، ١) ∉ بيان الدالة لذلك استبعدناها من الشعاع الممثل للدالة بوضع دائرة مفرغة عندها.

من الرسم : المدى =]-∞ ، ١[

مثال ٢

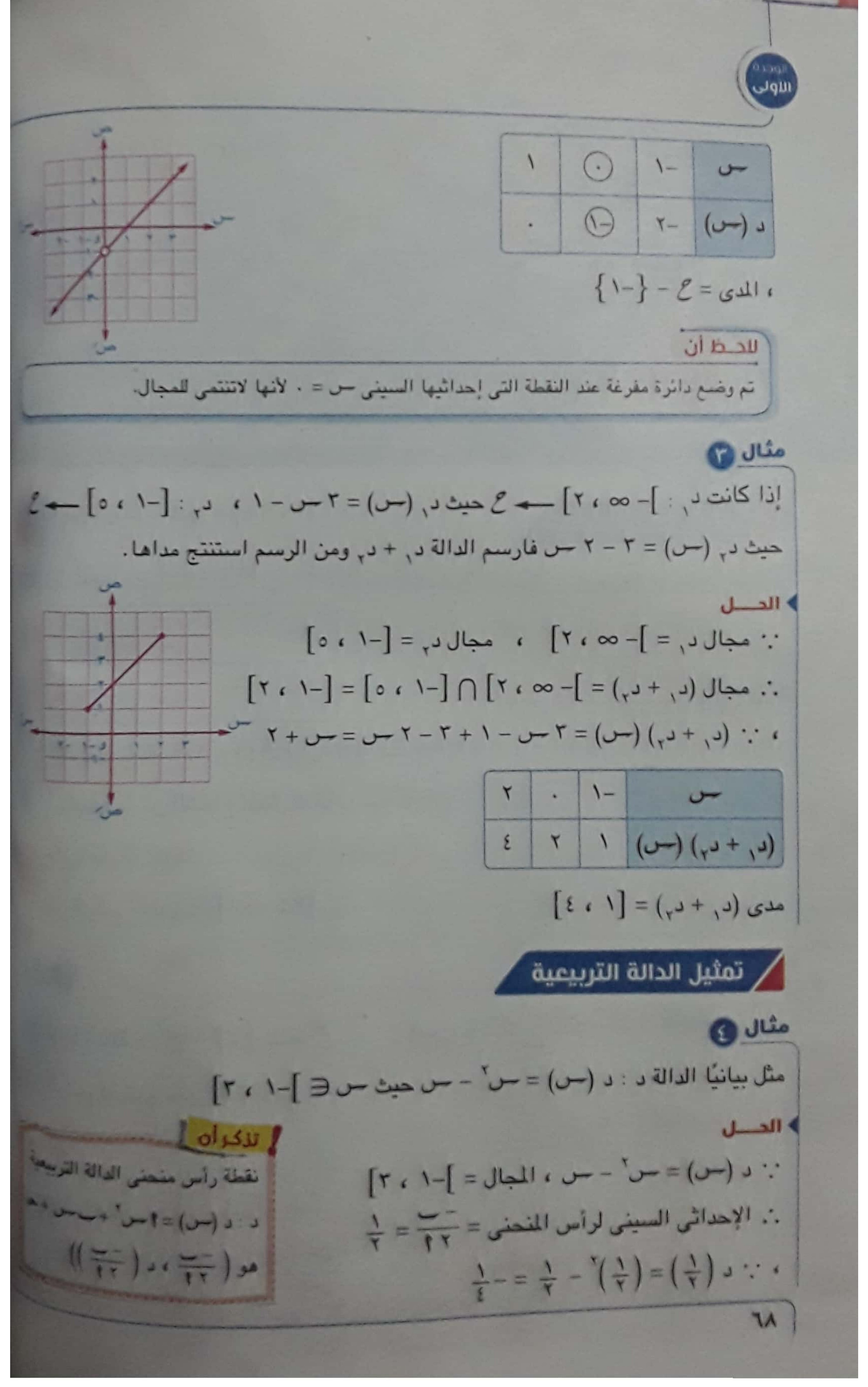
مثل بيانيًا الدالة د : ح - {٠} ⟵ ح ، د (س) = $\frac{س^٢ - س}{س}$

ومن الرسم استنتج مدى الدالة.

الحل

∵ مجال الدالة د = ح - {٠}

، د (س) = $\frac{س^٢ - س}{س} = \frac{س (س - ١)}{س}$ = س - ١ يمثلها خط مستقيم



س	-١	٠	١
د (س)	-٢	-١	٠

، المدى = ح − {−١}

لاحظ أن

تم وضع دائرة مفرغة عند النقطة التي إحداثيها السيني س = ٠ لأنها لاتنتمي للمجال.

مثال ٣

إذا كانت $د_١$: $]-\infty ، ٢]$ ⟵ ح حيث $د_١$ (س) = ٣ س − ١ ، $د_٢$: $[-١ ، ٥]$ ⟵ ح حيث $د_٢$ (س) = ٣ − ٢ س فارسم الدالة $د_١ + د_٢$ ومن الرسم استنتج مداها.

الحل

∵ مجال $د_١$ = $]-\infty ، ٢]$ ، مجال $د_٢$ = $[-١ ، ٥]$

∴ مجال $(د_١ + د_٢)$ = $]-\infty ، ٢] \cap [-١ ، ٥] = [-١ ، ٢]$

، ∵ $(د_١ + د_٢)$ (س) = ٣ س − ١ + ٣ − ٢ س = س + ٢

س	-١	٠	٢
$(د_١ + د_٢)$ (س)	١	٢	٤

مدى $(د_١ + د_٢)$ = $[١ ، ٤]$

تمثيل الدالة التربيعية

مثال ٤

مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = $س^٢$ − س حيث س ∈ $]-١ ، ٣[$

الحل

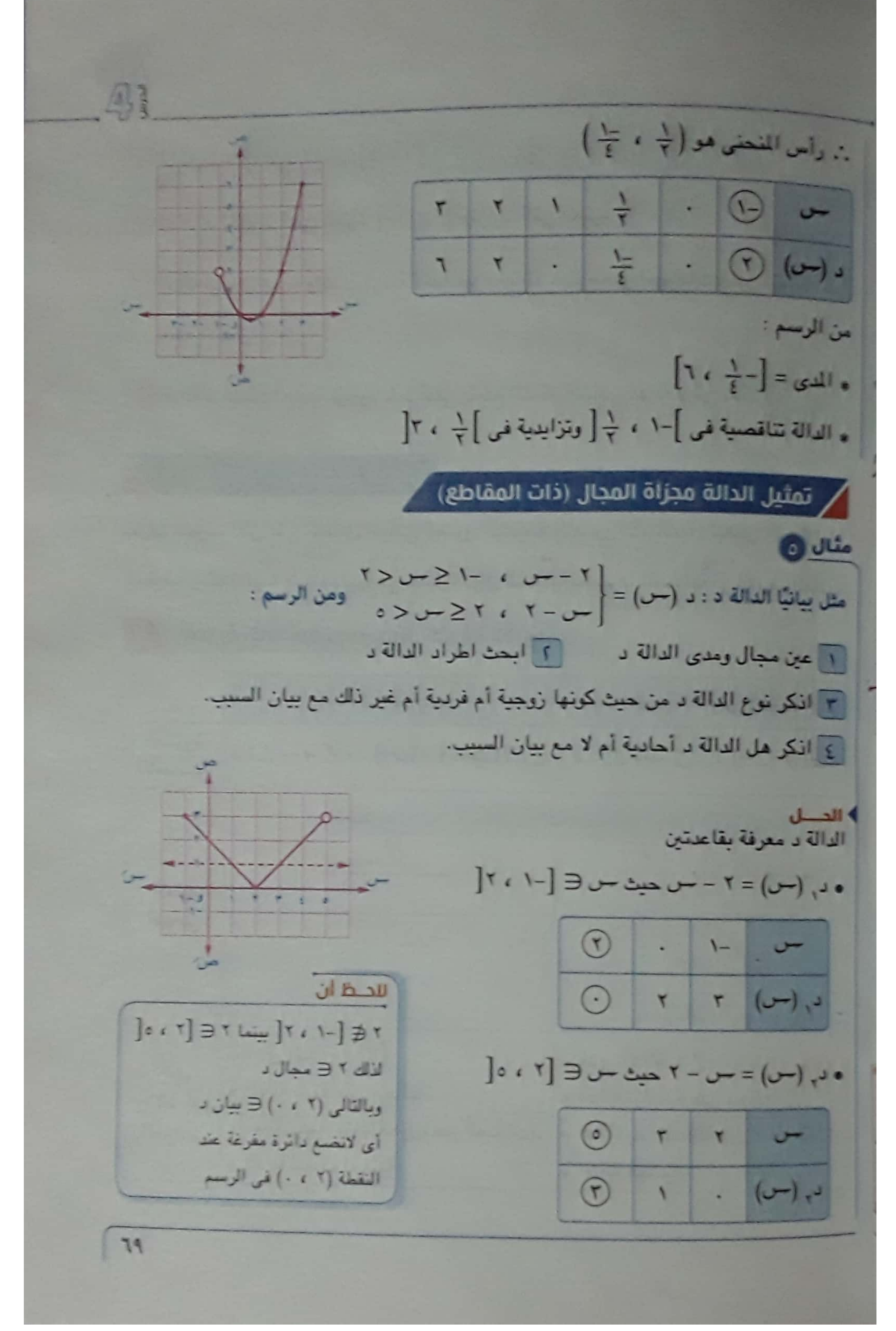
∵ د (س) = $س^٢$ − س ، المجال = $]-١ ، ٣[$

∴ الإحداثي السيني لرأس المنحنى = $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{١}{٢}$

، ∵ د $\left(\frac{١}{٢}\right) = \left(\frac{١}{٢}\right)^٢ - \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٤}$

تذكر أن

نقطة رأس منحنى الدالة التربيعية د : د (س) = أ $س^٢$ + ب س + جـ هو $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$



∴ رأس المنحنى هو (١/٢ ، -١/٤)

س	(-١)	٠	١/٢	١	٢	٣
د (س)	(٢)	٠	-١/٤	٠	٢	٦

من الرسم :

• المدى = [-١/٤ ، ٦]

• الدالة تناقصية فى]-١ ، ١/٢[وتزايدية فى]١/٢ ، ٣[

تمثيل الدالة مجزأة المجال (ذات المقاطع)

مثال ٥

مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = { ٢ - س ، -١ ≤ س < ٢ ؛ س - ٢ ، ٢ ≤ س < ٥ } ومن الرسم :

١ عين مجال ومدى الدالة د ٢ ابحث اطراد الدالة د

٣ اذكر نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك مع بيان السبب.

٤ اذكر هل الدالة د أحادية أم لا مع بيان السبب.

الحل

الدالة د معرفة بقاعدتين

• $د_1$ (س) = ٢ - س حيث س ∈ [-١ ، ٢[

س	-١	٠	(٢)
$د_1$ (س)	٣	٢	(٠)

• $د_2$ (س) = س - ٢ حيث س ∈ [٢ ، ٥[

س	٢	٣	(٥)
$د_2$ (س)	٠	١	(٣)

لاحظ أن

٢ ∉ [-١ ، ٢[بينما ٢ ∈ [٢ ، ٥[

لذلك ٢ ∈ مجال د

وبالتالى (٢ ، ٠) ∈ بيان د

أى لانضع دائرة مفرغة عند النقطة (٢ ، ٠) فى الرسم



١ مجال د = [−١ ، ٢[∪]٢ ، ٥] = [−١ ، ٥] ، مدى د = [٠ ، ٣]

٢ الدالة د تناقصية فى الفترة]−١ ، ٢[وتزايدية فى الفترة]٢ ، ٥[

٣ الدالة ليست زوجية وليست فردية لأنها غير متماثلة حول محور الصادات وغير متماثلة حول نقطة الأصل

٤ الدالة د ليست أحادية لوجود خط أفقى يقطع الشكل البيانى للدالة د فى نقطتين.

الصور الأساسية لبعض الدوال

سوف نتعرف الآن على التمثيل البيانى للصور البسيطة (الصور الأساسية) لبعض الدوال الحقيقية وذلك تمهيدًا لاستخدامها فى تمثيل الدوال الحقيقية بصورها المختلفة فى الدرس القادم.

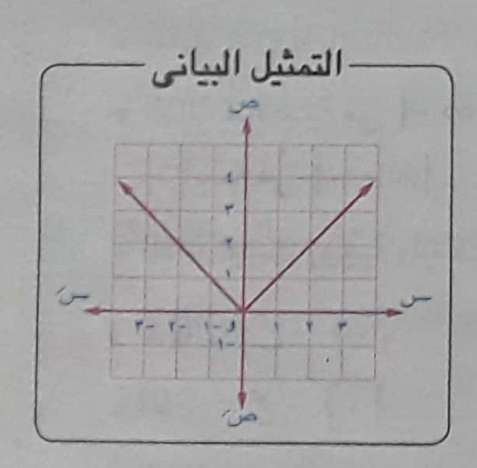
١ الصورة الأساسية لبعض دوال كثيرات الحدود

	الدالــة الثابتــة	دالة الدرجة الأولى (الخطية)
الصورة الأساسية	د : ح ⟵ ح ، د (س) = أ حيث أ ∈ ح	د : ح ⟵ ح ، د (س) = س
التمثيل البيانى	ص، س، د(س) = أ، (٠، أ)	ص، س
المدى والاطراد والخواص	* مدى الدالة = {أ} * الدالة ثابتة على مجالها. * الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات). * الدالة ليست أحادية.	* مدى الدالة = ح * الدالة تزايدية على مجالها ح * الدالة فردية (متماثلة حول نقطة الأصل). * الدالة أحادية.

	دالة الدرجة الثانية (التربيعية)	دالة الدرجة الثالثة (التكعيبية)
الصورة الأساسية	د : ح ⟵ ح ، د (س) = $س^{٢}$	د : ح ⟵ ح ، د (س) = $س^{٣}$
التمثيل البياني		
المدى والاطراد والخواص	* مدى الدالة = [٠ ، ∞[* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠[، وتزايدية فى]٠ ، ∞[* الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات). * الدالة ليست أحادية.	* مدى الدالة = ح * الدالة تزايدية على مجالها ح * الدالة فردية (متماثلة حول نقطة الأصل). * الدالة أحادية.

٢ الصورة الأساسية لدالة المقياس (دالة القيمة المطلقة)

التمثيل البياني



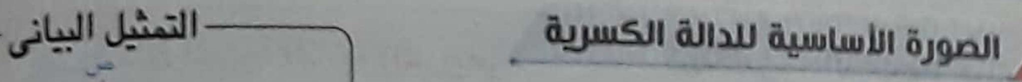
* الصورة الأساسية :

د : ح ⟵ ح ، د (س) = |س|

ويعاد تعريفها كالتالى : د (س) = { س ، س ≥ ٠ ؛ −س ، س < ٠

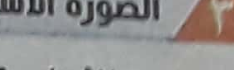
* المدى والاطراد والخواص :

* مدى الدالة = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠[وتزايدية فى]٠ ، ∞[
* الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات).
* الدالة ليست أحادية.

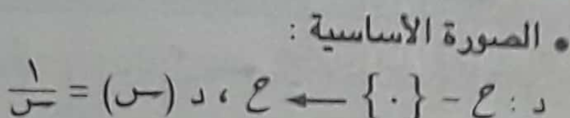


٣ الصورة الأساسية للدالة الكسرية

التمثيل البيانى



• الصورة الأساسية :



د : ح - {٠} ⟵ ح ، د (س) = $\frac{١}{س}$

نظرًا لاقتراب كل من جزئى المنحنى من المحورين دون أن يقطعهما يقال إن المحورين $\overleftrightarrow{س س}$ ، $\overleftrightarrow{ص ص}$ هما خطا التقارب للمنحنى.

• المدى والاطراد والخواص :

* مدى الدالة = ح - {٠}

* الدالة تناقصية فى]- ∞ ، ٠[وتناقصية أيضًا فى]٠ ، ∞[

* الدالة فردية (متماثلة حول نقطة الأصل) * الدالة أحادية.

مثال ٦

مثل بيانيًا كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد مجال ومدى الدالة واستنتج اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

١ د (س) = { $\frac{١}{س}$ ، س < ٠ ؛ |س| ، س ≥ ٠ }

٢ د (س) = { $س^٢$ ، س < ٠ ؛ س ، س > ٠ }

الحـــل

١ * المجال = ح

* المدى = ح

* الدالة تناقصية فى]- ∞ ، ٠[

وتزايدية فى]٠ ، ∞[

* الدالة ليست زوجية وليست فردية.

٢ * المجال = ح - {٠}

* المدى = ح - {٠}



* الدالة تزايدية على مجالها

* الدالة ليست زوجية وليست فردية.







على التمثيل البياني للدوال الأساسية ورسم الدالة مجزأة المجال

من أسئلة الكتاب المدرسي

١ **مثل كلاً من الدوال الآتية بيانيًا ، وعين مداها :**

(١) د : {-٣ ، -١ ، ١ ، ٢} ⟵ [-٣ ، ٧] ، د (س) = ٢ س + ٣

(٢) د : [١ ، ٥[⟵ ح ، د (س) = س + ١

(٣) ر :]-∞ ، -١[⟵ ح ، ر (س) = ١ - س

(٤) د (س) = -٣ س + ٧ لكل س ∈ ح

(٥) د : ح⁻ ⟵ ح ، د (س) = س^{٢}

(٦) د (س) = س^{٢} - ٥ ، س ≥ ٠

(٧) د (س) = س^{٢} - ٣ س ، س ∈ [-٣ ، ٢]

---

٢ إذا كانت د : [-٢ ، ٦] ⟵ ح

، د (س) = { ٤ - س عندما -٢ ≤ س < ١
س عندما ١ ≤ س ≤ ٦

(١) ارسم الشكل البياني للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة وابحث اطرادها.

(٢) هل د دالة أحادية ؟ فسر إجابتك.

---

٣ **مثل بيانيًا كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد مجال ومدى كل دالة وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك وابحث تماثلها :**

(١) د (س) = $\frac{٣ س^{٢} - ٣}{س^{٢} - ١}$

(٢) د (س) = $\frac{٤ - س^{٢}}{س + ٢}$

(٣) د (س) = $\frac{س^{٣} - س}{س^{٢} - ١}$

(٤) د (س) = $\frac{س^{٤} - س^{٢}}{س^{٢} - ١}$

٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = ٥ فإن مجال الدالة د هو ....

(أ) ح　　(ب) $ح^+$　　(جـ) {٥}　　(د) ح - {٥}

② إذا كانت : د (س) = ٧ فإن مدى الدالة د هو ....

(أ) ح　　(ب) $ح^+$　　(جـ) {٧}　　(د) ح - {٧}

③ مدى الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٠ & ، \ س \leq ٠ \\ ١ & ، \ س > ٠ \end{cases}$ هو ....

(أ) {١}　　(ب) {٠}　　(جـ) ح　　(د) {٠ ، ١}

④ مدى الدالة الممثلة بالشكل المقابل هو ....

(أ) {١}　　(ب) {١ ، -١}

(جـ) {-١}　　(د) ح

⑤ الدالة د حيث د (س) = $\begin{cases} ٢ & ، \ س > ٠ \\ -٢ & ، \ س < ٠ \end{cases}$ متماثلة بالنسبة للنقطة ....

(أ) (٢ ، ٠)　　(ب) (-٢ ، ٠)　　(جـ) (٠ ، ٠)　　(د) (٢ ، -٢)

٥ مثل بيانيًا كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد مجال ومدى كل دالة وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك وابحث تماثلها :

① د :]- ∞ ، ٣[⟵ ح حيث د (س) = ٢

② د (س) = $\begin{cases} ٢ & ، \ س \leq ٠ \\ -٣ & ، \ س > ٠ \end{cases}$

③ د (س) = $\begin{cases} ٢ & ، \ س > ١ \\ س - ٢ & ، \ س \leq ١ \end{cases}$

④ د (س) = $\begin{cases} س + ٢ & ، \ س \in [-٢ ، ١] \\ -س + ٤ & ، \ س \in]١ ، ٤] \end{cases}$

⑤ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٤ & \text{، } \text{س} < -٢ \\ \text{س}^٢ & \text{، } \text{س} \ge -٢ \end{cases}$

⑥ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ & \text{، } \text{س} < ٠ \\ \text{س} & \text{، } \text{س} \ge ٠ \end{cases}$

⑦ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٣ & \text{، } \text{س} < ١ \\ ١ & \text{، } \text{س} > ١ \end{cases}$

⑧ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٣ & \text{، } \text{س} < ١ \\ ٢ - \text{س} & \text{، } \text{س} \ge ١ \end{cases}$

⑨ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} |\text{س}| & \text{، } \text{س} \le ٠ \\ \frac{١}{\text{س}} & \text{، } \text{س} > ٠ \end{cases}$

⑩ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} |\text{س}| & \text{، } \text{س} \le ٠ \\ \text{س}^٢ & \text{، } \text{س} > ٠ \end{cases}$

⑪ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٣ & \text{، } \text{س} \le -٣ \\ |\text{س}| & \text{، } -٣ < \text{س} < ٣ \\ ٣ & \text{، } \text{س} \ge ٣ \end{cases}$

⑫ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{٣\text{س} - ٦}{٢ - \text{س}} & \text{، } \text{س} > ٢ \\ ٢ & \text{، } \text{س} < ٢ \end{cases}$

⑬ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٢ & \text{، } -٣ \le \text{س} \le -١ \\ ٠ & \text{، } -١ < \text{س} < ١ \\ ٢ & \text{، } ١ \le \text{س} \le ٣ \end{cases}$

⑭ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} -\text{س} - ١ & \text{، } -٤ \le \text{س} \le -٢ \\ ١ & \text{، } -٢ \le \text{س} \le ٢ \\ \text{س} - ١ & \text{، } ٢ < \text{س} \le ٤ \end{cases}$

٦ إذا كان $د_١$: ح ⟵ ح حيث $د_١$ (س) = ٢ س - ١ ، $د_٢$: [-٢ ، ٢] ⟵ ح حيث $د_٢$ (س) = ٣ - ٢ س فارسم الدالة ($د_١$ + $د_٢$) (س) محددًا مجالها ثم استنتج اطراد الدالة.

٧ إذا كانت د (س) = $س^٢$ - ٤ س ، ر (س) = $س^٢$ - ٤ فعين مجال الدالة $\frac{د}{ر}$ ومثلها بيانيًا ومن الرسم عين مداها وعين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك وابحث اطرادها واذكر هل هي دالة أحادية أم لا.



الدرس **5**

التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال الأساسية

أولًا الإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة

الدالــة الأساسيــة

ص = س^٢ + ٢ ← إزاحة رأسية وحدتين لأعلى ← ص = س^٢ → إزاحة رأسية ٣ وحدات لأسفل → ص = س^٢ − ٣

رأس المنحنى (٠ ، ٢)

رأس المنحنى (٠ ، ٠)

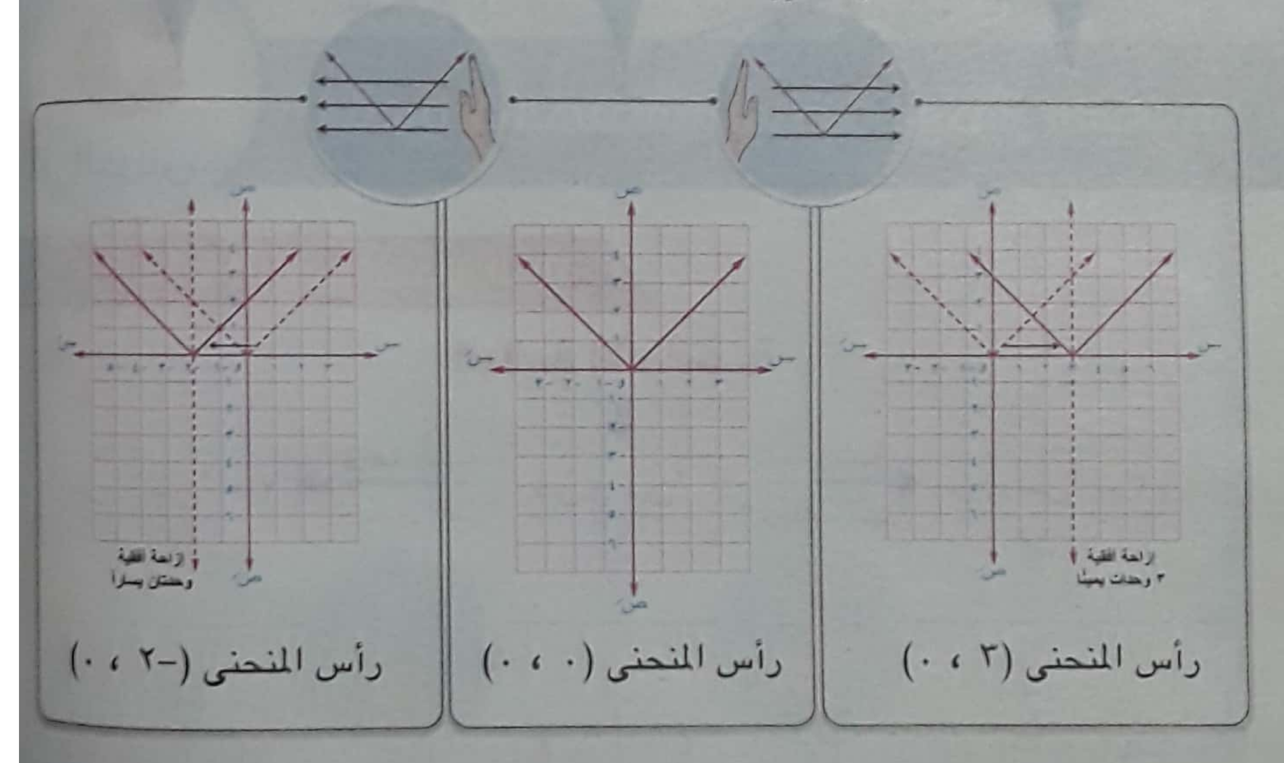
رأس المنحنى (٠ ، −٣)

بصفة عامة

لأى دالة د يكون المنحنى ص = د (س) + أ ، أ ∈ ح − {٠} هو نفس المنحنى ص = د (س)

بإزاحة رأسية قدرها |أ| وحدة طول فى اتجاه :
- وص (أى لأعلى) عندما أ > ٠ .
- وص َ (أى لأسفل) عندما أ < ٠ .

ثانيًا الإزاحة الأفقية لمنحنى الدالة



بصفة عامة

لأى دالة د يكون المنحنى ص = د (س + ا) ، ا ∈ ح − {٠} هو نفس المنحنى ص = د (س) بإزاحة أفقية قدرها | ا | وحدة طول

فى اتجاه : و س← (يمينًا) عندما ا < ٠ .

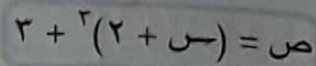
و س→ (يسارًا) عندما ا > ٠ .

ثالثًا الإزاحة الأفقية متبوعة بالإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة

الدالة الأساسية

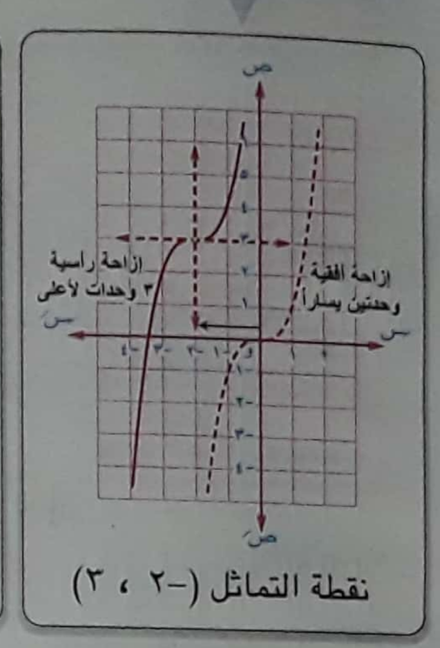
ص = سـ^{٣}

إزاحة أفقية وحدتين يسارًا ثم إزاحة رأسيه ٣ وحدات لأعلى

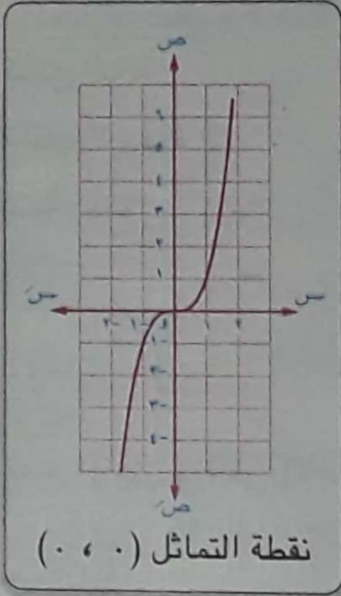


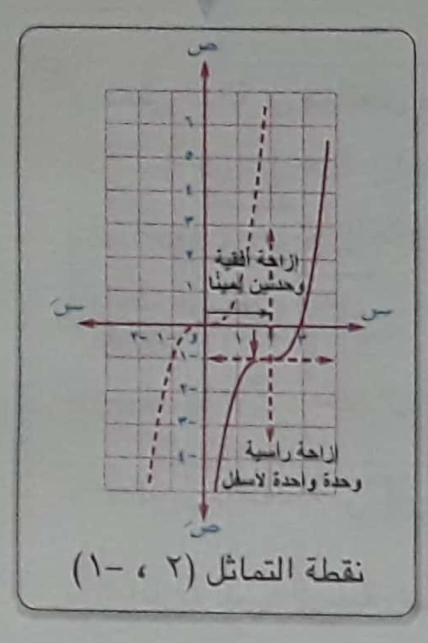
إزاحة أفقية وحدتين يمينًا ثم إزاحة رأسية وحدة واحدة لأسفل

ص = (سـ − ٢)^{٣} − ١



نقطة التماثل (−٢ ، ٣)


نقطة التماثل (٠ ، ٠)



نقطة التماثل (٢ ، −١)

بصفة عامة

لأى دالة د يكون المنحنى ص = د (سـ + أ) + ب حيث أ ، ب ∈ ح − {٠} هو نفس المنحنى ص = د (سـ) بإزاحة أفقية مقدارها | أ | وحدة طول فى اتجاه وسـ إذا كان أ > ٠ أو فى اتجاه وسـ َ إذا كان أ < ٠ ثم إزاحة رأسية مقدارها | ب | وحدة طول فى اتجاه وص إذا كان ب > ٠ أو فى اتجاه وص َ إذا كان ب < ٠



مثال ①

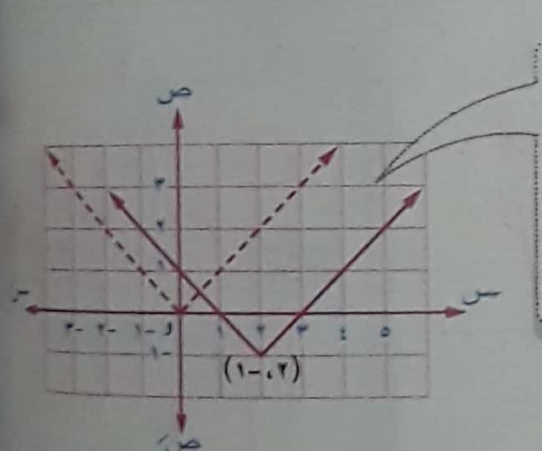
استخدم منحنيات الدوال الأساسية لرسم منحنيات الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم عين مجال ومدى كل دالة وابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك:

1 ر (س) = |س − ٢| − ١ 2 ر (س) = (٢ − س)^{٢} + ١

◀ الحل

1

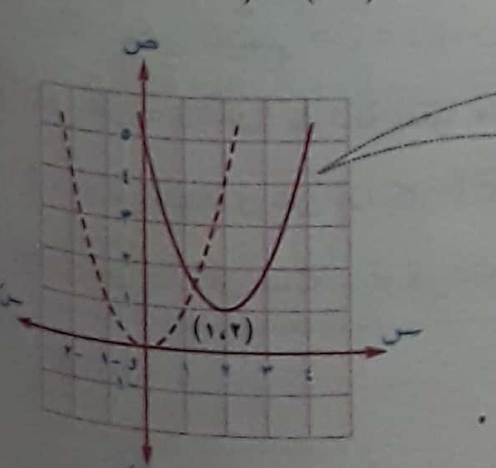
منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = |س| بإزاحة أفقية ٢ وحدة في اتجاه و$\overleftarrow{\text{س}}$ ثم إزاحة رأسية وحدة واحدة في اتجاه و$\overleftarrow{\text{ص}}$



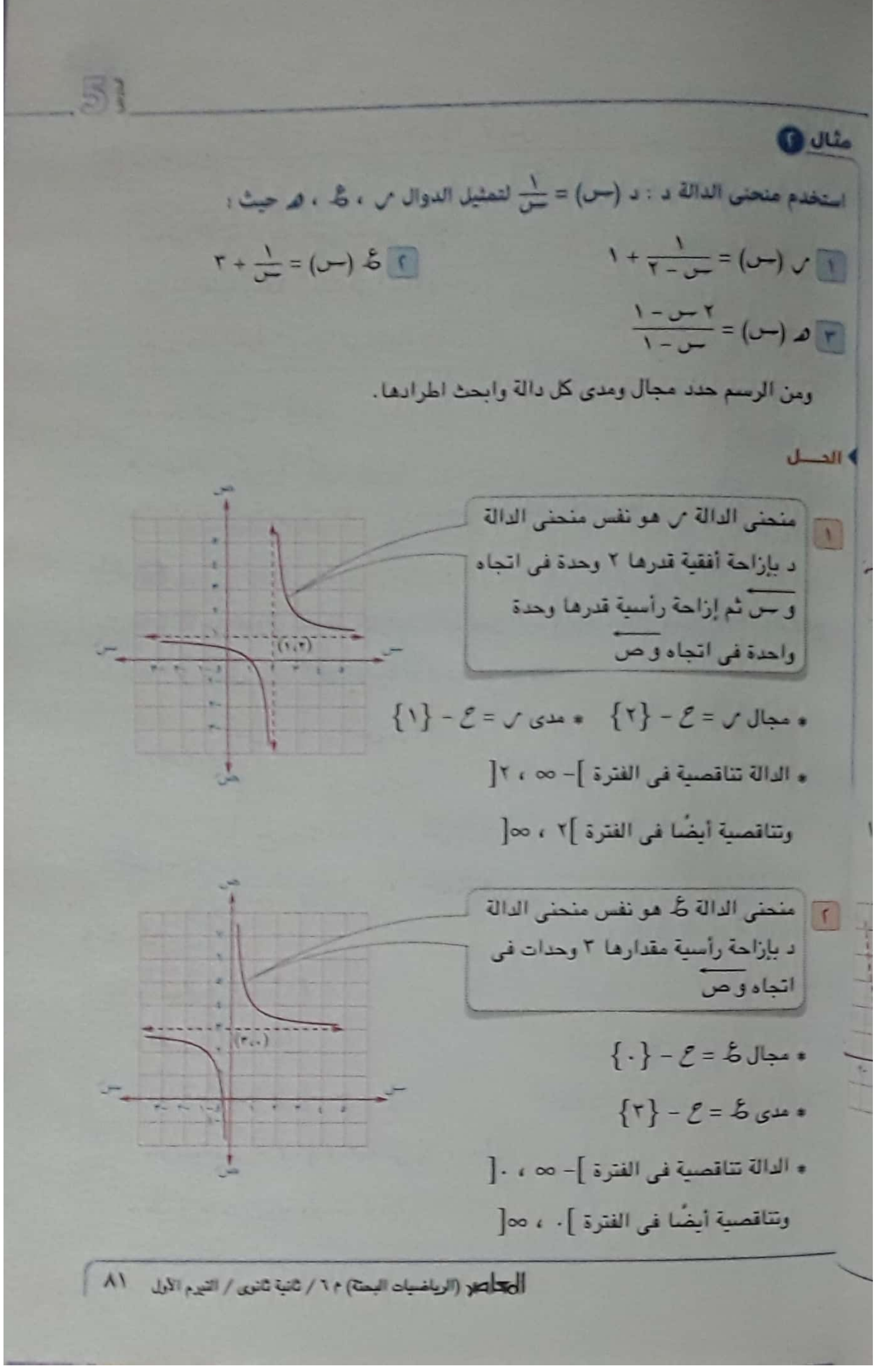
* مجال ر = ح ، مدى ر = [−١ ، ∞[
* الدالة ر تناقصية في]− ∞ ، ٢[وتزايدية في]٢ ، ∞[
* الدالة ر ليست زوجية وليست فردية.

2 ∵ (٢ − س)^{٢} = (س − ٢)^{٢} ∴ ر (س) = (س − ٢)^{٢} + ١

منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} بإزاحة أفقية ٢ وحدة في اتجاه و$\overleftarrow{\text{س}}$ ثم إزاحة رأسية وحدة واحدة في اتجاه و$\overleftarrow{\text{ص}}$



* مجال ر = ح ، مدى ر = [١ ، ∞[
* الدالة ر تناقصية في]− ∞ ، ٢[
* الدالة ر وتزايدية في]٢ ، ∞[ليست زوجية وليست فردية.



مثال ②

استخدم منحنى الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س}$ لتمثيل الدوال ر ، ع ، هـ حيث :

١ ر (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ١

٢ ع (س) = $\frac{١}{س}$ + ٣

٣ هـ (س) = $\frac{٢س - ١}{س - ١}$

ومن الرسم حدد مجال ومدى كل دالة وابحث اطرادها.

الحل

١ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة أفقية قدرها ٢ وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$ ثم إزاحة رأسية قدرها وحدة واحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$

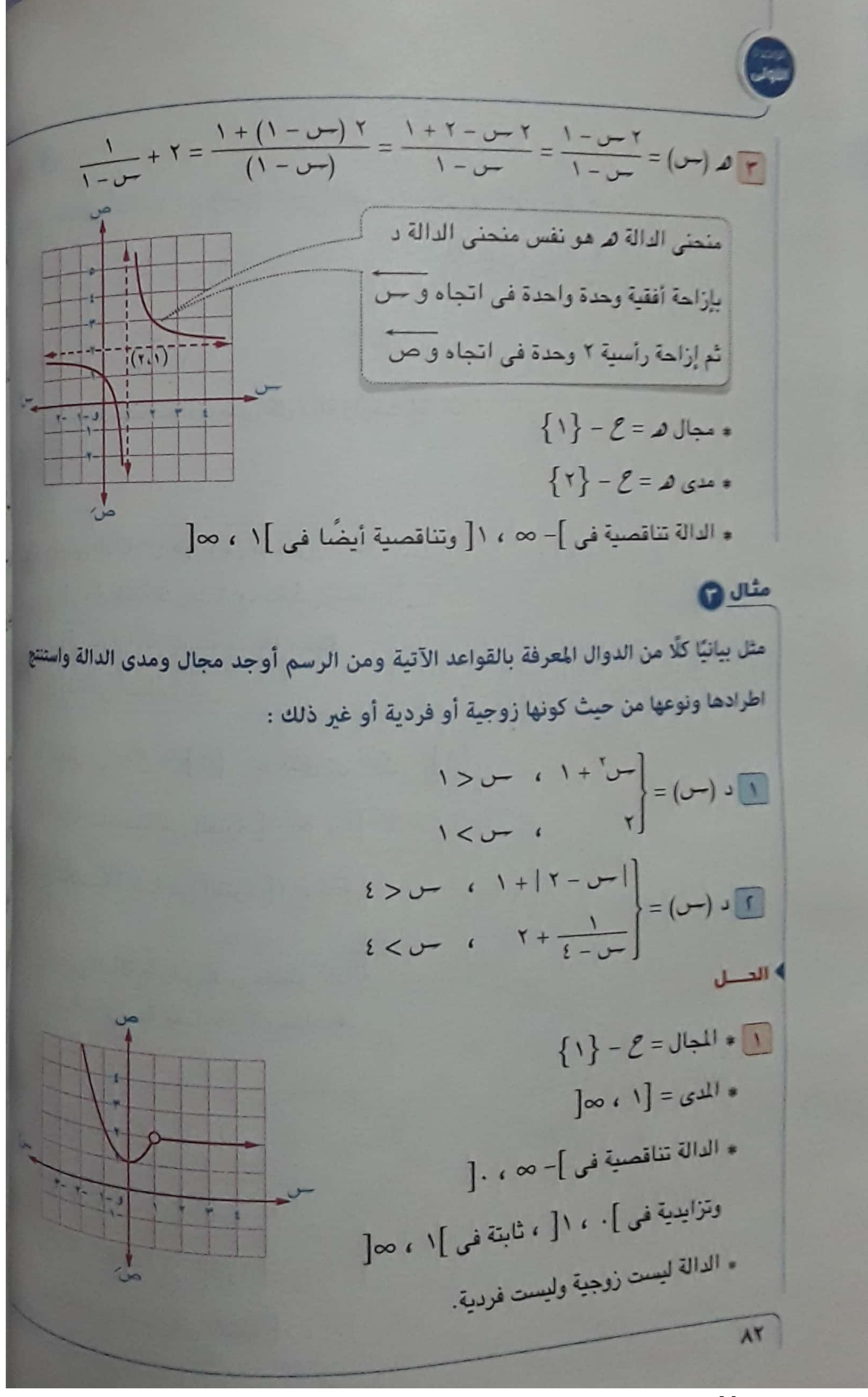
* مجال ر = ح - {٢}   * مدى ر = ح - {١}
* الدالة تناقصية فى الفترة]- ∞ ، ٢[

وتناقصية أيضًا فى الفترة]٢ ، ∞[

٢ منحنى الدالة ع هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة رأسية مقدارها ٣ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$

* مجال ع = ح - {٠}
* مدى ع = ح - {٣}
* الدالة تناقصية فى الفترة]- ∞ ، ٠[

وتناقصية أيضًا فى الفترة]٠ ، ∞[



٣ هـ (س) = $\frac{\text{٢س − ١}}{\text{س − ١}}$ = $\frac{\text{٢س − ٢ + ١}}{\text{س − ١}}$ = $\frac{\text{٢ (س − ١) + ١}}{\text{(س − ١)}}$ = ٢ + $\frac{\text{١}}{\text{س − ١}}$

منحنى الدالة هـ هو نفس منحنى الدالة د
بإزاحة أفقية وحدة واحدة فى اتجاه و س→
ثم إزاحة رأسية ٢ وحدة فى اتجاه و ص→

* مجال هـ = ح − {١}
* مدى هـ = ح − {٢}
* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ١[وتناقصية أيضًا فى]١ ، ∞[

مثال ٣

مثل بيانيًا كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد مجال ومدى الدالة واستنتج اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

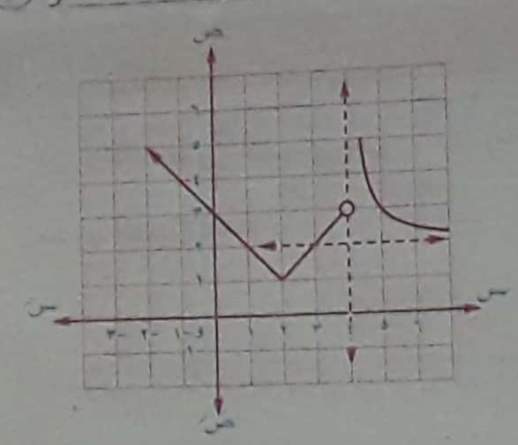
١ د (س) = { س² + ١ ، س < ١
            ٢ ، س > ١

٢ د (س) = { |س − ٢| + ١ ، س < ٤
            $\frac{\text{١}}{\text{س − ٤}}$ + ٢ ، س > ٤

الحـــل

١ * المجال = ح − {١}
* المدى = [١ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠].
وتزايدية فى]٠ ، ١[، ثابتة فى]١ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.





٢ * المجال = ح - {٤}

* المدى =]١ ، ∞[

* الدالة تناقصية فى كل من]- ∞ ، ٢[

،]٤ ، ∞[وتزايدية فى]٢ ، ٤[

* الدالة ليست زوجية وليست فردية.

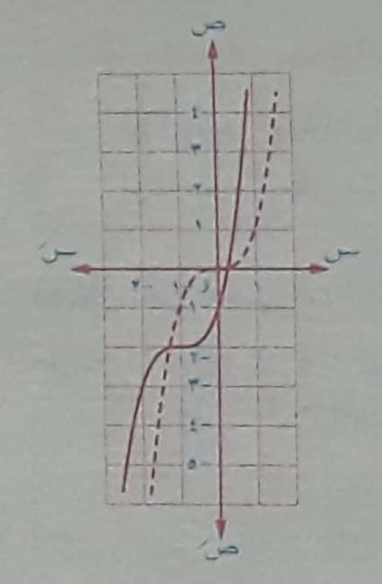
مثال ٤

إذا كانت د : ح ⟵ ح حيث د (س) = س^{٣} فارسم الشكل البيانى للدالة ر

حيث ر (س) = د (س + ١) - ٢ ومن الرسم عين مجال ر ومداها وابحث اطرادها وبين

نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك واذكر ما إذا كانت الدالة ر أحادية أم لا.

الحـــل



∵ ر (س) = د (س + ١) - ٢

∴ ر (س) = (س + ١)^{٣} - ٢

∴ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة

أفقية وحدة واحدة فى اتجاه و س⃖ ثم إزاحة رأسية

وحدتان فى اتجاه و ص⃖

* مجال الدالة ر = ح ، مدى الدالة ر = ح

* الدالة ر متزايدة على مجالها ح

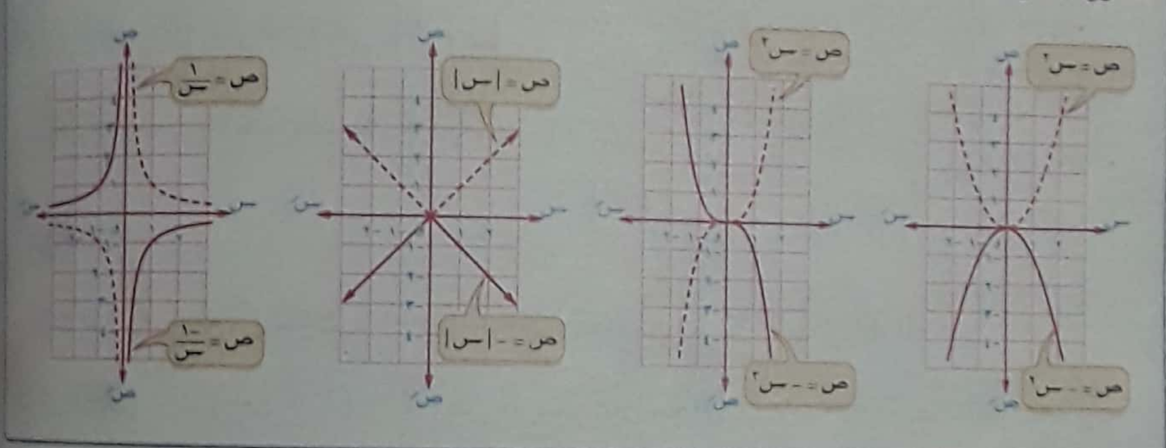
* الدالة ر ليست زوجية وليست فردية.

* الدالة ر أحادية.



رابعًا انعكاس منحنى الدالة فى محور السينات

لأى دالة د يكون المنحنى ص = − د (س) هو نفس المنحنى ص = د (س) بالانعكاس فى محور السينات.



ملاحظـــة هامة

من المهم ترتيب إجراء التحويلات على المنحنى ص = د (س) للحصول منه على المنحنى ص = − د (س + أ) + ب كالتالى :

1 انعكاس فى محور السينات. 2 إزاحة أفقية. 3 إزاحة رأسية.

فإذا عكس الترتيب بإجراء الإزاحة الرأسية قبل إجراء الانعكاس فى محور السينات فإننا نحصل على منحنى آخر غير المنحنى المطلوب.

فمثلًا : من منحنى الدالة الأساسية ص = | س | نحصل على منحنى الدالة ص = − | س + ٢ | + ١ كالتالى :

ص = | س |	ص = − | س |	ص = − | س + ٢ |	ص = − | س + ٢ | + ١
الدالة الأساسية	ثم الانعكاس فى محور السينات	ثم إزاحة أفقية وحدتان يسارًا	ثم إزاحة رأسية وحدة واحدة لأعلى

مثال ٥

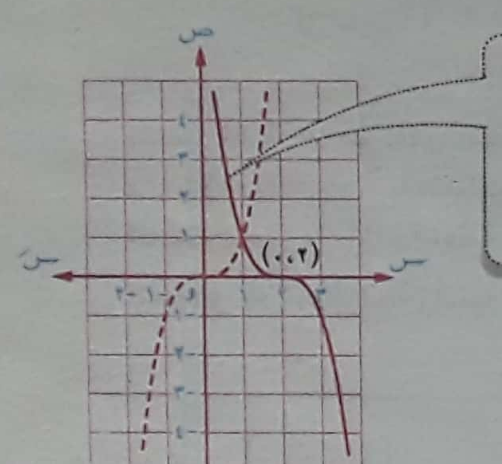
باستخدام منحنيات الدوال الأساسية ارسم منحنيات الدوال ر ، ى ، ع ، هـ حيث :

١ ر (س) = − (س − ٢)^٣ ٢ ع (س) = $\frac{١}{٢ - س}$ + ٣

٣ هـ (س) = ٤ س − س^٢ − ٣

ومن الرسم بين مدى كل دالة وابحث اطرادها وتماثلها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك.

الحل



١ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة

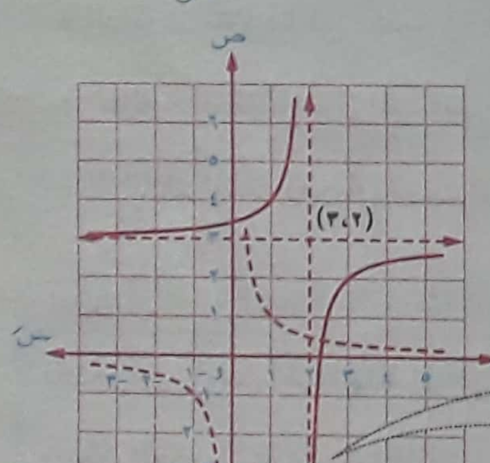
د : د (س) = س^٣ بالانعكاس فى محور السينات

ثم إزاحة أفقية ٢ وحدة فى اتجاه و س←

* مدى ر = ح
* الدالة ر تناقصية على مجالها ح
* الدالة ر متماثلة حول النقطة (٢ ، ٠)
* الدالة ر ليست زوجية وليست فردية.

٢ ع (س) = $\frac{١}{-س + ٢}$ + ٣ = $\frac{١}{-(س - ٢)}$ + ٣

= $\frac{-١}{س - ٢}$ + ٣



منحنى الدالة ع هو نفس منحنى الدالة

د : د (س) = $\frac{١}{س}$ بالانعكاس فى محور السينات

متبوعًا بإزاحة أفقية وحدتين فى اتجاه و س← ثم

إزاحة رأسية ٣ وحدات فى اتجاه و ص←

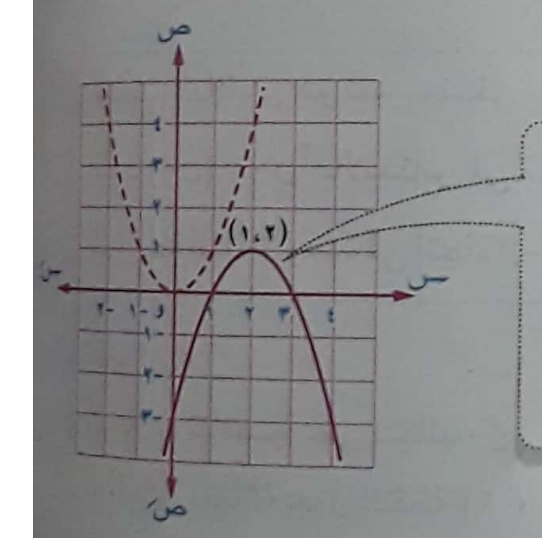


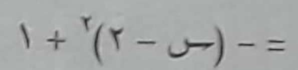
* مدى ع = ح − {٢}
* الدالة ع تزايدية فى الفترة]− ∞ ، ٢[وتزايدية أيضًا فى الفترة]٢ ، ∞[
* الدالة ع متماثلة حول النقطة (٢ ، ٣)
* الدالة ع ليست زوجية وليست فردية.

٣ ∵ هـ (س) = − س^{٢} + ٤ س − ٣ = − (س^{٢} − ٤ س + ٣)

= − (س^{٢} − ٤ س + ٤ − ١) = − [(س − ٢)^{٢} − ١]

= − (س − ٢)^{٢} + ١





منحنى الدالة هـ هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} بالانعكاس فى محور السينات متبوعًا بإزاحة أفقية وحدتين فى اتجاه و س ثم إزاحة رأسية وحدة واحدة فى اتجاه و ص

* مدى هـ =]− ∞ ، ١]
* الدالة هـ متزايدة فى الفترة]− ∞ ، ٢[ومتناقصة فى]٢ ، ∞[
* الدالة هـ متماثلة حول المستقيم س = ٢
* الدالة هـ ليست زوجية وليست فردية.

لاحظ أن

نقطة رأس المنحنى فى الدالة هـ هى (٢ ، ١)

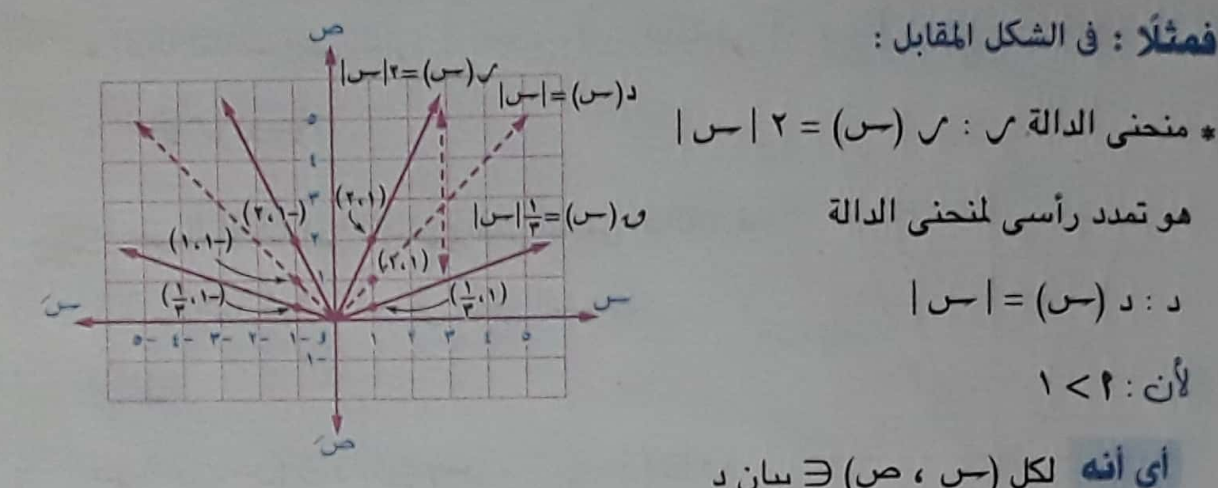
ويمكن الحصول عليها من القانون : رأس المنحنى = $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

وذلك للدوال التى قاعدتها على الصورة : د (س) = أ س^{٢} + ب س + حـ

خامسًا تمدد منحنى الدالة

لأى دالة د يكون المنحنى ص = ﺃ د (س) حيث ﺃ ∈ ع*

- تمدد رأسى للمنحنى ص = د (س) إذا كان ﺃ > ١
- انكماش رأسى للمنحنى ص = د (س) إذا كان ٠ < ﺃ < ١



فمثلًا : فى الشكل المقابل :

* منحنى الدالة ر : ر (س) = ٢ | س |

هو تمدد رأسى لمنحنى الدالة

د : د (س) = | س |

لأن : ﺃ > ١

أى أنه لكل (س ، ص) ∈ بيان د

يكون (س ، ٢ ص) ∈ بيان ر

* منحنى الدالة ع : ع (س) = $\frac{١}{٢}$ | س | هو انكماش رأسى لمنحنى الدالة د : د (س) = | س |

لأن : ٠ < ﺃ < ١

أى أنه لكل (س ، ص) ∈ بيان د يكون (س ، $\frac{١}{٢}$ ص) ∈ بيان ع

مثال ٦

استخدم منحنى الدالة د : د (س) = $س^{٢}$ فى رسم كل من المنحنيات الآتية :

١ ر (س) = ٢ $س^{٢}$ ٢ ع (س) = − $\frac{١}{٢}$ $س^{٢}$

٣ هـ (س) = ٢ $(س - ١)^{٢}$ − ٣

ومن الرسم عين مدى كل منها وابحث اطرادها و بين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك.



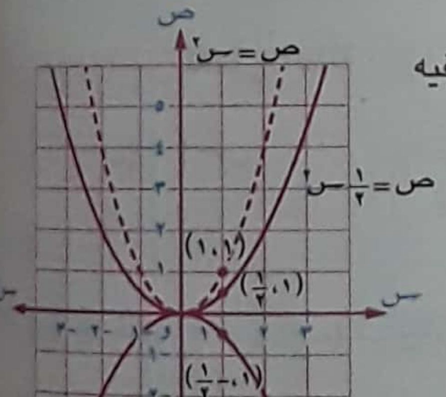
الحـــل

١ منحنى الدالة ر هو تمدد رأسى لمنحنى الدالة د فيه أ = ٢ > ١

أى أنه

لكل (س ، ص) ∈ بيان د يكون (س ، ٢ ص) ∈ بيان ر

* مدى ر = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى الفترة]- ∞ ، ٠[وتزايدية فى]٠ ، ∞[
* الدالة ر زوجية.



٢ منحنى الدالة ى هو انكماش رأسى لمنحنى الدالة د فيه

أ = ١/٢ > ١ ثم انعكاس فى محور السينات.

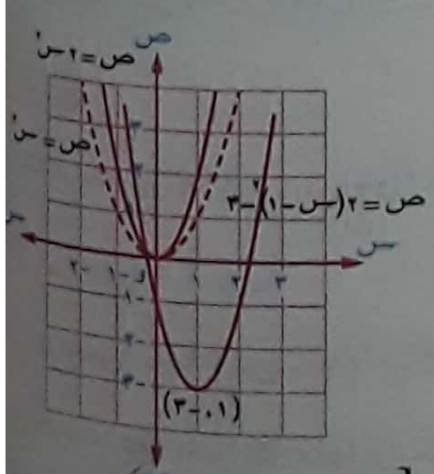
أى أنه

لكل (س ، ص) ∈ د يكون (س ، - ١/٢ ص) ∈ ى

* مدى ى =]- ∞ ، ٠]
* الدالة تزايدية فى]- ∞ ، ٠[

وتناقصية فى]٠ ، ∞[

* الدالة ى زوجية.



٣ منحنى الدالة هـ هو تمدد رأسى للدالة د فيه

أ = ٢ > ١ ثم إزاحة أفقية وحدة واحدة

فى اتجاه و س يليها إزاحة رأسية ٣ وحدات

فى اتجاه و ص َ

* مدى هـ = [-٣ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]- ∞ ، ١[وتزايدية فى]١ ، ∞[
* الدالة هـ ليست زوجية وليست فردية.

ملاحظتان

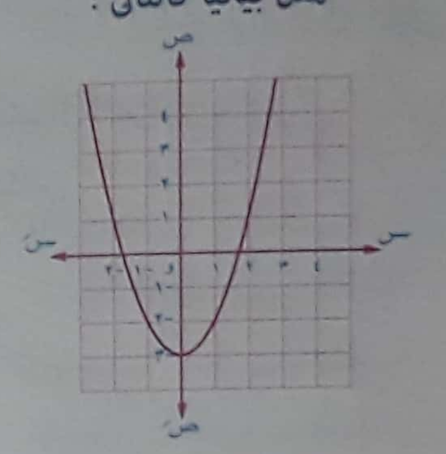
لأى دالة د كثيرة حدود :

١ المنحنى ص = | د (س) | أى ص = { د (س) ، د (س) ≥ ٠ . ، − د (س) ، د (س) < ٠ .

يمثله بيانيًا المنحنى ص = د (س) مع استبدال الجزء من المنحنى أسفل محور السينات بصورته بالانعكاس فى محور السينات.

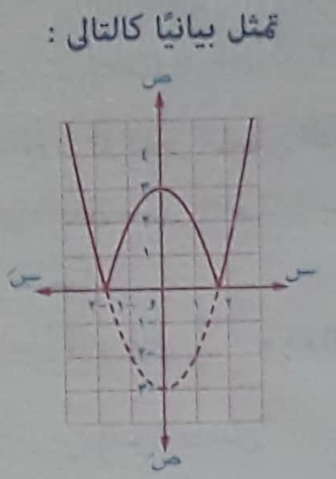
فمثلًا : ص = س^{٢} − ٣

تمثل بيانيًا كالتالى :



ص = | س^{٢} − ٣ |

تمثل بيانيًا كالتالى :

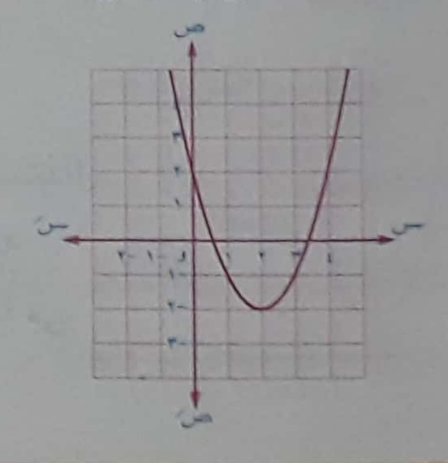


٢ المنحنى ص = − | د (س) | أى ص = { − د (س) ، د (س) ≥ ٠ . ، د (س) ، د (س) < ٠ .

يمثله بيانيًا المنحنى ص = د (س) مع استبدال الجزء من المنحنى أعلى محور السينات بصورته بالانعكاس فى محور السينات.

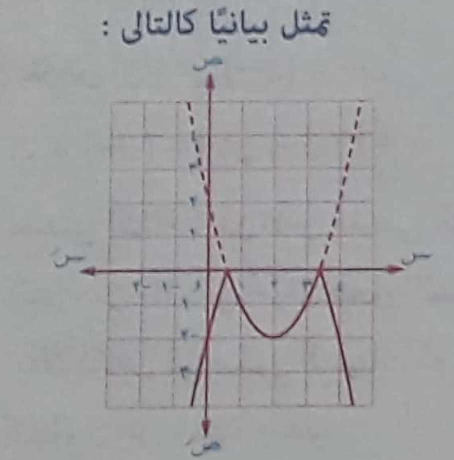
فمثلًا : ص = (س − ٢)^{٢} − ٢

تمثل بيانيًا كالتالى :



ص = − | (س − ٢)^{٢} − ٢ |

تمثل بيانيًا كالتالى :





مثال ٧

مثل بيانيًا كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد مداها وعين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك :

١ د (س) = | س^{٢} − ٢ |

٢ د (س) = − | س^{٣} |

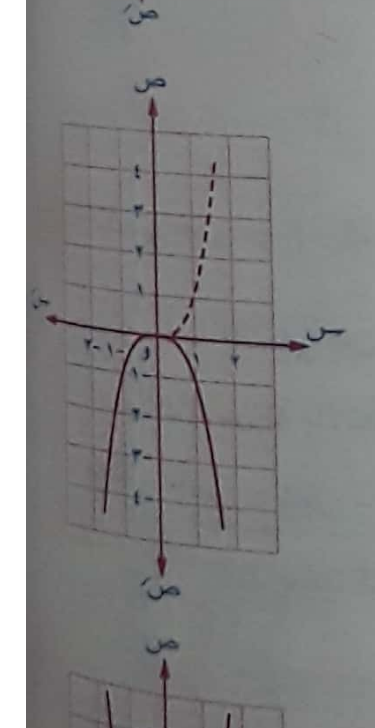
٣ د (س) = | س^{٣} | + ١

الحل

١ بفرض أن : ر (س) = س^{٢} − ٢

منحنى الدالة د هو نفس منحنى الدالة ر مع استبدال الجزء من المنحنى أسفل محور السينات بصورته بالانعكاس فى محور السينات.

* مدى د = [٠ ، ∞[* الدالة د زوجية.



٢ بفرض أن : ر (س) = س^{٣}

منحنى الدالة د هو نفس منحنى الدالة ر مع استبدال الجزء من المنحنى أعلى محور السينات بصورته بالانعكاس فى محور السينات.

* مدى د =]− ∞ ، ٠]
* الدالة د زوجية.

٣ بفرض أن : ر (س) = س^{٣}

∴ د (س) = | ر (س) | + ١

منحنى الدالة د هو نفس منحنى الدالة ر مع استبدال الجزء من المنحنى أسفل محور السينات بصورته بالانعكاس فى محور السينات ثم إزاحته رأسيًا فى اتجاه و ص وحدة واحدة.

* مدى د = [١ ، ∞[* الدالة د زوجية.

مثال ٨

مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = $\frac{١}{|س|}$ ثم استخدمها فى التمثيل البيانى للدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

١ ر (س) = د (س + ١)

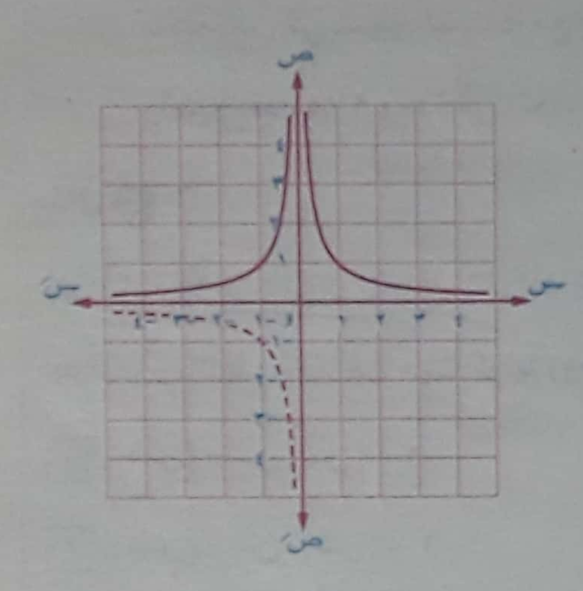
٢ ن (س) = د (س) + ١

٣ هـ (س) = − د (س) + ٢

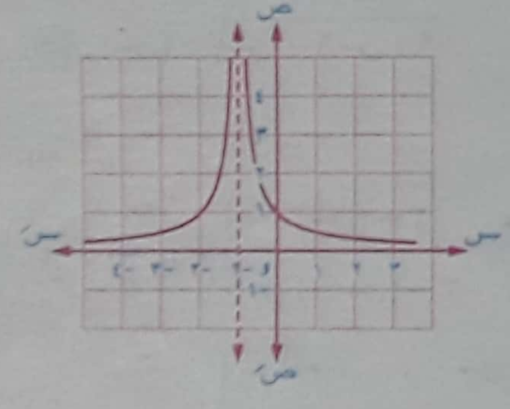
الحل

• بفرض أن : ﻫ (س) = $\frac{١}{س}$

∴ د (س) = | ﻫ (س) |



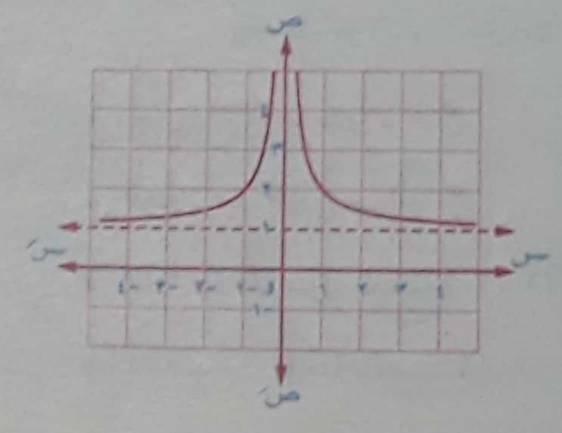
أى أن منحنى الدالة د هو نفس منحنى الدالة ﻫ مع استبدال الجزء أسفل محور السينات بصورته بالانعكاس فى محور السينات.



١ ∵ ر (س) = د (س + ١)

∴ ر (س) = $\frac{١}{|س + ١|}$

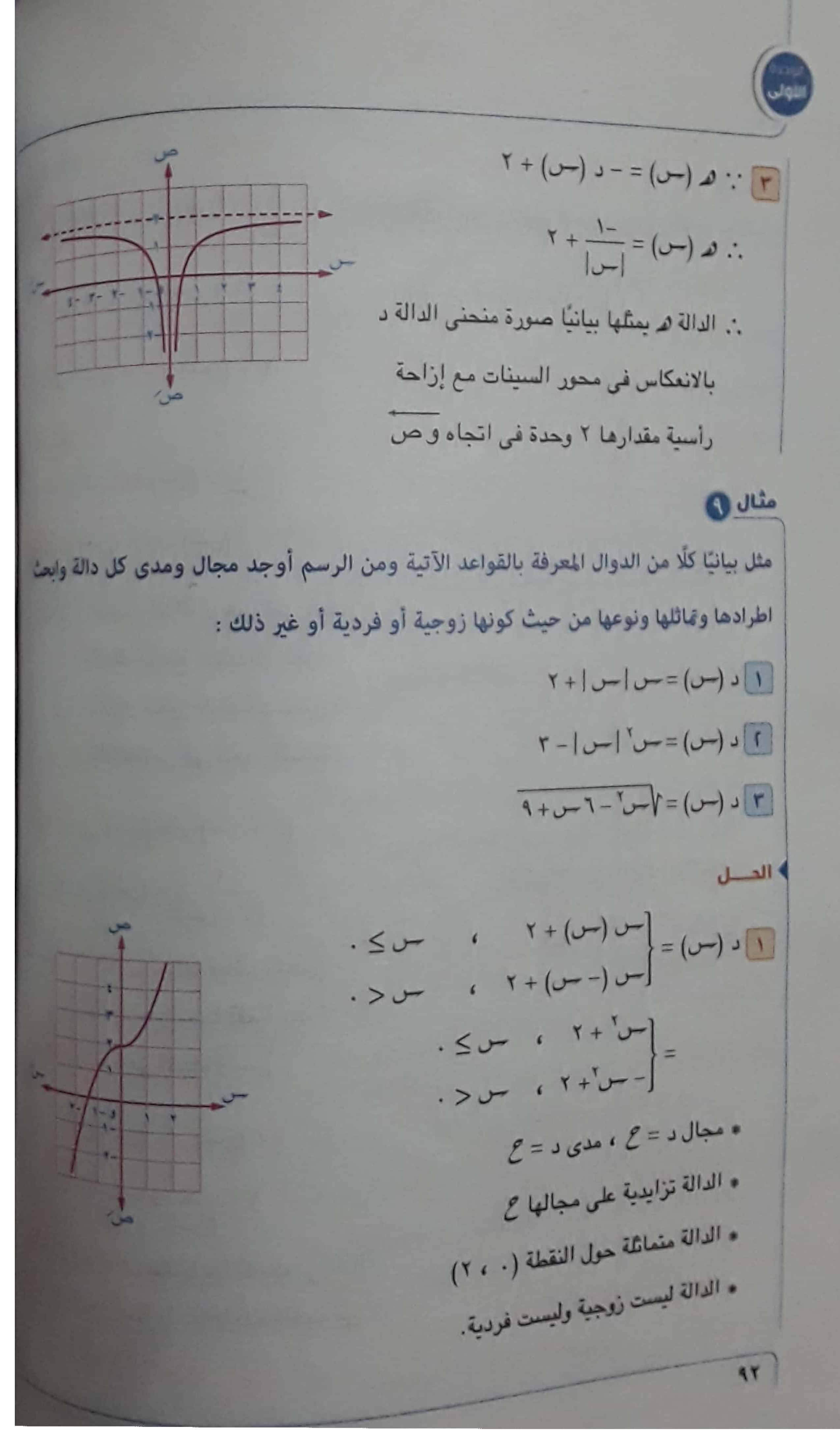
∴ الدالة ر يمثلها بيانيًا منحنى الدالة د مع إزاحة أفقية وحدة واحدة فى اتجاه $\overleftarrow{و س}$



٢ ∵ ن (س) = د (س) + ١

∴ ن (س) = $\frac{١}{|س|}$ + ١

∴ الدالة ن يمثلها بيانيًا منحنى الدالة د مع إزاحة رأسية وحدة واحدة فى اتجاه $\overleftarrow{و ص}$



٣ ∵ هـ (س) = − د (س) + ٢

∴ هـ (س) = $\frac{-1}{|س|}$ + ٢

∴ الدالة هـ يمثلها بيانيًا صورة منحنى الدالة د

بالانعكاس فى محور السينات مع إزاحة

رأسية مقدارها ٢ وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{و ص}$

مثال ٩

مثل بيانيًا كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد مجال ومدى كل دالة وابحث اطرادها وتماثلها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

١ د (س) = س |س| + ٢

٢ د (س) = $س^2$ |س| − ٣

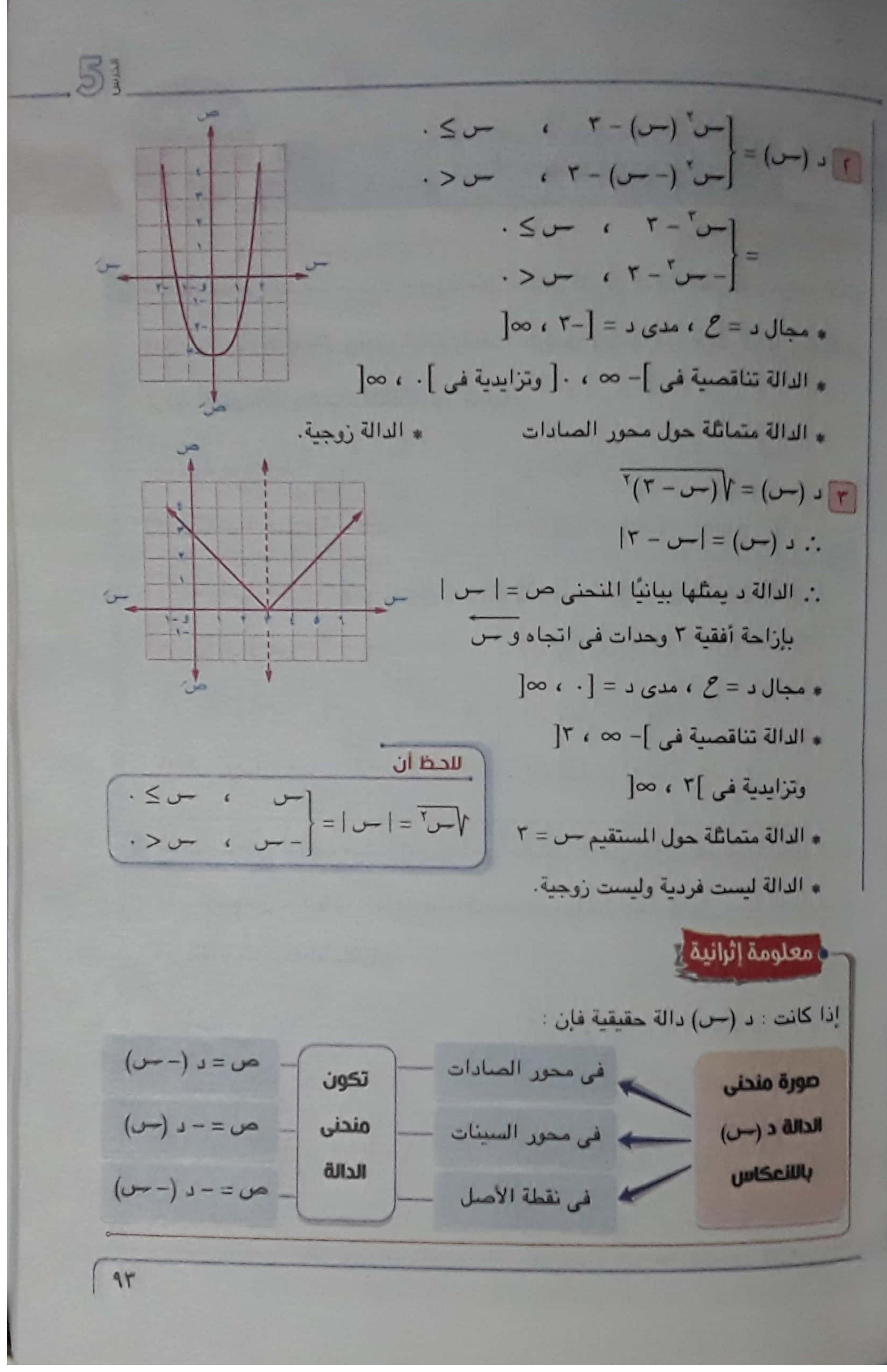
٣ د (س) = $\sqrt{س^2 - 6س + 9}$

الحـــل

١ د (س) = { س (س) + ٢ ، س ≥ ٠ ؛ س (− س) + ٢ ، س < ٠ }

= { $س^2$ + ٢ ، س ≥ ٠ ؛ − $س^2$ + ٢ ، س < ٠ }

- مجال د = ح ، مدى د = ح
- الدالة تزايدية على مجالها ح
- الدالة متماثلة حول النقطة (٠ ، ٢)
- الدالة ليست زوجية وليست فردية.



٢ د (س) = { س^٢ (س) − ٣ ، س ≥ ٠ ؛ س^٢ (−س) − ٣ ، س < ٠ }

= { س^٣ − ٣ ، س ≥ ٠ ؛ −س^٣ − ٣ ، س < ٠ }

* مجال د = ح ، مدى د = [−٣ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠[وتزايدية فى]٠ ، ∞[
* الدالة متماثلة حول محور الصادات   * الدالة زوجية.

٣ د (س) = $\sqrt{(س - ٣)^٢}$

∴ د (س) = |س − ٣|

∴ الدالة د يمثلها بيانيًا المنحنى ص = | س | بإزاحة أفقية ٣ وحدات فى اتجاه و س

* مجال د = ح ، مدى د = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٣[

وتزايدية فى]٣ ، ∞[

* الدالة متماثلة حول المستقيم س = ٣
* الدالة ليست فردية وليست زوجية.

لاحظ أن

$\sqrt{س^٢}$ = | س | = { س ، س ≥ ٠ ؛ −س ، س < ٠ }

معلومة إثرائية

إذا كانت : د (س) دالة حقيقية فإن :

صورة منحنى الدالة د (س) بالانعكاس		تكون منحنى الدالة	
	فى محور الصادات		ص = د (−س)
	فى محور السينات		ص = − د (س)
	فى نقطة الأصل		ص = − د (−س)



تمارين 5
على التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال الأساسية

من أسئلة الكتاب المدرسي

١ استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = س^{٢}$ لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك واكتب معادلة محور تماثلها :

(١) $ر(س) = س^{٢} - ٣$

(٢) $ر(س) = س^{٢} + ١$

(٣) $ر(س) = ٢ - س^{٢}$

(٤) $ر(س) = (س - ٢)^{٢}$

(٥) $ر(س) = -(س - ٣)^{٢}$

(٦) $ر(س) = (س + ٢)^{٢} - ٤$

(٧) $ر(س) = ٢ - (س + ٣)^{٢}$

(٨) $ر(س) = (٢ - س)^{٢} - ١$

(٩) $ر(س) = (س + \frac{٣}{٢})^{٢} - \frac{١}{٢}$

(١٠) $ر(س) = \frac{-١}{٢} س^{٢}$

(١١) $ر(س) = س^{٢} + ٤ س + ٤$

(١٢) $ر(س) = س^{٢} + ٤ س + ١$

---

٢ استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = س^{٣}$ لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم عين مجالها ومداها وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك و اكتب نقطة تماثلها :

(١) $ر(س) = س^{٣} + ٤$

(٢) $ر(س) = ٤ - س^{٣}$

(٣) $ر(س) = (س - ٣)^{٣}$

(٤) $ر(س) = (٢ - س)^{٣}$

(٥) $ر(س) = (س - ٢)^{٣} + ١$

(٦) $ر(س) = ٢ - (س - ١)^{٣}$

(٧) $ر(س) = (٣ - س)^{٣} + ١$

(٨) $ر(س) = ٢ س^{٣} - ١$

٣ استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = | س | لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم عين مجالها ومداها وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك و اكتب معادلة محور تماثلها :

① ر (س) = | س | + ١
② ر (س) = | س | − ٣
③ ر (س) = ٢ − | س |
④ ر (س) = | س + ١ |
⑤ ر (س) = − | س + ٥ |
⑥ ر (س) = | ٢ − س | + ١
⑦ ر (س) = ٤ − | س − ٢ |
⑧ ر (س) = ٢ | س |
⑨ ر (س) = ٢ | س − ٧ | + ٢
⑩ ر (س) = ٥ − ٢ | س + ٢ |
⑪ ر (س) = ١ − | $\frac{١}{٢}$ س − ١ |
⑫ ر (س) = $\sqrt{س^{٢} − ٨ س + ١٦}$

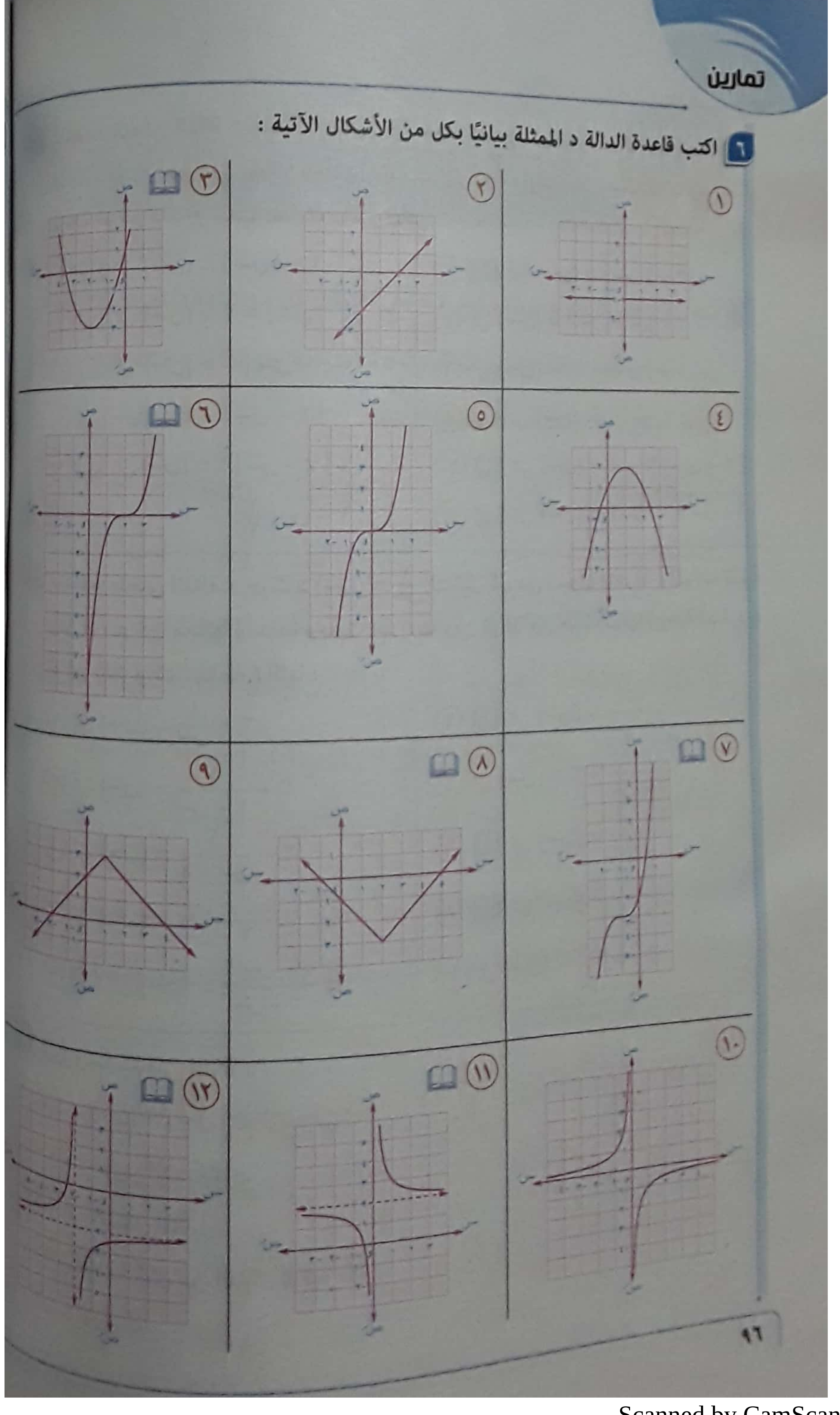
٤ استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = $\frac{١}{س}$ لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم عين مجالها ومداها وابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك واكتب نقطة تماثلها :

① ر (س) = $\frac{١}{س}$ + ٢
② ر (س) = $\frac{-١}{س + ٢}$
③ ر (س) = $\frac{١}{س − ٢}$ + ٣
④ ر (س) = ٣ − $\frac{١}{س + ٢}$
⑤ ر (س) = $\frac{١}{٤ − س}$ − ٣
⑥ ر (س) = $\frac{س + ١}{س}$
⑦ ر (س) = $\frac{س − ٣}{س − ٢}$
⑧ ر (س) = $\frac{٢ س}{س + ١}$
⑨ ر (س) = $\frac{٣ س − ٥}{س − ٢}$
⑩ ر (س) = $\frac{س − ١}{س^{٢} − ١}$

٥ رسم منحنى الدالة د حيث د (س) = | س | ثم أزيح فى اتجاه محورى الإحداثيات كما فى الشكل المقابل.

اكتب قاعدة لكل من الدوال الآتية :

ر ، ق ، ع

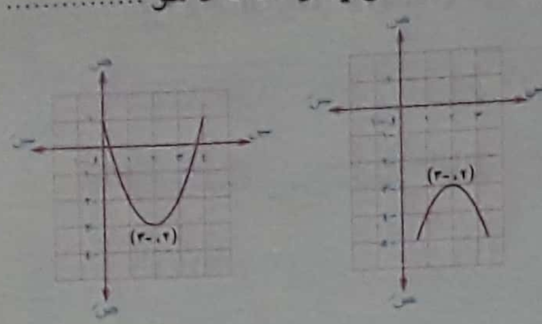


٦ اكتب قاعدة الدالة د الممثلة بيانيًا بكل من الأشكال الآتية :
①
②
③
④
⑤
⑥
⑦
⑧
⑨
⑩
⑪
⑫



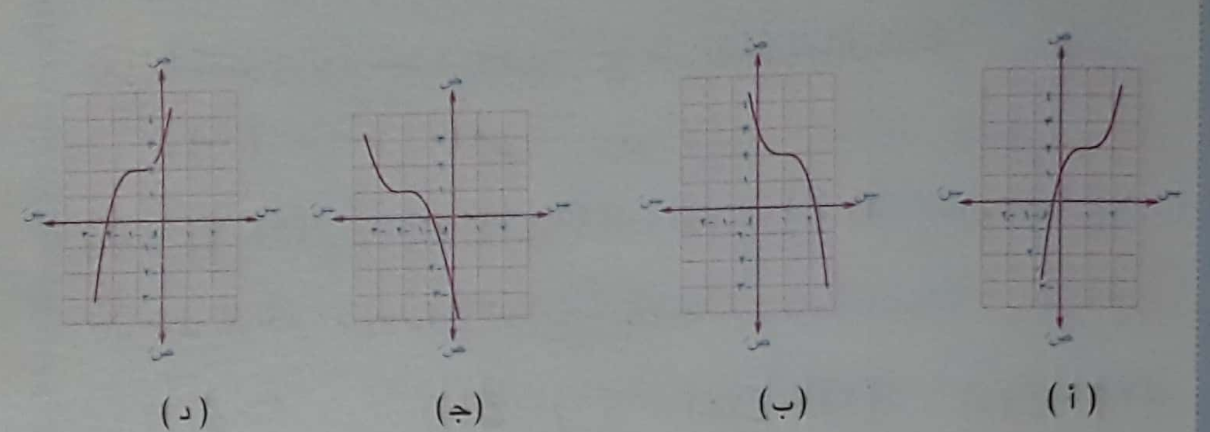
٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = − (س − ٣)^٢ + ٢ فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو ....



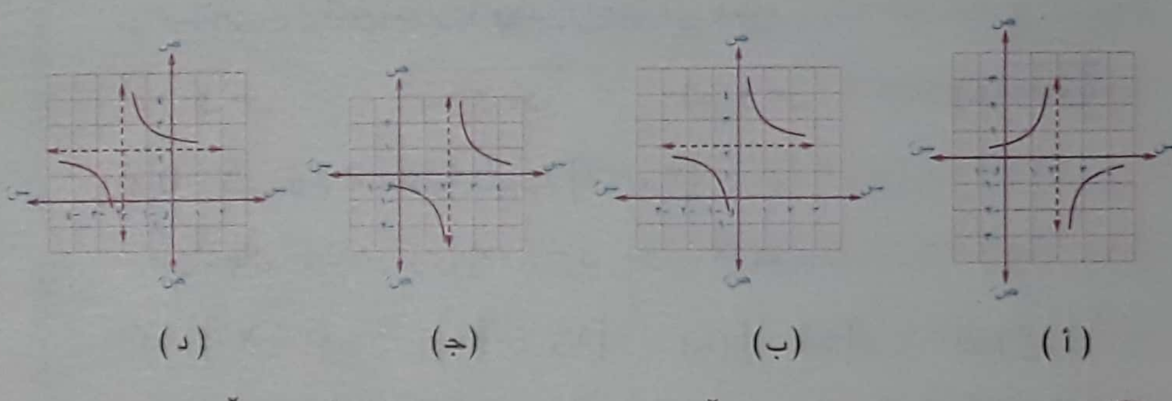
(أ) (ب) (جـ) (د)

② إذا كانت : د (س) = ٢ − (س − ١)^٣ فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو ....



(أ) (ب) (جـ) (د)

③ إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س − ٢}$ فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو ....



(أ) (ب) (جـ) (د)

④ منحنى ر (س) = س^٢ + ٤ هو نفس منحنى د (س) = س^٢

بإزاحة مقدارها ٤ وحدات فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{و س}$ (ب) $\overleftarrow{و س}$ (جـ) $\overleftarrow{و ص}$ (د) $\overleftarrow{و ص}$

⑤ 📖 منحنى ر (س) = |س + ٣| هو نفس منحنى د (س) = |س|

بإزاحة مقدارها ٣ وحدات فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{\text{و س}}$ (ب) $\overleftharpoon{\text{و س}}$ (جـ) $\overleftarrow{\text{و ص}}$ (د) $\overleftharpoon{\text{و ص}}$

⑥ 📖 نقطة رأس منحنى الدالة د : د (س) = $(٢ - س)^٢$ + ٣ هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٢ ، -٣) (جـ) (-٢ ، ٣) (د) (-٢ ، -٣)

⑦ 📖 نقطة تماثل منحنى الدالة د حيث د (س) = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٤ هى ....

(أ) (٣ ، -٤) (ب) (-٣ ، -٤) (جـ) (٣ ، ٤) (د) (-٣ ، ٤)

⑧ إذا كانت الدالة د حيث د (س) = $\frac{١}{س}$ فإن نقطة التماثل للدالة

ر (س) = د (س + ١) هى ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (-١ ، ٠) (د) (-١ ، ١)

⑨ مدى الدالة د : د (س) = ٢ - $\frac{٣}{س - ١}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح - {١} (جـ) ح - {٢} (د) ح - {٣}

⑩ المنحنى ر (س) = ١ - |س| هو نفس المنحنى د (س) = |س| بالانعكاس فى محور السينات ثم إزاحة مقدارها وحدة واحدة فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{\text{و س}}$ (ب) $\overleftharpoon{\text{و س}}$ (جـ) $\overleftarrow{\text{و ص}}$ (د) $\overleftharpoon{\text{و ص}}$

⑪ إذا كانت : د دالة حقيقية مجالها [-٢ ، ٣]

فإن مجال الدالة ر : ر (س) = د (س - ٢) هو ....

(أ) [-٢ ، ٣] (ب) [-٤ ، ١] (جـ) [٠ ، ٥] (د) ح

⑫ إذا كانت : د دالة حقيقية مجالها [-٣ ، ٤]

فإن مجال الدالة ر : ر (س) = د (س) + ٢ هو ....

(أ) [-٣ ، ٤] (ب) [-١ ، ٦] (جـ) [-٥ ، ٢] (د) ح

(١٣) إذا كان المنحنى ص = د (س) يمثل دالة حقيقية فإن صورته بإزاحة قدرها ٣ وحدات رأسيًا لأعلى هو المنحنى ر (س) = ...

(أ) د (س − ٣)　(ب) د (س + ٣)　(جـ) د (س) + ٣　(د) د (س) − ٣

(١٤) نفرض أن المنحنى : د (س) = − س^{٣} ينتقل ٤ وحدات لليمين ووحدتان لأسفل وكان المنحنى الناتج هو ر (س) فإن : ر (−٢) = ...

(أ) −٢١٨　(ب) −٢٠　(جـ) ٦　(د) ٢١٤

(١٥) المستقيمان د (س) = أ س + ب وصورته بالانعكاس فى محور السينات يكون حاصل ضرب ميلهما = ...

(أ) ١　(ب) −١　(جـ) أ　(د) − أ^{٢}

(١٦) مدى الدالة د : د (س) = $\frac{|س|}{س}$ هو ....

(أ)]٠ ، ∞[　(ب)]−∞ ، ٠[　(جـ) ح − {٠}　(د) {١ ، −١}

(١٧) المنحنى د (س) = |س − ٢| متماثل حول المستقيم ....

(أ) س = ٢　(ب) س = −٢　(جـ) ص = ٢　(د) ص = −٢

---

٨ إذا كانت د ، ر ، ق ، ل دوال حقيقية حيث د (س) = س^{٢} ، ر (س) = س^{٣} ، ق (س) = |س| ، ل (س) = $\frac{١}{س}$ فمثل كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية موضحًا مجالها ومداها :

(١) د$_{١}$ (س) = د (س + ١)
(٢) د$_{٢}$ (س) = د (س) − ١
(٣) د$_{٣}$ (س) = ٢ − د (س − ١)
(٤) ر$_{١}$ (س) = ر (س − ١)
(٥) ر$_{٢}$ (س) = ر (س) − $\frac{١}{٢}$
(٦) ر$_{٣}$ (س) = ر (س − ١) + ٢
(٧) ق$_{١}$ (س) = ٢ ق (س)
(٨) ق$_{٢}$ (س) = $\frac{١}{٢}$ ق (س) − ٣
(٩) ق$_{٣}$ (س) = ٢ ق (س − ١)
(١٠) ل$_{١}$ (س) = ل (س − ٢)
(١١) ل$_{٢}$ (س) = ل (س) − ١
(١٢) ل$_{٣}$ (س) = ٢ − ل (س + ١)

٩ ارسم منحنى الدالة د في كل مما يأتي وعين مداها وابحث اطرادها :

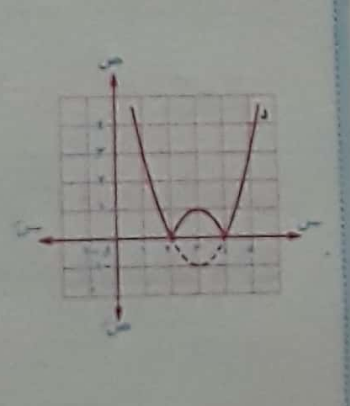
① $د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ &، \quad س > ٠ \\ -س^{٢} - ١ &، \quad س < ٠ \end{cases}$

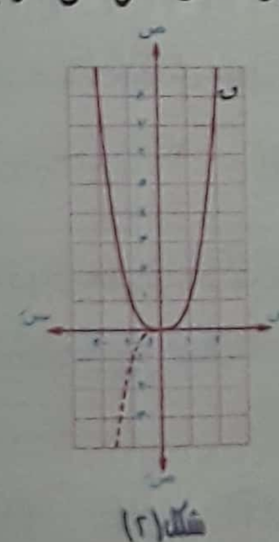
② $د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ &، \quad -٤ \leq س < ٠ \\ -س^{٢} - ١ &، \quad ٠ \leq س \leq ٤ \end{cases}$

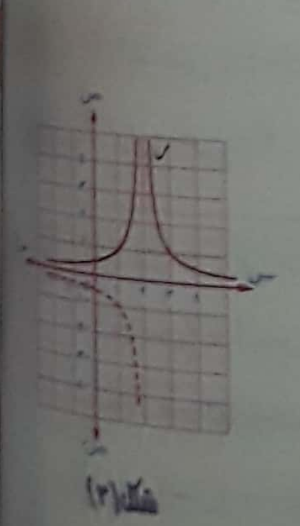
③ $د(س) = \begin{cases} (س - ١)^{٣} &، \quad س \geq ٠ \\ -١ &، \quad س < ٠ \end{cases}$

④ $د(س) = \begin{cases} (س + ١)^{٣} + ٢ &، \quad س \leq -١ \\ \frac{١}{س + ١} + ١ &، \quad س > -١ \end{cases}$

١٠ تبين الأشكال التالية منحنيات الدوال د ، ه ، ر على الترتيب. اكتب قاعدة الدالة في كل شكل:


شكل (١)


شكل (٢)


شكل (٣)

١١ إذا كانت : $د(س) = \frac{١}{س}$ فارسم الشكل البياني للدالة ر في كل من الحالات الآتية :

① $ر(س) = |د(س)|$

② $ر(س) = -|د(س)|$

③ $ر(س) = ٢ + |د(س)|$

④ $ر(س) = |د(س - ٢)|$

⑤ $ر(س) = |د(س + ١)| - ٢$

١٢ ارسم منحنى الدالة د فى كل مما يأتى :

① د (س) = س | س |

② د (س) = س | س | − ١

③ د (س) = | س^{٣} |

④ د (س) = − | س^{٣} |

⑤ د (س) = $\frac{\text{س}^{٤}}{|\text{س}|}$

⑥ د (س) = | س^{٣} | + ٢

⑦ د (س) = س^{٢} | س | + ٢

⑧ د (س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{|\text{س}|}$ − ٣

⑨ د (س) = (س − ٢) | س |

١٣ ارسم منحنى الدالة د وحدد مداها وابحث اطرادها إذا كانت :

① د (س) = | ٤ − س^{٢} |

② د (س) = | س^{٢} − ٢ س − ٣ | ، س ∈ [−١ ، ٤]

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

١٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د دالة كثيرة حدود وكانت د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٣ ، ١ ، ٠}

فإن المنحنى ر (س) = د (س − ٣) يقطع محور السينات عندما س ∈ ....

(أ) {−٣ ، ١ ، ٠} (ب) {٣ ، ٠ ، −٢}

(جـ) {٠ ، ٣ ، ٤} (د) {−٦ ، ٢ ، ٠}

② إذا كانت : د (س) = (س − أ + ١)^{٢} + ب − ٢ دالة تربيعية مداها = [١ ، ∞[،

ومنحنى د يمر بالنقطة (٣ ، ٢) فإن : أ = ...

(أ) ± ٤ (ب) ٣ أ، ٥ (جـ) ٣ أ، −٥ (د) −٣ أ، ٥

③ إذا كانت : ر (س) تناقصية فى]− ∞ ، ٠[، وتزايدية فى]٠ ، ∞[

فإن : د (س) = ر (س + ١) تكون متزايدة فى ....

(أ)]−١ ، ∞[(ب)]− ∞ ، −١[(جـ)]٠ ، ∞[(د)]− ∞ ، ٠[

④ المنحنى : ص = ٣ (س − ٥)^{٢} + ٧ تحت تأثير انتقال ٣ وحدات فى الاتجاه الموجب للمحور السينى ووحدة فى الاتجاه السالب للمحور الصادى فإن معادلة المنحنى الجديدة هى ....

(أ) ص = ٣ (س + ٨)^{٢} + ٦ (ب) ص = ٣ (س − ٨)^{٢} − ٦

(جـ) ص = ٣ (س − ٨)^{٢} + ٦ (د) ص = ٣ (س + ٨)^{٢} − ٦

⑤ إذا كانت : د (س) = | س | + ٢ فإن مدى الدالة (د ∘ د) = ...

(أ)]−∞ ، ٤[(ب) [٤ ، ∞[(جـ) [−٤ ، ٤] (د) [٠ ، ٤]

⑥ إذا كانت : ر (س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} − ٨ ، د (س) = | س |

فإن مدى الدالة (د ∘ ر) = ...

(أ) [−٨ ، ∞[(ب) [٠ ، ∞[(جـ) [٨ ، ∞[(د) ع

⑦ إذا كانت : د دالة فردية فإن : | د (س) | تكون ....

(أ) فردية. (ب) زوجية.

(جـ) زوجية وفردية معًا. (د) ليست زوجية وليست فردية.

⑧ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} س^{٣} + ٢ & ، س > ٠ \\ ر (س) & ، س < ٠ \end{cases}$ متماثلة حول نقطة الأصل

فإن : ر (س) ....

(أ) تناقصية. (ب) تزايدية.

(جـ) ليست أحادية. (د) زوجية.

⑨ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٢ & ، س \geq ٠ \\ ر (س) & ، س < ٠ \end{cases}$ متماثلة حول محور الصادات

فإن : ر (س) = ...

(أ) س^{٢} − ٢ (ب) س^{٢} + ٢ (جـ) − س^{٢} + ٢ (د) − س^{٢} − ٢

١٥ ارسم منحنى الدالة د فى كل مما يأتى ومن الرسم حدد المجال والمدى وابحث الاطراد وبيّن هل الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك :

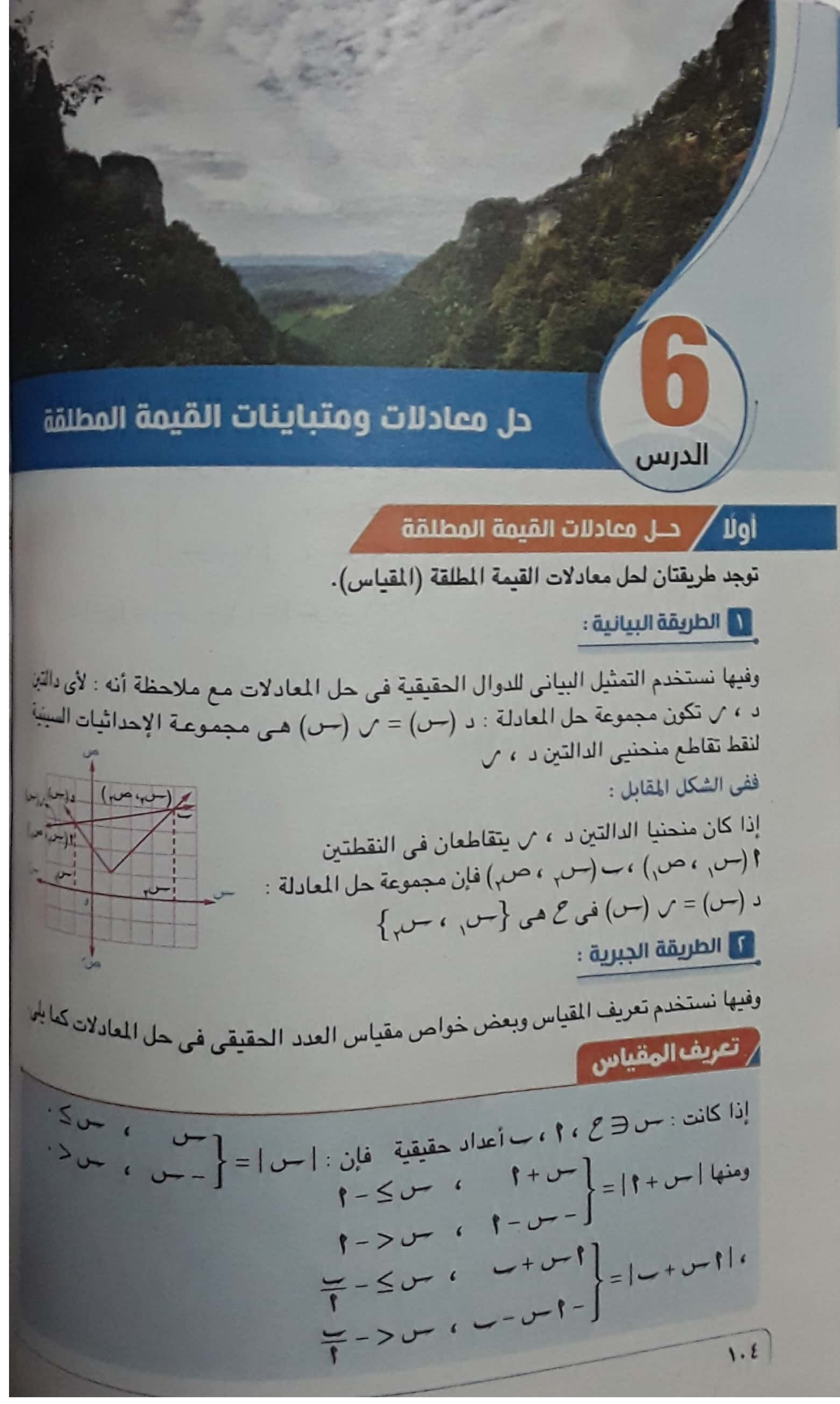
① $د(س) = س^{٣} + س^{٢}\,|س| + ٢$

② $د(س) = (|س| - ١)^{٣}$

③ $د(س) = \dfrac{|س + ١|}{س^{٢} + ٣س + ٢}$

④ $د(س) = \begin{cases} |س + ٢| & ، \quad س \le -١ \\ ١ & ، \quad -١ < س < ١ \\ |س - ٢| & ، \quad س \ge ١ \end{cases}$

⑤ $د(س) = |س + ١| - |س - ١|$



6

الدرس

حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

أولاً حـل معادلات القيمة المطلقة

توجد طريقتان لحل معادلات القيمة المطلقة (المقياس).

١ الطريقة البيانية :

وفيها نستخدم التمثيل البيانى للدوال الحقيقية فى حل المعادلات مع ملاحظة أنه : لأى دالتين د ، ر تكون مجموعة حل المعادلة : د (س) = ر (س) هى مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنيى الدالتين د ، ر

ففى الشكل المقابل :

إذا كان منحنيا الدالتين د ، ر يتقاطعان فى النقطتين ا (س$_1$ ، ص$_1$) ، ب (س$_2$ ، ص$_2$) فإن مجموعة حل المعادلة : د (س) = ر (س) فى ح هى {س$_1$ ، س$_2$}

٢ الطريقة الجبرية :

وفيها نستخدم تعريف المقياس وبعض خواص مقياس العدد الحقيقى فى حل المعادلات كما يلى :

تعريف المقياس

إذا كانت : س ∈ ح ، ا ، ب أعداد حقيقية فإن :

$$|\text{س}| = \begin{cases} \text{س} & \text{،}\ \text{س} \geq 0 \\ -\text{س} & \text{،}\ \text{س} < 0 \end{cases}$$

ومنها

$$|\text{س} + \text{ا}| = \begin{cases} \text{س} + \text{ا} & \text{،}\ \text{س} \geq -\text{ا} \\ -\text{س} - \text{ا} & \text{،}\ \text{س} < -\text{ا} \end{cases}$$

،

$$|\text{ا}\text{س} + \text{ب}| = \begin{cases} \text{ا}\text{س} + \text{ب} & \text{،}\ \text{س} \geq -\frac{\text{ب}}{\text{ا}} \\ -\text{ا}\text{س} - \text{ب} & \text{،}\ \text{س} < -\frac{\text{ب}}{\text{ا}} \end{cases}$$

خواص مقياس العدد الحقيقى

١ $|أ| \geq ٠$

٢ $|أ ب| = |أ| \times |ب|$

٣ $|أ + ب| \leq |أ| + |ب|$

أى أن مقياس مجموع عددين أصغر من أو يساوى مجموع مقياسيهما ويحدث التساوى إذا كان أ ، ب سالبين معًا أو موجبين معًا أو كليهما يساوى الصفر

فمثلًا : $|٤ + (-٧)| < |٤| + |-٧|$ ، $|-٤ + (-٧)| = |-٤| + |-٧|$

ملاحظات

١ لأى عدد حقيقى أ يكون $|أ| = |-أ|$ **فمثلًا :** $|٣| = |-٣|$

٢ $|أ - س| = |س - أ|$ **فمثلًا :** $|٢ - س| = |س - ٢|$

٣ $|س| = حـ ، حـ > ٠ \Leftrightarrow س = \pm حـ$

فمثلًا : إذا كان : $|س| = ٣$ فإن : $س = \pm ٣$

وإذا كان : $أ = \pm ٥$ فإن : $|أ| = ٥$

٤ إذا كان : أ ، ب عددين حقيقيين فإن : $|أ| = |ب| \Leftrightarrow أ = \pm ب$

٥ لأى عدد حقيقى أ يكون $(|أ|)^٢ = أ^٢$

فمثلًا : $(|-٢|)^٢ = ٤$ ، $(|-\frac{١}{٢}|)^٢ = \frac{١}{٤}$

٦ لأى عدد حقيقى أ يكون $\sqrt{أ^٢} = |أ|$

فمثلًا : $\sqrt{(٥)^٢} = |٥| = ٥$ ، $\sqrt{(-٣)^٢} = |-٣| = ٣$

٧ إذا كان : $|س| = س$ فإن : $س \in [٠ ، \infty[$

٨ إذا كان : $|س| = -س$ فإن : $س \in]-\infty ، ٠]$



١ حل المعادلة على الصورة : | أ س + ب | = حـ ، حـ ∈ [٠ ، ∞[

«أى مقياس مقدار من الدرجة الأولى = عدد حقيقى غير سالب»

الحـل البيانـى

الاحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيين

د (س) = | أ س + ب |

، ر (س) = حـ

الحـل الجبـرى

(١) باستخدام تعريف المقياس.

(٢) ما بداخل المقياس = ± العدد الحقيقى

ملاحظـة

إذا كان | أ س + ب | = حـ ، حـ ∈]- ∞ ، ٠ [فإن مجموعة الحل فى ح = ∅

فمثلًا : مجموعة حل المعادلة : | ٣ س - ٤ | = -٥ فى ح هى ∅

مثال ١

أوجد بيانيًا ثم جبريًا مجموعة حل المعادلة : | س - ٢ | = ٣

الحـل

الحل البيانى : بوضع د (س) = | س - ٢ | ، ر (س) = ٣

• نرسم منحنى الدالة

د : د (س) = | س - ٢ |

وهو نفس المنحنى ص = | س |

بإزاحة أفقية وحدتين فى اتجاه و س→

• نرسم منحنى الدالة ر : ر (س) = ٣

وهى دالة ثابتة يمثلها بيانيًا خط مستقيم يوازى محور السينات

ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ٣)

• نوجد نقطتى تقاطع المنحنيين وهما (−١ ، ٣) ، (٥ ، ٣)

∴ مجموعة الحل فى ح = {−١ ، ٥}

الحل الجبرى : أولاً : باستخدام تعريف دالة المقياس :

د (س) = |س − ٢| = { س − ٢ ، س − ٢ ≥ ٠ ، −س + ٢ ، س − ٢ < ٠ .

∴ د (س) = { س − ٢ ، س ≥ ٢ ، −س + ٢ ، س < ٢

عندما س ≥ ٢ : س − ٢ = ٣ ومنها س = ٥ ∈ [٢ ، ∞[

عندما س < ٢ : −س + ٢ = ٣ ومنها س = −١ ∈]−∞ ، ٢[

∴ مجموعة الحل فى ح = {−١ ، ٥}

ثانيًا : باستخدام الخاصية «ما بداخل المقياس = ± العدد الحقيقى»

∵ |س − ٢| = ٣ ∴ س − ٢ = ± ٣

∴ س − ٢ = ٣ ومنها س = ٥ أ، س − ٢ = −٣ ومنها س = −١

∴ مجموعة الحل = {٥ ، −١}

٢ حل المعادلة على الصورة : |أ س + ب| = |جـ س + د|

«أى أن : مقياس مقدار من الدرجة الأولى فى س = مقياس مقدار آخر من الدرجة الأولى فى س»

الحل البيانى

الاحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيين

د (س) = |أ س + ب|

، ر (س) = |جـ س + د|

الحل الجبرى

(١) أحد المقدارين = ± المقدار الآخر.

(٢) بتربيع طرفى المعادلة.



مثال ٢

أوجد بيانيًا ثم جبريًا مجموعة حل المعادلة : | س − ٤ | = | ٢ س − ٥ | فى ع

الحـــل

بوضع د (س) = | س − ٤ |

، ر (س) = | ٢ س − ٥ | = ٢ | س − $٢\frac{١}{٢}$ |

الحل البيانى : الدالة د يمثلها بيانيًا المنحنى :

ص = | س |

بإزاحة أفقية ٤ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

، الدالة ر يمثلها بيانيًا المنحنى : ص = ٢ | س |

بإزاحة أفقية $٢\frac{١}{٢}$ وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

، ∵ المنحنين يتقاطعان فى النقطتين (١ ، ٣) ، (٣ ، ١)

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٣}

الحل الجبرى : **أولاً : باستخدام الخاصية : أحد المقدارين = ± المقدار الآخر**

∵ | س − ٤ | = | ٢ س − ٥ | ∴ س − ٤ = ± (٢ س − ٥) (من خواص المقياس)

∴ س − ٤ = ٢ س − ٥ ومنها س = ١

أ، س − ٤ = −٢ س + ٥   ∴ ٣ س = ٩ ومنها س = ٣

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٣}

ثانيًا : بتربيع طرفى المعادلة :

∵ $(\text{س} - ٤)^٢ = (٢\,\text{س} - ٥)^٢$ ∴ $\text{س}^٢ - ٨\,\text{س} + ١٦ = ٤\,\text{س}^٢ - ٢٠\,\text{س} + ٢٥$

∴ $٣\,\text{س}^٢ - ١٢\,\text{س} + ٩ = ٠$ ∴ $\text{س}^٢ - ٤\,\text{س} + ٣ = ٠$

∴ (س − ٣) (س − ١) = ٠   ∴ س = ٣ أ، س = ١

∴ مجموعة الحل = {٣ ، ١}

٣ حل المعادلة على الصورة : |أ س + ب| = حـ س + ء

«أي أن : مقياس مقدار من الدرجة الأولى فى س = مقدار من الدرجة الأولى فى س»

الحـل البيانـى

الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيين

د (س) = |أ س + ب|

، ر (س) = حـ س + ء

الحـل الجبـرى

نستخدم إعادة تعريف المقياس فنحصل على المعادلتين

أ س + ب = حـ س + ء عند س ≥ $\frac{-ب}{أ}$

، أ س + ب = − حـ س − ء عند س < $\frac{-ب}{أ}$

مثال ٣

أوجد بيانيًا ثم جبريًا مجموعة الحل فى ح لكل من المعادلات الآتية :

١ |س − ٢| = س + ٤   ٢ |س + ٣| − $\frac{١}{٢}$ س = ٣   ٣ |س − ٣| = ٣ − س

الحـل

١ بوضع د (س) = |س − ٢| ، ر (س) = س + ٤

الحل البيانى :

∵ الدالة د يمثلها بيانيًا المنحنى ص = |س|

بإزاحة أفقية وحدتين فى اتجاه و س

، الدالة ر يمثلها بيانيًا المنحنى

ص = س بإزاحة رأسية ٤

وحدات فى اتجاه و ص

∴ المنحنيان يتقاطعان فى نقطة واحدة (−١ ، ٣)

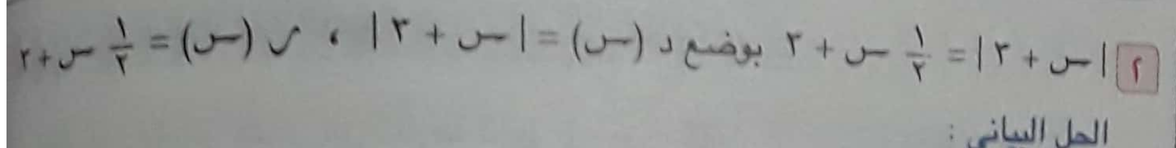
∴ مجموعة الحل = {−١}

الحل الجبرى : د (س) = |س − ٢| = { س − ٢ ، س ≥ ٢ ؛ − س + ٢ ، س < ٢ }

• عندما س ≥ ٢ : س − ٢ = س + ٤ ومنها −٢ = ٤ (غير ممكن) ∴ لا يوجد حل

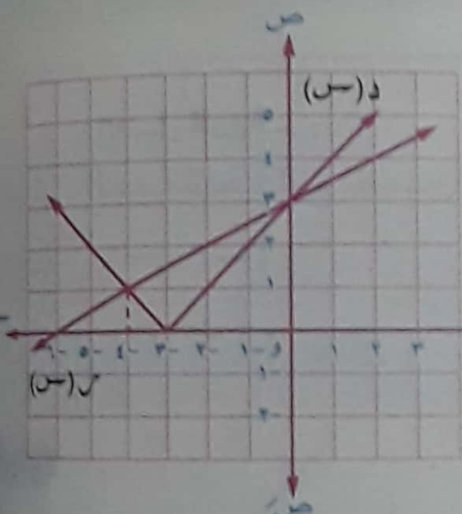
• عندما س < ٢ : − س + ٢ = س + ٤ ومنها س = −١ ∈]−∞ ، ٢[

∴ مجموعة الحل = {−١}



٢ |س + ٣| = $\frac{1}{2}$ س + ٣ بوضع د (س) = |س + ٣| ، ر (س) = $\frac{1}{2}$ س + ٣

الحل البيانى :



د يمثلها المنحنى ص = |س| بإزاحة أفقية ٣ وحدات فى اتجاه و س ، ر يمثلها المنحنى ص = س مع انكماش رأسى فيه : أ = $\frac{1}{2}$ وإزاحة رأسية ٣ وحدات فى اتجاه و ص (أى مستقيم ميله = $\frac{1}{2}$ ويمر بالنقطة (٠ ، ٣))

∴ المنحنيان يتقاطعان فى (٠ ، ٣) ، (–٤ ، ١)

∴ مجموعة الحل = {٠ ، –٤}

الحل الجبرى : د (س) = |س + ٣| = { س + ٣ ، س ≥ –٣ ؛ –س – ٣ ، س < –٣ }

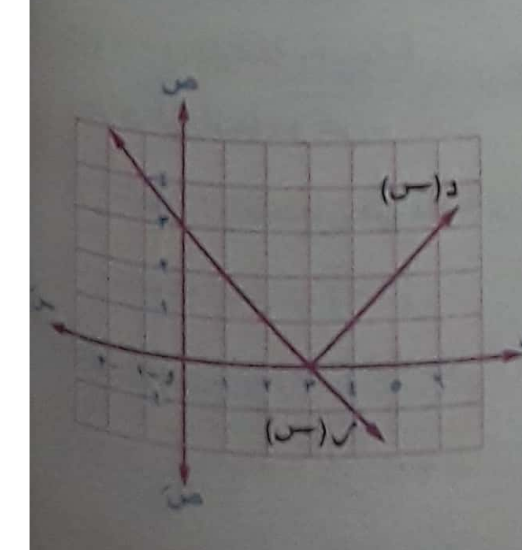
عندما س ≥ –٣ : س + ٣ = $\frac{1}{2}$ س + ٣ ومنها س = ٠ ∈ [–٣ ، ∞[

عندما س < –٣ : –س – ٣ = $\frac{1}{2}$ س + ٣ ومنها س = –٤ ∈]–∞ ، –٣[

∴ مجموعة الحل = {٠ ، –٤}

٣ بفرض أن : د (س) = |س – ٣| ، ر (س) = ٣ – س = –س + ٣

الحل البيانى :



د يمثلها بيانيًا المنحنى ص = |س| بإزاحة أفقية ٣ وحدات فى اتجاه و س ، ر يمثلها بيانيًا المنحنى ص = س بالانعكاس فى محور السينات ثم إزاحة رأسية ٣ وحدات فى اتجاه و ص

∴ المنحنيان يتقاطعان فى عدد لا نهائى من النقط (س ، ص) بحيث إن : س ∈]–∞ ، ٣]

∴ مجموعة الحل =]–∞ ، ٣]

الحل الجبرى : د (س) = | س − ٣ | = { س − ٣ ، س ≥ ٣ ؛ −س + ٣ ، س < ٣ }

عندما س ≥ ٣ : ∴ س − ٣ = ٣ − س ∴ ٢ س = ٦

∴ س = ٣ ∈ [٣ ، ∞[

عندما س < ٣ : ∴ −س + ٣ = ٣ − س

وهذه العلاقة تتحقق لجميع قيم س ∈]−∞ ، ٣[

∴ مجموعة الحل = {٣} ∪]−∞ ، ٣[=]−∞ ، ٣]

مثال ٤

أوجد جبريًا مجموعة الحل فى ح لكل من المعادلات الآتية :

١ | ٣ س − ٩ | − | ٣ − س | = ١٠

٢ √(س² − ٤ س + ٤) + س = ١٠

٣ س² − ٣ | س | − ٢٨ = ٠

الحل

١ ∵ | ٣ س − ٩ | − | ٣ − س | = ١٠ ∴ ٣ | س − ٣ | − | س − ٣ | = ١٠

(لاحظ أن : | س − ٣ | = | ٣ − س |)

∴ ٢ | س − ٣ | = ١٠ ∴ | س − ٣ | = ٥ ∴ س − ٣ = ± ٥

∴ س − ٣ = ٥ ومنها س = ٨

أ، س − ٣ = −٥ ومنها س = −٢ ∴ مجموعة الحل = {٨ ، −٢}

٢ ∵ √(س² − ٤ س + ٤) + س = ١٠ ∴ √((س − ٢)²) = ١٠ − س

∴ | س − ٢ | = ١٠ − س

، ∵ | س − ٢ | = { س − ٢ ، س ≥ ٢ ؛ −س + ٢ ، س < ٢ }

عندما س ≥ ٢ : س − ٢ = ١٠ − س ومنها س = ٦ ∈ [٢ ، ∞[

، عندما س < ٢ : −س + ٢ = ١٠ − س

∴ ٢ = ١٠ (وهذا مستحيل) ∴ مجموعة الحل = {٦}



٣ ∵ |س| = { س ، س ≥ ٠ ؛ -س ، س < ٠ }

∴ $س^٢$ - ٣ |س| - ٢٨ = { $س^٢$ - ٣ س - ٢٨ ، س ≥ ٠ ؛ $س^٢$ + ٣ س - ٢٨ ، س < ٠ }

، عندما س ≥ ٠ : $س^٢$ - ٣ س - ٢٨ = ٠

∴ (س - ٧) (س + ٤) = ٠ ومنها س = ٧ ∈ [٠ ، ∞[أ، س = -٤ ∉ [٠ ، ∞[

، عندما س < ٠ : $س^٢$ + ٣ س - ٢٨ = ٠

∴ (س + ٧) (س - ٤) = ٠ ومنها س = -٧ ∈]-∞ ، ٠[

أ، س = ٤ ∉]-∞ ، ٠[∴ مجموعة الحل = {٧ ، -٧}

حل آخر : ∵ $|س|^٢$ = $|س^٢|$ = $س^٢$

∴ $|س|^٢$ - ٣ |س| - ٢٨ = ٠ ∴ (|س| - ٧) (|س| + ٤) = ٠

∴ |س| = ٧ ومنها س = ± ٧ أ، |س| = -٤ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٧ ، -٧}

مثال ٥

أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين بيانيًا فى ح :

١ |س - ٢| + |س - ١| = ٣

٢ |س - ٣| = ٣ - |س|

الحل

١ |س - ٢| = - |س - ١| + ٣

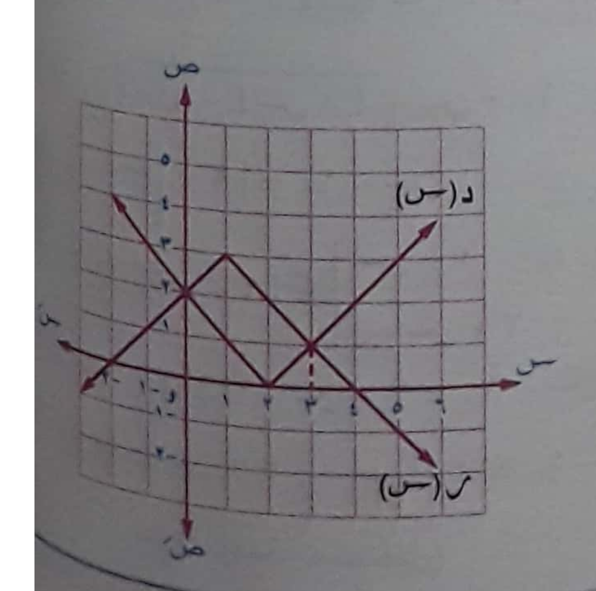
بوضع د (س) = |س - ٢|

، ر (س) = - |س - ١| + ٣

∵ د يمثلها المنحنى ص = |س|

بإزاحة أفقية وحدتين فى اتجاه و س←

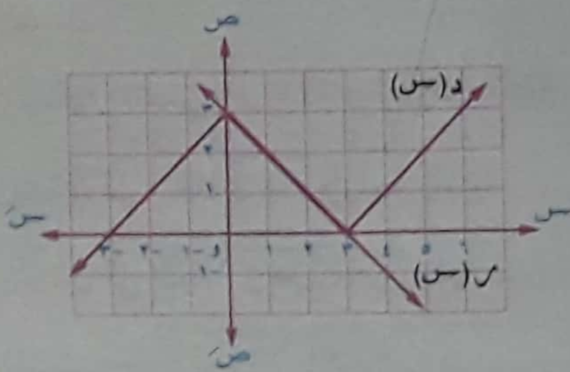
، ر يمثلها المنحنى ص = |س|



بالانعكاس فى محور السينات ثم إزاحة أفقية وحدة واحدة فى اتجاه و $\overleftarrow{\text{س}}$ وإزاحة رأسية ٣ وحدات فى اتجاه و $\overleftarrow{\text{ص}}$

∴ المنحنيان يتقاطعان فى (٠ ، ٢) ، (٣ ، ١)   ∴ مجموعة الحل = {٠ ، ٣}

٢ بوضع د (س) = | س − ٣ | ، ر (س) = ٣ − | س |



∴ د يمثلها المنحنى ص = | س |

بإزاحة أفقية ٣ وحدات فى اتجاه و $\overleftarrow{\text{س}}$

، ر يمثلها صورة المنحنى ص = | س |

بالانعكاس فى محور السينات ثم إزاحة

رأسية ٣ وحدات فى اتجاه و $\overleftarrow{\text{ص}}$

∴ المنحنيان يتقاطعان فى عدد لا نهائى من النقط (س ، ص) بحيث س ∈ [٠ ، ٣]

∴ مجموعة الحل = [٠ ، ٣]

مثال ٦

ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = ٢ − | س − ١ |

ومن الرسم استنتج مجموعة الحل للمعادلة : د (س) = ٠

الحـــل

∵ د (س) = − | س − ١ | + ٢

∴ د يمثلها بيانيًا صورة المنحنى ص = | س | بالانعكاس

فى محور السينات ثم إزاحة أفقية وحدة واحدة فى اتجاه

و $\overleftarrow{\text{س}}$ ثم إزاحة رأسية وحدتان فى اتجاه و $\overleftarrow{\text{ص}}$

∴ مجموعة الحل للمعادلة : د (س) = ٠

هى مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع الخط البيانى للدالة د مع محور السينات

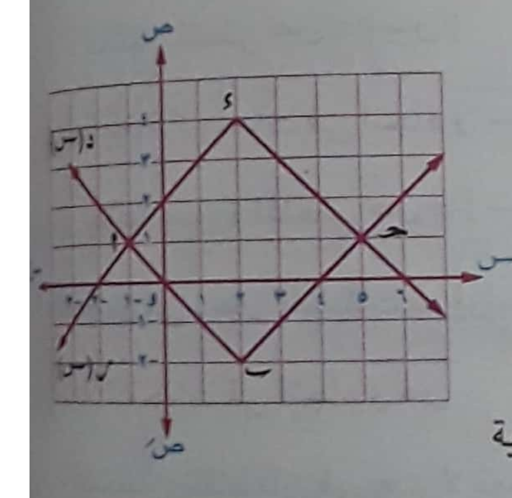
أى مع المستقيم ص = ٠ فنجدها ٣ ، −١   ∴ مجموعة الحل للمعادلة = {٣ ، −١}

مثال ٧

أوجد بالوحدات المربعة المساحة المحصورة بين المنحنيين د ، ر حيث :

د (س) = | س - ٢ | - ٢ ، ر (س) = ٤ - | س - ٢ |

الحل



د يمثلها المنحنى ص = | س | بإزاحة أفقية وحدتين فى اتجاه و س ← وإزاحة رأسية وحدتين فى اتجاه و ص ↓ ، ر يمثلها صورة المنحنى ص = | س | بالانعكاس فى محور السينات ثم إزاحة أفقية وحدتين فى اتجاه و س ← وإزاحة رأسية ٤ وحدات فى اتجاه و ص ←

من الرسم :

المساحة المحصورة بين منحنيى الدالتين د ، ر هى سطح مربع رؤوسه النقط أ (-١ ، ١) ، ب (٢ ، -٢) ، حـ (٥ ، ١) ، ء (٢ ، ٤)

وطول قطره أ حـ = ٥ - (-١) = ٦ وحدة طول

∴ مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين د ، ر

= مساحة سطح المربع أ ب حـ ء = $\frac{1}{2}$ (أ حـ)^2

= $\frac{1}{2}$ × ٣٦ = ١٨ وحدة مربعة.

لاحظ أن

القطرين $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ ينصف كل منهما الآخر ومتعامدان ومتساويان فى الطول

∴ الشكل يمثل مربعًا.



ثانيًا حـل متباينات القيمة المطلقة

١ الحل البيانى لمتباينات القيمة المطلقة

فى الشكل المقابل : لأى دالتين د ، ر :

• مجموعة حل المتباينة : د (س) < ر (س) هى]أ ، ب[

وهى مجموعة قيم س التى يكون عندها منحنى الدالة د أسفل منحنى الدالة ر

• مجموعة حل المتباينة : د (س) > ر (س) هى]-∞ ، أ[∪]ب ، ∞[= ح - [أ ، ب]

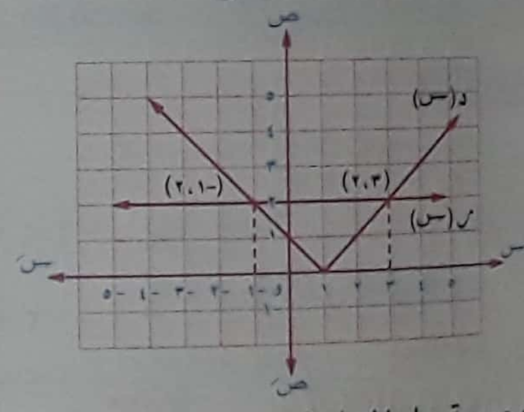
وهى مجموعة قيم س التى يكون عندها منحنى الدالة د أعلى منحنى الدالة ر

لاحظ من الشكل أن : مجموعة حل المعادلة د (س) = ر (س) هى {أ ، ب} ولذلك فإن :

• مجموعة حل المتباينة : د (س) ≤ ر (س) هى [أ ، ب]

• مجموعة حل المتباينة : د (س) ≥ ر (س) هى]-∞ ، أ] ∪ [ب ، ∞[= ح -]أ ، ب[

فمثلًا فى : الشكل ①



مجموعة حل المتباينة :

د (س) < ر (س) هى]-١ ، ٣[

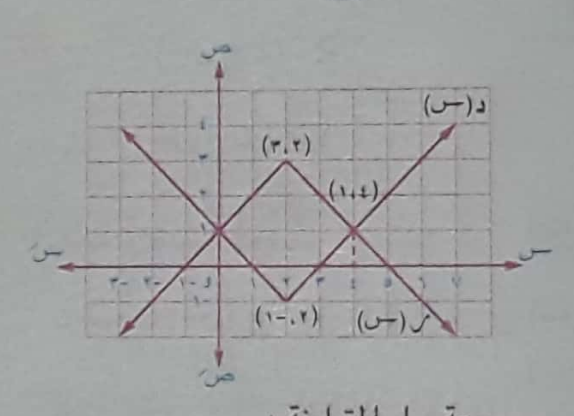
مجموعة حل المتباينة :

د (س) > ر (س) هى ح - [-١ ، ٣]

مجموعة حل المعادلة :

د (س) = ر (س) هى {-١ ، ٣}

الشكل ②



مجموعة حل المتباينة :

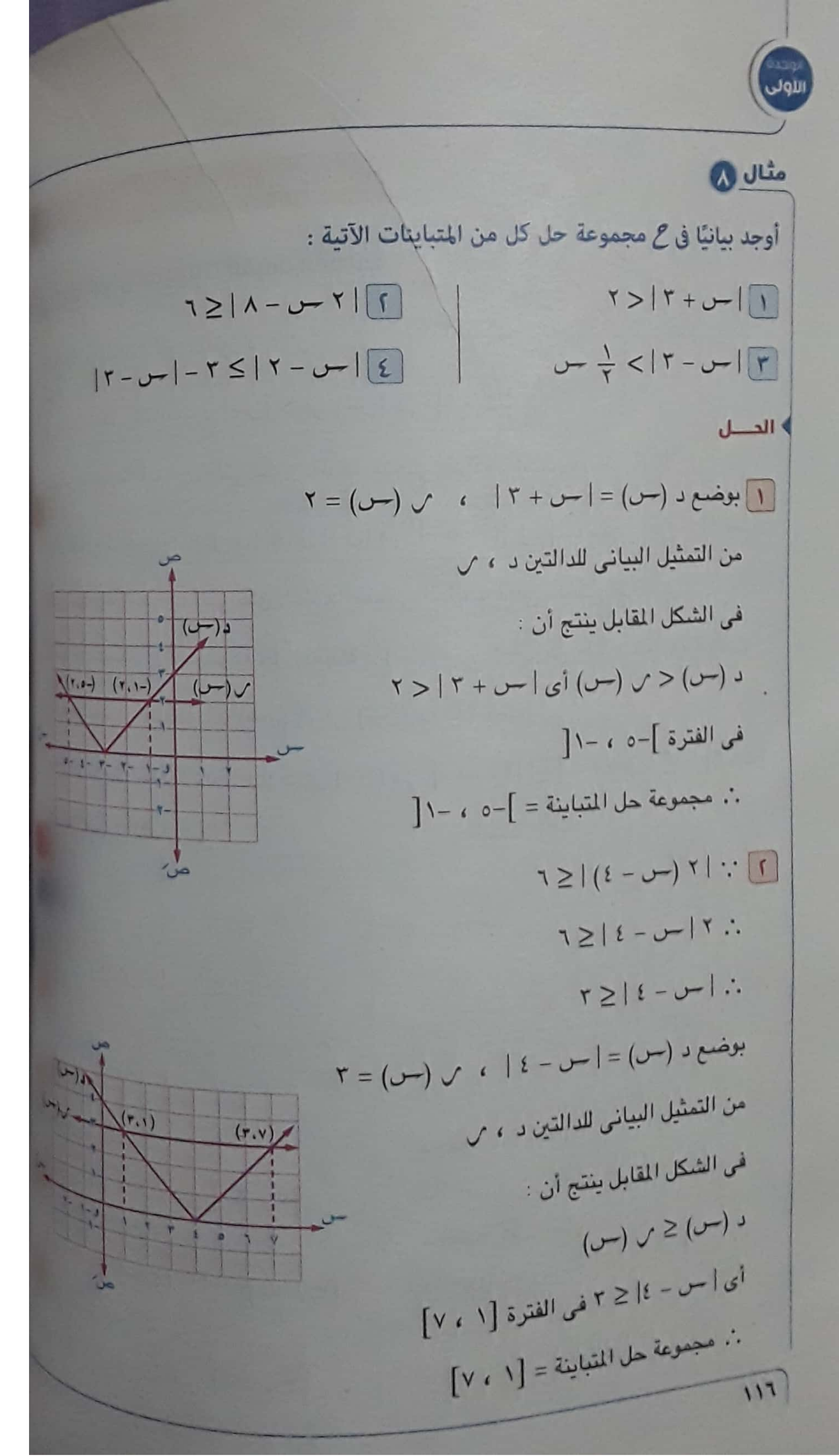
د (س) < ر (س) هى]٠ ، ٤[

مجموعة حل المتباينة :

د (س) > ر (س) هى ح - [٠ ، ٤]

مجموعة حل المعادلة :

د (س) = ر (س) هى {٠ ، ٤}



مثال ٨

أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

١ |س + ٣| < ٢

٢ |٢ س − ٨| ≤ ٦

٣ |س − ٣| > ١/٢ س

٤ |س − ٢| ≤ ٣ − |س − ٣|

الحل

١ بوضع د (س) = |س + ٣| ، ر (س) = ٢

من التمثيل البيانى للدالتين د ، ر

فى الشكل المقابل ينتج أن :

د (س) < ر (س) أى |س + ٣| < ٢

فى الفترة]−٥ ، −١[

∴ مجموعة حل المتباينة =]−٥ ، −١[

٢ ∵ |٢ (س − ٤)| ≤ ٦

∴ ٢ |س − ٤| ≤ ٦

∴ |س − ٤| ≤ ٣

بوضع د (س) = |س − ٤| ، ر (س) = ٣

من التمثيل البيانى للدالتين د ، ر

فى الشكل المقابل ينتج أن :

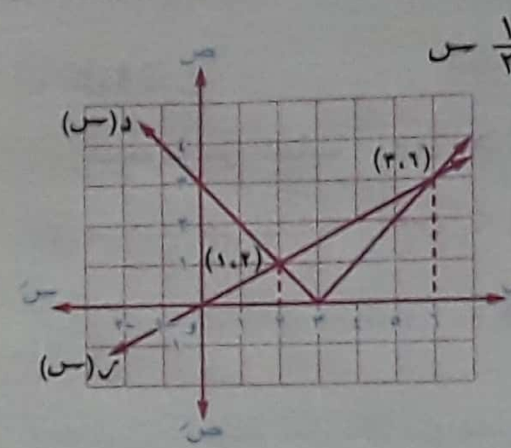
د (س) ≤ ر (س)

أى |س − ٤| ≤ ٣ فى الفترة [١ ، ٧]

∴ مجموعة حل المتباينة = [١ ، ٧]

٣ بوضع د (س) = |س − ٣| ، ر (س) = $\frac{١}{٢}$ س

من التمثيل البيانى للدالتين د ، ر



فى الشكل المقابل ينتج أن : د (س) > ر (س)

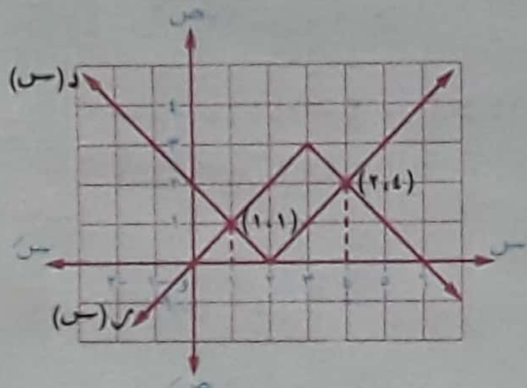
أى |س − ٣| > $\frac{١}{٢}$ س فى الفترة

]−∞ ، ٢[∪]٦ ، ∞[= ح − [٢ ، ٦]

∴ مجموعة حل المتباينة = ح − [٢ ، ٦]

٤ بوضع د (س) = |س − ٢| ، ر (س) = ٣ − |س − ٣| = −|س − ٣| + ٣

من التمثيل البيانى للدالتين د ، ر



فى الشكل المقابل ينتج أن :

د (س) ≥ ر (س) أى :

|س − ٢| ≥ ٣ − |س − ٣| فى الفترة

]−∞ ، ١] ∪ [٤ ، ∞[= ح −]١ ، ٤[

∴ مجموعة حل المتباينة = ح −]١ ، ٤[

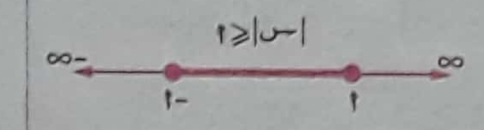
٢ الحل الجبرى لمتباينات القيمة المطلقة

نتائج

* **لكل أ ∈ ح$^+$**

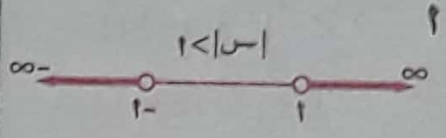
١ إذا كان : |س| < أ فإن : −أ < س < أ

أى أن س ∈]−أ ، أ[



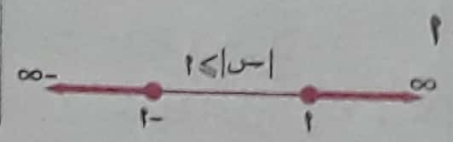
٢ إذا كان : |س| ≤ أ فإن : −أ ≤ س ≤ أ

أى أن س ∈ [−أ ، أ]



٣ إذا كان : |س| > أ فإن : س > أ أو س < −أ

أى أن س ∈ ح − [−أ ، أ]



٤ إذا كان : |س| ≥ أ فإن : س ≥ أ أو س ≤ −أ

أى أن س ∈ ح −]−أ ، أ[

|س| ≥ أ
−∞ ∞
−أ أ



* لكل $\text{أ} \in ح^-$

(١) مجموعة حل المتباينة : |س| < أ ، |س| ≤ أ في ح تساوي ∅

(٢) مجموعة حل المتباينة : |س| > أ ، |س| ≥ أ في ح تساوي ح

مثال ٩

أوجد في ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية :

(١) |٢س − ٥| < ١

(٢) |س + ٢| > ٣

(٣) $\sqrt{٤س^٢ + ١٢س + ٩} \leq ١$

(٤) $\frac{١}{|٢س - ١|} \geq ٥$

(٥) |٢س − ٥| + |٥ − ٢س| < ١٤

الحل

(١) ∵ |٢س − ٥| < ١

∴ −١ < ٢س − ٥ < ١

∴ −١ + ٥ < ٢س < ١ + ٥

∴ ٤ < ٢س < ٦ بالقسمة على ٢

∴ ٢ < س < ٣

∴ مجموعة الحل =]٢ ، ٣[

(٢) ∵ |س + ٢| > ٣

∴ س + ٢ > ٣ أ، س + ٢ < −٣

∴ س > ١ | ∴ س < −٥

∴ مجموعة الحل = ح − [−٥ ، ١]

لاحظ أن

عند حل المتباينة : |س + ٢| > ٣

يمكن أن نحل أولًا المتباينة

|س + ٢| ≤ ٣ كالتالي

∴ −٣ ≤ س + ٢ ≤ ٣

∴ −٥ ≤ س ≤ ١ ∴ م.ح = [−٥ ، ١]

∴ م.ح المتباينة المطلوبة |س + ٢| > ٣

هي ح − [−٥ ، ١]

(٣) ∵ $\sqrt{٤س^٢ + ١٢س + ٩} \leq ١$

∴ $\sqrt{(٢س + ٣)^٢} \leq ١$

∴ |٢س + ٣| ≤ ١

∴ −١ ≤ ٢س + ٣ ≤ ١

∴ −٤ ≤ ٢س ≤ −٢

∴ −٢ ≤ س ≤ −١

∴ مجموعة الحل = [−٢ ، −١]

٤ ∵ $\frac{١}{|٢س - ١|} \geq ٥$

∴ $|٢س - ١| \leq \frac{١}{٥}$

∴ $-\frac{١}{٥} \leq ٢س - ١ \leq \frac{١}{٥}$

∴ $\frac{٤}{٥} \leq ٢س \leq \frac{٦}{٥}$

∴ $\frac{٤}{١٠} \leq س \leq \frac{٣}{٥}$

، ∵ $|٢س - ١| = ٠$ عندما $س = \frac{١}{٢}$

∴ مجموعة الحل = $[\frac{٤}{١٠} ، \frac{٣}{٥}] - \{\frac{١}{٢}\}$

لاحظ أن

- إذا كان أ ، ب ∋ ح⁺ ، أ < ب فإن $\frac{١}{أ} > \frac{١}{ب}$
- عند إيجاد مجموعة حل المتباينة يجب استبعاد مجموعة أصفار المقام من مجموعة الحل.

٥ ∵ $|٢س - ٥| + |٥ - ٢س| < ١٤$ ∴ $|٢س - ٥| + |٢س - ٥| < ١٤$

∴ $٢|٢س - ٥| < ١٤$ وبالقسمة على ٢

∴ $|٢س - ٥| < ٧$

∴ $-٧ < ٢س - ٥ < ٧$

∴ $-٢ < ٢س < ١٢$

∴ $-١ < س < ٦$

∴ مجموعة الحل = $]-١ ، ٦[$

ثالثًا تطبيقات على خواص معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

مثال ١٠

عين مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

١ د (س) = $\frac{٢س}{|س| - ٢}$

٢ د (س) = $\frac{س^٢}{|س - ١| + ٢}$

٣ د (س) = $\sqrt{٤ - |س|}$

٤ د (س) = $\sqrt{|س| - ٢}$

٥ د (س) = $\frac{٢س}{\sqrt{|س - ٣| - ٢}}$

٦ د (س) = $\frac{س^٢}{\sqrt{٣ - |س + ٢|}}$



الحـــل

١ نوجد أصفار المقام :

|س| − ٣ = ٠ ∴ |س| = ٣

∴ س = ± ٣ ∴ المجال = ع − {٣ ، −٣}

٢ نوجد أصفار المقام :

|س − ١| + ٢ = ٠ ∴ |س − ١| = −٢

، ∵ −٢ < صفر وهذا يتعارض مع تعريف القيمة المطلقة

∴ لا يوجد أصفار للمقام ∴ المجال = ع

٣ تكون الدالة د معرفة بشرط :

٤ − |س| ≥ ٠ ∴ |س| ≤ ٤

∴ −٤ ≤ س ≤ ٤ ∴ المجال = [−٤ ، ٤]

٤ تكون الدالة د معرفة بشرط :

|س| − ٢ ≥ ٠ ∴ |س| ≥ ٢

∴ س ≥ ٢ أ، س ≤ −٢

∴ المجال = ع −]−٢ ، ٢[

٥ تكون الدالة د معرفة بشرط :

|س − ٣| − ٢ > ٠ ∴ |س − ٣| > ٢

∴ س − ٣ > ٢ أ، س − ٣ < −٢

∴ س > ٥ | س < ١

∴ المجال = ع − [١ ، ٥]

٦ تكون الدالة د معرفة بشرط :

٣ − |س + ٢| > ٠ ∴ |س + ٢| < ٣

∴ −٣ < س + ٢ < ٣ ∴ −٥ < س < ١

∴ المجال =]−٥ ، ١[

مثال ١١

اكتب متباينة القيمة المطلقة التى تعبر عن :

١ درجة طالب فى أحد الاختبارات تتراوح من ٧٠ إلى ٩٠ درجة

٢ العمق الذى تعيش فيه بعض الأسماك تحت سطح الماء فى حوض سمك ارتفاعه الداخلى ٤٠ سم

الحل

١ بفرض أن درجة الطالب = س درجة

∴ ٧٠ ≤ س ≤ ٩٠

(بإضافة −٨٠ إلى أطراف المتباينة)

∴ ٧٠ − ٨٠ ≤ س − ٨٠ ≤ ٩٠ − ٨٠

∴ −١٠ ≤ س − ٨٠ ≤ ١٠

∴ متباينة القيمة المطلقة هى |س − ٨٠| ≤ ١٠

لاحظ أن

٨٠ هو الوسط الحسابى للعددين ٧٠ ، ٩٠

٢ بفرض أن العمق الذى تعيش فيه هذه الأسماك = س سم

∴ ٠ < س < ٤٠ (بإضافة −٢٠ إلى أطراف المتباينة)

∴ ٠ − ٢٠ < س − ٢٠ < ٤٠ − ٢٠

∴ −٢٠ < س − ٢٠ < ٢٠

∴ متباينة القيمة المطلقة هى |س − ٢٠| < ٢٠

لاحظ أن

٢٠ هو الوسط الحسابى للعددين ٠ ، ٤٠

مثال ١٢

ابحث نوع كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك:

١ $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{جتا}\ \text{س}}{|\text{س}| - ٣}$

٢ $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{|٢ + \text{س}| - |٢ - \text{س}|}{|٢ + \text{س}| + |٢ - \text{س}|}$

الحل

١ ∵ $\text{د}(-\text{س}) = \dfrac{\text{جتا}(-\text{س})}{|-\text{س}| - ٣} = \dfrac{\text{جتا}\ \text{س}}{|\text{س}| - ٣} = \text{د}(\text{س})$

∴ الدالة د زوجية.

لاحظ أن

$|\text{س}| = |-\text{س}|$

٢ ∵ $\text{د}(-\text{س}) = \dfrac{|٢ - \text{س}| - |٢ + \text{س}|}{|٢ - \text{س}| + |٢ + \text{س}|}$

$= \dfrac{-(|٢ + \text{س}| - |٢ - \text{س}|)}{|٢ + \text{س}| + |٢ - \text{س}|} = -\text{د}(\text{س})$

∴ الدالة د فردية.



على حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة



📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

أولا تمارين على حل معادلات القيمة المطلقة

١ أوجد جبريًا فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① ٤ |س| − ٢٠ = ٠ «{٥ ، −٥}» ② 📖 |٣ − ٢س| = ٧ «{٥ ، −٢}»

③ ٣ − |س + ٢| = ٢ «{−١ ، −٣}»

④ ٢ |س| = ٣ − |س| «{١ ، −١}»

⑤ 📖 |س − ٢| = ٣س − ٤ «{$\frac{٣}{٢}$}»

⑥ |س + ٢| − س + ١ = ٠ «∅»

⑦ 📖 |س + ٢| + س − ٢ = ٠ «{٠}»

⑧ ٥س − ٢ |س| = ٢١ «{٧}»

⑨ |س + ٥| = |س − ٣| «{−١}»

⑩ 📖 |٢س − ٦| = |س − ٣| «{٣}»

⑪ 📖 |س − ١| − ٢ |٢ − س| = ٠ «{٣ ، $\frac{٥}{٣}$}»

⑫ $س^{٢}$ − ٥ |س| + ٦ = ٠ «{٢ ، −٢ ، ٣ ، −٣}»

⑬ $\sqrt{س^{٢}}$ − ٢س = ٦ «{−٢}»

⑭ 📖 $\sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤}$ = ٤ «{−٢ ، ٦}»

⑮ 📖 |س| + س = ٠ «]−∞ ، ٠]»

⑯ 📖 |س + ٣| + ٢س = ٠ «{−١}»

⑰ 📖 $\sqrt{س^{٢} - ٦س + ٩}$ + ٢س = ٩ «{٤}»

(١٨) |س − ٣|^{٢} − |س − ٣| = صفر ، {٣ ، ٢ ، ٤}

(١٩) ٥ |٣ − س| − ٢ $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩}$ = ١٢ ، {٧ ، −١}

(٢٠) |س^{٢} − ١| = |س − ١| ، {١ ، ٠ ، −٢}

(٢١) |س + ١||س − ١| = ٢٦ ، {٣$\sqrt{٣}$ ، −٣$\sqrt{٣}$}

(٢٢) |س + ١|^{٢} − ٣ |س + ١| − ١٠ = ٠ ، {٤ ، −٦}

(٢٣) (س − ٥)^{٢} = |٢ س − ١٠| ، {٥ ، ٧ ، ٣}

(٢٤) س |س| − س = ٠ ، {٠ ، ١ ، −١}

(٢٥) س |٥ − س| = ٦ ، {٢ ، ٣ ، ٦}

(٢٦) |س^{٢} + س − ١٠| = ١٠ ، {٠ ، −١ ، −٥ ، ٤}

(٢٧) $\frac{\text{٤ س} - ٨}{|\text{س} - ٢|}$ = س ، {٤ ، −٤}

(٢٨) س^{٣} |س| = ٨ س ، {−٢ ، ٠ ، ٢}

٢ أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية ، وحقق الناتج جبريًا :

(١) |س| − ٤ = ٠ ، {٤ ، −٤}

(٢) |س| + ٢ = ٠ ، ∅

(٣) ٢ − |س + ٢| = ٠ ، {٠ ، −٤}

(٤) $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٤}$ = ٣ ، {٥ ، −١}

(٥) |س + ٣| + س = ٥ ، {١}

(٦) |س − ٢| = ٣ س − ٤ ، {١ $\frac{١}{٢}$}

(٧) |٢ س + ٤| = ١ − س ، {−١ ، −٥}

(٨) |٢ س + ٥| = س − ٤ ، ∅

(٩) |س + ٢| = |س − ٣| ، {$\frac{١}{٢}$}

(١٠) |س − ٢| + |س − ١| = صفر ، ∅

(١١) |س − ٣| = |٢ س + ١| ، {−٤ ، $\frac{٢}{٣}$}

(١٢) |س − ٤| = ٤ − س «]−∞ ، ٤]»

(١٣) |س + ٢| = س + ٢ «[−٢ ، ∞[»

(١٤) |س − ٣| − |س + ٢| = ٥ «]−∞ ، −٢]»

(١٥) |س − ٣| = ٤ − |س + ١| «[−١ ، ٣]»

(١٦) |س + ٢| = $س^٢$ + ٢ «{٠ ، ١}»

---

٣ أثبت أن الدالة د : حيث د (س) = $\frac{١٢}{|س| + ٢}$ زوجية ، ثم أوجد جبريًا مجموعة حل المعادلة د (س) = ٢ «{−٤ ، ٤}»

---

٤ ارسم الشكل البيانى للدالة د : حيث د (س) = |٢ س + ٥| − ٣ وعين مدى الدالة وادرس اطرادها ومن الرسم استنتج مجموعة حل المعادلة : |٢ س + ٥| − ٣ = ٠ وحقق ذلك جبريًا.

«{−١ ، −٤}»

---

٥ ارسم منحنى الدالة د : د (س) = ١ − |٢ س| واستنتج من الرسم مدى الدالة واطرادها ، وأثبت أنها زوجية ، ثم من الرسم أو بأى طريقة أخرى أوجد مجموعة حل المعادلة :

١ − |٢ س| = −٣ «{−٢ ، ٢}»

---

٦ أثبت أن الدالة د : د (س) = $\frac{١ - |س|}{|س|}$ زوجية ثم ارسم منحنى د ثم أوجد بيانيًا أو جبريًا مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ ، وتحقق من صحة الناتج. «{−١ ، ١}»

---

٧ ارسم الشكل البيانى للدالة د : حيث د (س) = |س − ١| + س + ١ موضحًا مدى الدالة ودارسًا الاطراد ثم أوجد مجموعة حل المعادلة : د (س) = ٣ «{$\frac{٣}{٢}$}»

---

٨ ارسم فى شكل واحد الدالتين د ، ر حيث د (س) = $س^٢$ |س| ، ر (س) = ٢ − |س| ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة د (س) = ر (س) «{−١ ، ١}»

ثانيًا تمارين على حل متباينات القيمة المطلقة

٩ أوجد فى ع مجموعة حل كل من المتباينات الآتية جبريًا :

(١) |س − ٣| ≤ ٥ ‹ [−٢ ، ٨] ›

(٢) |س − ٣| ≥ ٥ ‹ ع −]−٢ ، ٨[›

(٣) |٢س + ٥| > ٣ ‹ ع − [−٤ ، −١] ›

(٤) |٣ − س| < ٧ ‹]−٤ ، ١٠[›

(٥) |(س − ٣)/٤| ≤ ١ ‹ [−١ ، ٧] ›

(٦) |٢س + ٣| + ٥ < ٤ ‹ ∅ ›

(٧) ١ / |٢س − ٥| ≥ ٣ ‹ [٧/٣ ، ٨/٣] − {٥/٢} ›

(٨) ١ / |٣س| ≥ ٥ ‹ [−١/١٥ ، ١/١٥] − {٠} ›

(٩) ١ / |٢س − ٣| > ٢ ‹]٥/٤ ، ٧/٤[− {٣/٢} ›

(١٠) |٢س − ٣| + ٣ > ٧ ‹ ع − [−١/٢ ، ٧/٢] ›

(١١) √(س² − ٢س + ١) ≥ ٤ ‹ ع −]−٣ ، ٥[›

(١٢) √(٤س² − ١٢س + ٩) ≤ ٩ ‹ [−٣ ، ٦] ›

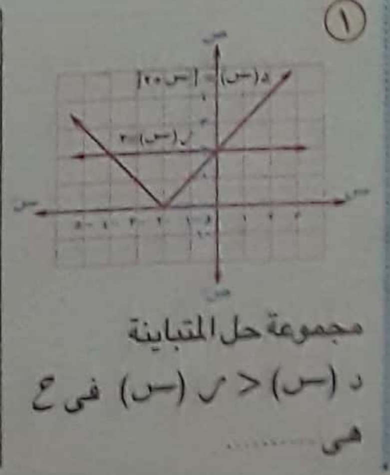
(١٣) |س − ٢| + |٢ − س| < ٦ ‹]−١ ، ٥[›

(١٤) |٣س − ٢| + ٢ |٦س − ٤| ≥ ٢٠ ‹ ع −]−٢/٣ ، ٢[›

(١٥) √((س + ٢)²) + |٢س + ٤| ≥ ٦ ‹ ع −]−٤ ، ٠[›

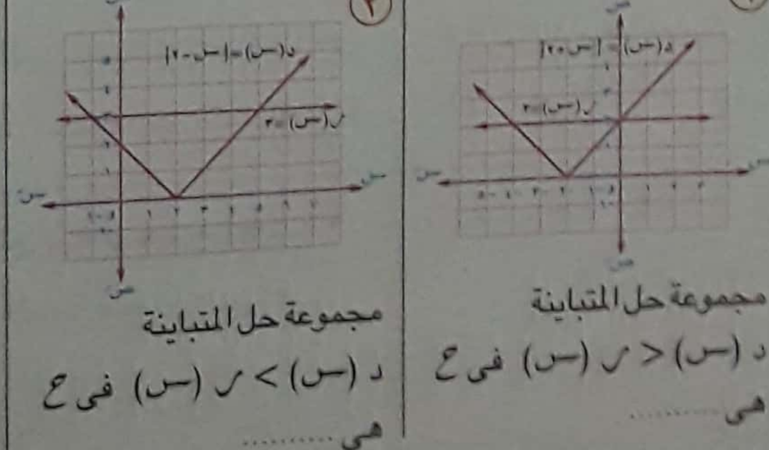
١٠ باستخدام الأشكال البيانية الآتية أكمل :

(١)



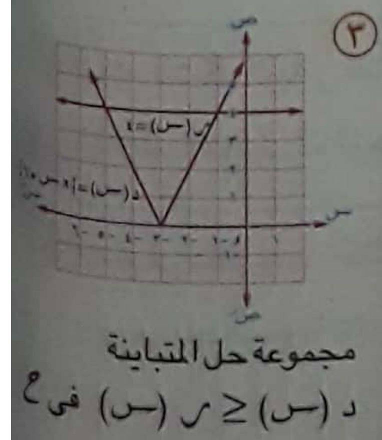
مجموعة حل المتباينة د (س) > ر (س) فى ع هى ....

(٢)



مجموعة حل المتباينة د (س) < ر (س) فى ع هى ....

(٣)



مجموعة حل المتباينة د (س) ≥ ر (س) فى ع هى ....

١١ أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية بيانيًا ثم حقق الناتج جبريًا :

① $|س - ١| < ٢$

② $|٢س - ٥| \geq ٢$

③ $\sqrt{٤س^{٢} - ١٢س + ٩} > ٥$

④ $|س + ٣| < -س$

⑤ $|س - ٢| < \frac{١}{٢}س + ٦$

⑥ $|س - ٣| + |س - ٤| > ٥$

١٢ اكتب على صورة متباينة القيمة المطلقة كلًا مما يأتى :

① $-٤ \leq س \leq ٤$

② $٠ < س < ٦$

③ $س \leq -٢$ أو $س \geq ٢$

④ $س \in ح - [-٢ ، ٦]$

١٣ اكتب متباينة القيمة المطلقة التى تعبر عن :

① درجة طالب فى اختبار ما تقع بين ٦٠ إلى ١٠٠ درجة

② درجة حرارة مقيسة بالترمومتر الطبى تقع بين ٣٥° C ، ٤٢° C

③ توجد الطحالب الخضراء فى المحيطات على عمق يصل إلى ٣٠ مترًا.

ثالثًا تمارين متنوعة

١٤ أوجد مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

① $د(س) = \frac{٢}{|س| - ١}$

② $د(س) = \frac{٣}{|س| + ١}$

③ $د(س) = \frac{٣س}{|س - ٢| - ٥}$

④ $د(س) = \sqrt{٥ - |س|}$

⑤ $د(س) = \sqrt{|س| - ٥}$

⑥ $د(س) = \frac{١}{\sqrt{٥ - |س|}}$

١٥ ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

① $د(س) = س|س|$

② $د(س) = س^{٢}|س| - ١$

③ $د(س) = \frac{|١ + س| + |١ - س|}{|١ + س| - |١ - س|}$

④ $د(س) = \frac{س^{٢} جا ٢س}{٥ + |٢س|}$

⑤ $د(س) = ٢|س| طاس + ٢س |طاس|$

⑥ $د(س) = \sqrt{|س| + س}$

١٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان مجال الدالة د : د (س) = س ÷ (|س| + أ) هو ح − {−٢ ، ٢}
فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ± ٢ (د) صفر

② إذا كان : د (س) = |س − ٢| + ٤ فإن مجموعة حل المعادلة : د (س + ٢) = ٦
هو ....

(أ) {٠ ، ٤} (ب) {± ٢} (جـ) {٢ ، ٤} (د) {−٢ ، −٤}

③ إذا كان : د (س) = |س − ٢| + ٤ فإن مجموعة حل المعادلة د (س + ٢) = ٣
هو ....

(أ) {١ ، ٢} (ب) ح (جـ) ∅ (د) {−١ ، −٣}

④ إذا كان : أ > ٠ ، ب < ٠ فإن أى مما يأتى يكون دائمًا سالب ؟

(أ) |أ ب| (ب) أ |ب| (جـ) |أ| ب (د) أ + |ب|

⑤ إذا كانت : س ∈ [−١ ، ٤] فإن : |٢ س − ٣| ≤ ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) −٥

⑥ مجموعة حل المتباينة : √(س² − ٤ س + ٤) > ٠ فى ح هى ....

(أ) ح − {٢} (ب) ح − {−٢} (جـ) ح (د) ∅

⑦ مجموعة حل المتباينة : |س − ٢| ≥ −٤ هى ....

(أ)]−٢ ، ٦[(ب) [−٢ ، ٦] (جـ) ح (د) ∅

⑧ مجموعة حل المتباينة : |س + ٢| > −١ فى ح هى ....

(أ)]−٣ ، −١[
(ب) ح
(جـ) ح − [−٣ ، −١]
(د) ∅

⑨ عدد نقط تقاطع المنحنيين : ص = |س + ٢| ، ص = ٢ − |س| هى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لانهائى.

⑩ مجموعة حل المعادلة : |س − ٣| = |٣ − س| هى ....

(أ) {٣} (ب) {± ٣} (جـ) ح (د) ∅

١٧ أوجد بالوحدات المربعة المساحة المحصورة بين منحنيي الدالتين د ، ر حيث :

① د (س) = | س + ٣ | + ٢ ، ر (س) = ٤

② د (س) = − | س − ٢ | + ٣ ، ر (س) = صفر

③ د (س) = | س − ٢ | − ١ ، ر (س) = ٥ − | س − ٢ |

---

١٨ أثبت أن الدالة د حيث د (س) = $\frac{|س| + ١}{|س|}$ زوجية ، وارسم منحنى د ،

ثم أوجد بيانيًا وجبريًا مجموعة حل المعادلة د (س) = ٢ س − ٢ ، وتحقق من صحة الحل.

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

١٩ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مجموعة حل المعادلة : | س + ١ |^{٢} + | ٢ س + ٣ | = ٠ هى ....

(أ) {−١ ، $\frac{-٣}{٢}$}　(ب) ح　(جـ) {١ ، $\frac{٣}{٢}$}　(د) ∅

② مجموعة حل المعادلة : | س^{٢} − ٤ س + ٣ | = | س − ٣ | هى ....

(أ) {٠ ، ٢}　(ب) {٢ ، ٣}

(جـ) {٠ ، ٣}　(د) {٠ ، ٢ ، ٣}

③ أصغر قيمة للمقدار : $\frac{|س| + |ص|}{|س + ص|}$ هى ....

(أ) −١　(ب) صفر　(جـ) ١　(د) ٢

④ إذا كان : ٢^{س} = ٦١ فإن : | س − ٦ | + | س − ٥ | = ...

(أ) −١١　(ب) −١　(جـ) ١　(د) ١١

⑤ إذا كان : أ^{٢} ب > ٠ ، $\frac{أ}{ب}$ > ٠ فإن : $\sqrt{أ^{٢}}$ + $\sqrt{ب^{٢}}$ − (ب − أ) = ...

(أ) ٢ أ　(ب) −٢ ب　(جـ) −٢ أ + ٢ ب　(د) صفر

(٦) إذا كان: −٤ ≤ س ≤ ٦ وكان أ ≤ |٤ س − ٨| ≤ ب

فإن: أ + ب = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٢٠ (جـ) ١٨ (د) ١٦

(٧) حاصل ضرب جذرى المعادلة: $س^{٢}$ − ٣ |س| − ١٠ = ٠ يساوى ....

(أ) −٢٥ (ب) −١٠ (جـ) ١٠ (د) ٢٥

(٨) عدد قيم س الصحيحة التى تحقق أن: ٣ < |س| < ٨ يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٠

(٩) إذا كانت د (س) = |٢ س − ٥| ، ر (س) = |س + ١|

فإن مجموعة حل المعادلة: (ر ∘ د) (س) = ٣ هى ....

(أ) {٢ ، −٤} (ب) {$\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٧}{٢}$}

(جـ) {٣ ، ٧} (د) {$\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٩}{٢}$}

٢٠ أوجد جبريًا فى ح* مجموعة حل كل مما يأتى:

(١) (س + ١) (|س| − ١) + $\frac{١}{٢}$ = صفر — {$\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، −١ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، −١ − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$}

(٢) ||٢ س + ٣| − ٨| = ٥ — {−٨ ، ٥ ، ٠ ، −٣}

(٣) $\frac{٢}{|س|}$ + |س| = ٣ — {٢ ، −٢ ، ١ ، −١}

(٤) $\sqrt{(س - \frac{١}{س})^{٢} + ٤}$ = ٢ — {١ ، −١}

(٥) |$س^{٢}$ − ٣| + $\frac{٢}{|س^{٢} - ٣|}$ = ٣ — {± ٢ ، ± $\sqrt{٢}$ ، ± $\sqrt{٥}$ ، ± ١}

(٦) |٤ − س| + |س − ٢| = ١٠ — {٨ ، −٢}

(٧) (|٢ س − ٣| − ٥) (|٢ س − ٣| + ٥) > ١١ — ح − [$\frac{-٣}{٢}$ ، $\frac{٩}{٢}$]



تطبيقات حياتية على الوحدة الأولى

من أسئلة الكتاب المدرسى

تطبيقات حياتية على الدرس الأول

١ الربط بالميكانيكا :

إذا كانت سرعة دراجة بخارية ع (ن) بالسنتيمتر/ثانية تعطى بالدالة ع حيث :

$$ع(ن) = \begin{cases} ٨ ن &، ٠ \leq ن \leq ١٠ \\ ٨٠ &، ١٠ < ن < ٢٠٠ \\ -٤ ن + ٨٨٠ &، ٢٠٠ \leq ن < ٢٢٠ \end{cases}$$

حيث ن الزمن بالثانية

أوجد : ① ع (١٠) ② ع (١٥٠) ③ ع (٢١٠)

---

٢ الربط بالهندسة : إذا كان ح محيط مربع طول ضلعه ل اكتب محيط المربع كدالة فى طول ضلعه ح (ل)

ثم أوجد : ① ح (٣) ② ح $\left(\frac{١٥}{٤}\right)$

---

٣ الربط بالهندسة : إذا كانت م مساحة دائرة طول نصف قطرها نق. اكتب المساحة كدالة فى طول نصف القطر م (نق)

ثم أوجد : ① م $\left(\frac{١}{٢}\right)$ ② م (٥)

تطبيق حياتى على الدرس الثالث

الربط بالصناعة : يعمل سعيد فى مصنع لإنتاج المصابيح الموفرة للطاقة ، فإذا كان يتقاضى ٨ جنيهات أجرًا عن كل ساعة عمل بالإضافة إلى ٠,٣ جنيهًا عن كل مصباح ينتج يوميًا.

① اكتب قاعدة الدالة د التى تعبر عن أجر سعيد إذا كان يعمل ٧ ساعات يوميًا.

② هل الدالة د أحادية ؟ فسر إجابتك.

تطبيقات حياتية على الدرس الخامس

١ الربط مع التجارة : يدفع تاجر غلال ٥٠ جنيهًا عن كل طن يدخل أو يخرج من مستود...
كأجر تحميل أو تنزيل ، اكتب الدالة التى تمثل تكاليف التحميل أو التنزيل ومثلها بيانيًا

---

٢ الربط مع الميكانيكا : يقطع جسم مسافة ف مترًا فى ٣ دقائق. إذا تحرك الجسم بسرعة
ثابتة مقدارها ٣٠ مترًا / دقيقة ، بين أن سرعة الجسم ع تتغير عكسيًا بتغير الزمن (ن) لقطع
هذه المسافة ، واكتب الدالة التى تمثل السرعة والزمن ومثلها بيانيًا ثم أوجد زمن قطع هذه
المسافة إذا تحرك الجسم بسرعة ٤٥ مترًا / دقيقة.

---

٣ الربط مع الصناعة : صممت بوابة حديدية
ارتفاع جانبيها ٣ أمتار وقوسها على شكل جزء
من منحنى الدالة د : د (س) = أ (س − ٢)^{٢} + ٤
كما فى الشكل المقابل.

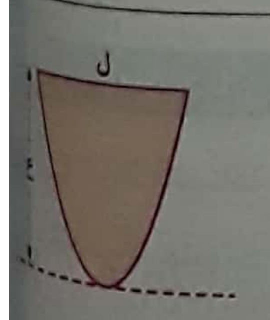
٣ متر
س

أوجد : (١) قيمة أ
(٢) أقصى ارتفاع للبوابة.
(٣) عرض البوابة

« $-\frac{١}{٤}$ ، ٤ متر ، ٤ متر »

---

٤ الربط مع الهندسة : إذا علمت أن مساحة الشكل المحصور
بين منحنى الدالة التربيعية والقطعة المستقيمة الأفقية المرسومة
بين أى نقطتين عليه والموضحة فى الشكل المقابل تعطى بالعلاقة
م = $\frac{٢}{٣}$ ل ع



(١) أوجد مساحة الشكل المحصور بين محور السينات ومنحنى الدالة
د : د (س) = س^{٢} − ٦ س + ٥ بالوحدات المربعة.

② ارسم على نفس الشبكة البيانية منحنيى الدالتين د ، ر

حيث ر (س) = |س - ٣| - ٢ ثم أوجد مساحة الجزء المحصور بينهما بالوحدات المربعة.

«$\frac{٣٢}{٣}$ ، $\frac{٢٠}{٣}$ وحدة مربعة»

تطبيقات حياتية على الدرس السادس

١ تخطيط المدن :

قطعة أرض محصورة بين منحنيى الدالتين د ، ر حيث : د (س) = |س - ٣| - ٢ ، ر (س) = ٣ ، احسب مساحتها بالوحدات المربعة وإذا كان طول الوحدة ٨ أمتار احسب مساحة الأرض بالأمتار المربعة.

«١٦٠٠ م^{٢}»

---

٢ شبكات الطريق : طريقان الأول يمثله منحنى الدالة د : د (س) = |س - ٥| ، والثانى يمثله منحنى الدالة ر : ر (س) = ٥ - $\frac{٢}{٣}$ س ، إذا تقاطع الطريقان فى نقطتى أ ، ب أوجد المسافة بين أ ، ب لأقرب كيلومتر إذا كانت وحدة الأطوال تمثل مسافة قدرها ٥ كيلومترات.

«٣٦ كم»

---

٣ تطبيق حياتى على حل المتباينة : تسمح إحدى شركات الغاز الطبيعى بتوظيف قارئ العداد إذا كان طوله يتراوح بين ١٧٨ سم ، ١٩٢ سم. عبر عن الأطوال الممكنة لمن يتقدم لشغل هذه الوظيفة بمتباينة القيمة المطلقة.

«|س - ١٨٥| ≤ ٧»

---

٤ الربط بالميكانيكا : يتحرك جسم بسرعة منتظمة مقدارها ٨ سم/ث من الموضع أ إلى الموضع حـ مرورًا بالموضع ب دون توقف ، وكانت المسافة بين الجسم والموضع ب تحسب بالقاعدة ف (ن) = ٨ |٥ - ن| حيث ن الزمن بالثوانى ، ف المسافة بالسنتيمترات.

① احسب المسافة بين الجسم والموضع ب بعد ثانيتين وبعد ٨ ثوان ماذا تلاحظ ؟ فسر إجابتك.

② متى يكون الجسم على بعد ١٦ سم من الموضع ب ، فسر إجابتك.

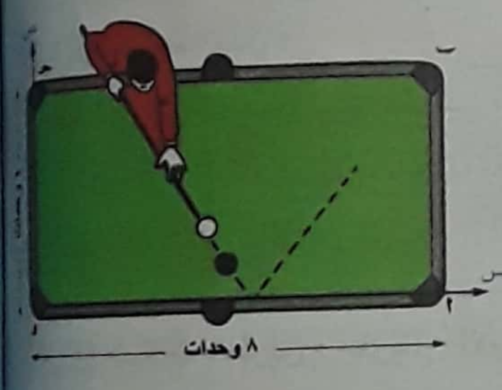
③ متى يكون الجسم على بعد يقل عن ٨ سم من الموضع ب

«٢٤ سم ، ٢٤ سم ، ٣ ، ٧ ،]٤ ، ٦[»



٥ 📖 **تطبيق حياتى :** إذا سقط شعاع الضوء على سطح عاكس فإن مساره يخضع لدالة المقياس فيكون قياس زاوية السقوط مساويًا لقياس زاوية الانعكاس ، كذلك مسار كرة البلياردو قبل وبعد تصادمها مع حافة الطاولة فى بعض الحالات.

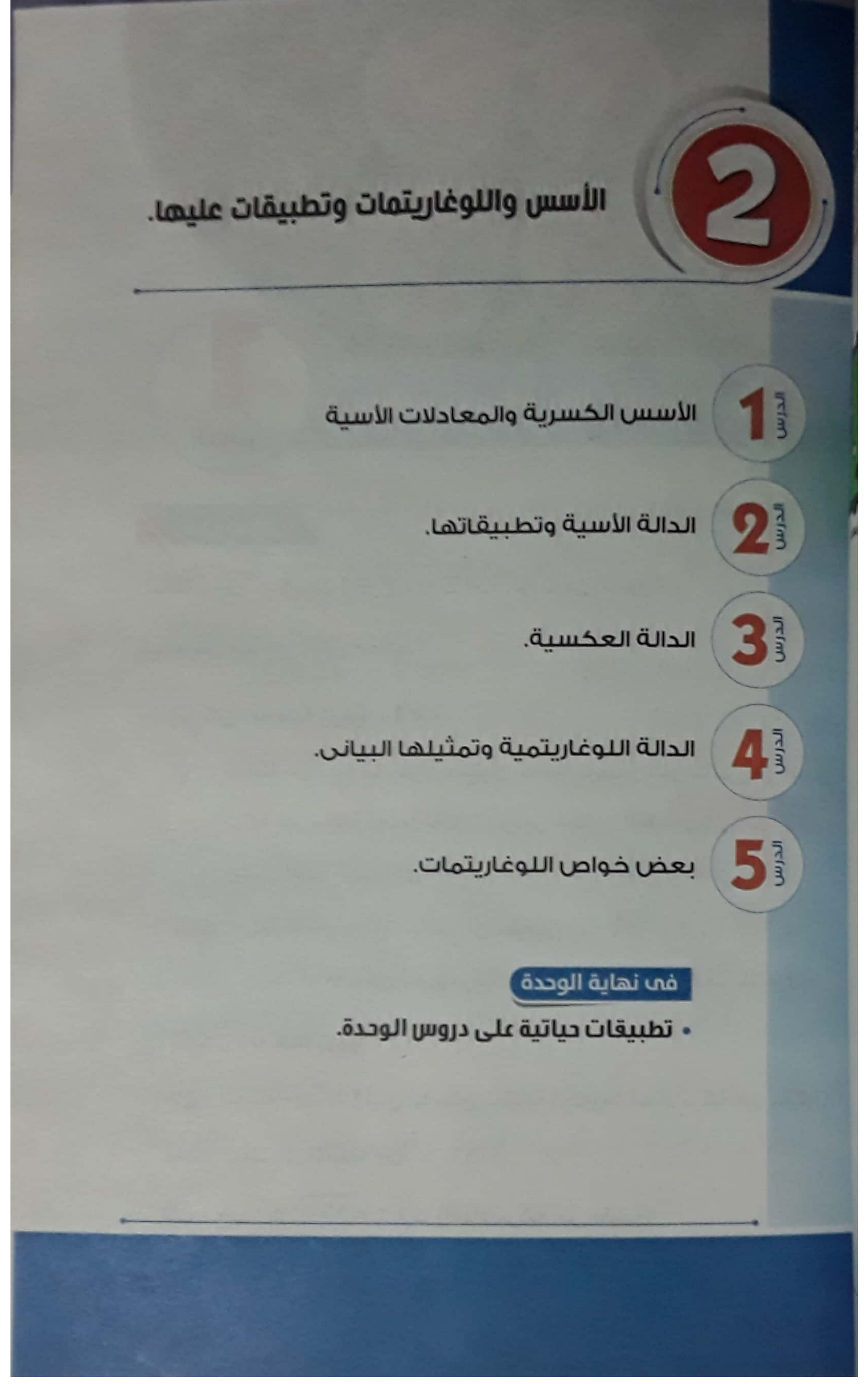
* يوضح الشكل المقابل :



تصويب لاعب البلياردو على الكرة السوداء ، باعتبار $\overleftarrow{و س}$ ، $\overleftarrow{و ص}$ محورى الإحداثيات المتعامدة ، وأن مسار الكرة يتبع منحنى الدالة د حيث د (س) = $\frac{٤}{٣}$ |س - ٥|

هل تسقط الكرة السوداء فى الجيب ب ؟

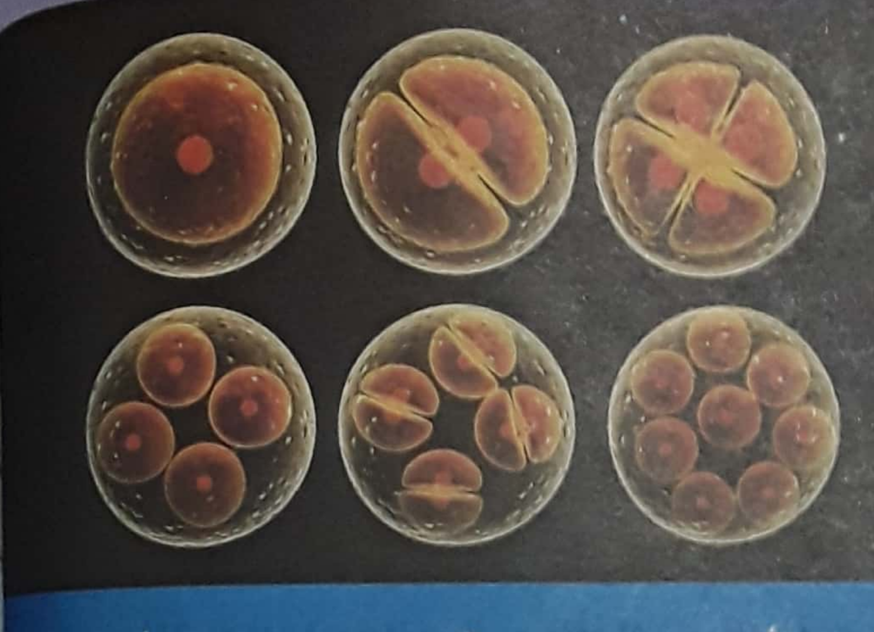
فسر إجابتك رياضيًا.



2 الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها.

فى نهاية الوحدة

- تطبيقات حياتية على دروس الوحدة.





الأسس الكسرية والمعادلات الأسية

الجذر النونى

المعادلة : $س^{ن} = أ$ حيث $أ \in ح$ ، $ن \in ص^{+}$ لها ن من الجذور

ونستعرض فيما يلى بعض الحالات :

١ إذا كان : ن عددًا زوجيًا ، أ > ٠ .

فإن : المعادلة $س^{ن} = أ$ لها جذران حقيقيان أحدهما موجب والآخر سالب وباقى الجذور أعداد مركبة غير حقيقية (عندما ن > ٢) ويرمز للجذرين الحقيقيين بالرمزين $\sqrt[ن]{أ}$ ، $-\sqrt[ن]{أ}$

ويسمى الجذر النونى الذى له نفس إشارة أ بالجذر النونى الأساسى للعدد أ

فمثلًا : المعادلة $س^{٦} = ٦٤$ لها جذران حقيقيان هما $\sqrt[٦]{٦٤} = ٢$ ، $-\sqrt[٦]{٦٤} = -٢$

وتوجد أربعة جذور أخرى مركبة غير حقيقية (حاول إيجادهم بالتحليل)

٢ إذا كان : ن عددًا زوجيًا ، أ < ٠ .

فإن : المعادلة $س^{ن} = أ$ ليس لها جذور حقيقية (جذورها أعداد مركبة غير حقيقية)

فمثلًا : عند حل المعادلة $س^{٢} = -١٦$

فإن : $س = \pm \sqrt{-١٦} = \pm ٤$ ت (أعداد مركبة غير حقيقية)

3 إذا كان : $ن$ عددًا فرديًا ، $أ \in ح - \{٠\}$

فإن : المعادلة $س^ن = أ$ لها جذر حقيقي وحيد هو $\sqrt[ن]{أ}$ وباقي الجذور أعداد مركبة غير حقيقية

فمثلًا : المعادلة $س^٣ = -٢٧$ لها جذر حقيقي وحيد هو $\sqrt[٣]{-٢٧} = -٣$

ويوجد جذران مركبان غير حقيقيين (حاول إيجادهما بالتحليل)

4 إذا كان : $ن \in ص^+$ ، $أ =$ صفر

فإن : المعادلة $س^ن =$ صفر لها حل حقيقي وحيد هو $س = ٠$

(عدد جذور المعادلة يساوي $ن$ وكل منها يساوي صفر عندما $ن > ١$)

فمثلًا : المعادلة $س^٣ = ٠$ لها ثلاثة جذور حقيقية متساوية وكل منها يساوي صفر

ملاحظة

$\sqrt[ن]{أ^ن} = |أ|$ إذا كان $ن$ عددًا زوجيًا ، $\sqrt[ن]{أ^ن} = أ$ إذا كان $ن$ عددًا فرديًا

فمثلًا : $\sqrt[٤]{(-٤)^٤} = |-٤| = ٤$ ، $\sqrt[٣]{(-٣)^٣} = -٣$

خواص الجذور النونية

إذا كان : $أ$ ، $ب$ عددين حقيقيين ، $\sqrt[ن]{أ}$ ، $\sqrt[ن]{ب} \in ح$ فإن :

1 $\sqrt[ن]{أ ب} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب}$

2 $\sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}}$ حيث $ب \neq ٠$ لاحظ أن : $\sqrt[ن]{أ \pm ب} \neq \sqrt[ن]{أ} \pm \sqrt[ن]{ب}$

فمثلًا : $\sqrt[٣]{٢٧ ب^{١٥}} = \sqrt[٣]{٢٧} \times \sqrt[٣]{ب^{١٥}} = ٣ ب^٥$

، $\sqrt[٤]{٨١ س^٤ ص^٨} = \sqrt[٤]{٨١} \times \sqrt[٤]{س^٤} \times \sqrt[٤]{ص^٨} = ٣ |س| ص^٢$



الأسس الكسرية

بفرض أن : $أ^م$ تمثل الجذر التربيعى الأساسى للعدد أ

∴ $أ^م = \sqrt{أ}$ وبتربيع الطرفين ∴ $(أ^م)^٢ = أ$ ∴ $أ^{٢م} = أ$

∴ ٢ م = ١ ∴ $م = \frac{١}{٢}$

أى أن $أ^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{أ}$ **وبالمثل :** $أ^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{أ}$ ، $أ^{\frac{١}{٤}} = \sqrt[٤]{أ}$

تعريف

١ إذا كان : $ن \in ص^+ - \{١\}$ ، $أ \in ح$ فإن : $أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$

مع ملاحظة أن : إذا كان : ن عدد زوجى ، أ < ٠ فإن : $أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ} \notin ح$

فمثلاً : $٩^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٩} = ٣ \in ح$ ، $(\frac{-١}{٨})^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{\frac{-١}{٨}} = \frac{-١}{٢} \in ح$

بينما : $(-١٦)^{\frac{١}{٤}} = \sqrt[٤]{-١٦} \notin ح$

٢ إذا كان م ، ن عددان صحيحان ليس بينهما عامل مشترك ، ن > ١ ، $\sqrt[ن]{أ} \in ح$

فإن : $أ^{\frac{م}{ن}} = (\sqrt[ن]{أ})^م = \sqrt[ن]{أ^م}$

فمثلاً : $(٨)^{\frac{٢}{٣}} = (\sqrt[٣]{٨})^٢ = ٢^٢ = ٤$ ، $(٨١)^{-\frac{٣}{٤}} = (\sqrt[٤]{٨١})^{-٣} = ٣^{-٣} = \frac{١}{٢٧}$

قوانين الأسس

إذا كانت أ ، ب عددين حقيقيين ، م ، ن عددين نسبيين ومع مراعاة استثناء الحالات التى يكون فيها المقام = صفر ، والحالات التى يكون فيها الأساس = صفر ، الأس = صفر معاً وأن تكون جميع التعبيرات المستخدمة معرفة فإن :

١ $أ^{صفر} = ١$

٢ $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^ن}$

٣ $أ^م \times أ^ن = أ^{م+ن}$

٤ $\frac{أ^م}{أ^ن} = أ^{م-ن}$

٥ $(أ^م)^ن = أ^{من}$

٦ $(أب)^ن = أ^ن ب^ن$

٧ $(\frac{أ}{ب})^{-ن} = (\frac{ب}{أ})^ن = \frac{ب^ن}{أ^ن}$

Scanned by CamScanner

ملاحظـات

١ إذا كان : $ا \in ح^-$ فإن :

$ا^{ن} > ٠$ إذا كان $ن$ عددًا صحيحًا زوجيًا

$ا^{ن} < ٠$ إذا كان $ن$ عددًا صحيحًا فرديًا

فمثلا : $(-٤)^٢ = ١٦ > ٠$ بينما $(-٤)^٣ = -٦٤ < ٠$.

٢ • إذا كان : $س^{\frac{م}{ن}} = ا$ فإن : $س = ا^{\frac{ن}{م}}$ حيث م عدد فردى

• إذا كان : $س^{\frac{م}{ن}} = ا$ فإن : $س = \pm ا^{\frac{ن}{م}}$ حيث م عدد زوجى

بشرط أن يكون م ، $ن$ عددان صحيحان ليس بينهما عامل مشترك (أى $\frac{م}{ن}$ عدد نسبى فى أبسط صورة) وإذا كان أحدهما زوجيًا فيجب أن يكون $ا \geq ٠$.

٣ **خطأ شائع :** * $(-٣٢)^{\frac{٢}{١٠}} = \sqrt[١٠]{(-٣٢)^٢} = ٢$ (حل خاطىء)

* $(-٣٢)^{\frac{٢}{١٠}} = \left(\sqrt[١٠]{-٣٢}\right)^٢ =$ غير معرف فى ح (حل خاطىء)

وذلك لأن الأس $\frac{٢}{١٠}$ ليس فى أبسط صورة ويجب اختصاره أولًا $\left[\frac{٢}{١٠} = \frac{١}{٥}\right]$

$\therefore (-٣٢)^{\frac{٢}{١٠}} = (-٣٢)^{\frac{١}{٥}} = \sqrt[٥]{-٣٢} = -٢$ (الحل الصحيح)

مثال ١

أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

١ $\sqrt[٥]{ا^٣} \times \sqrt{ا^٣}$ ٢ $\left(\sqrt[٥]{س}\right)^٢ \times \sqrt[٣]{س^٢}$ ٣ $\left(\sqrt[٣]{ا^{-٥}}\right)^٢ \times \left(\sqrt[٤]{ا^٣}\right)^٣$

الحـل

١ $\sqrt[٥]{ا^٣} \times \sqrt{ا^٣} = ا^{\frac{٣}{٥}} \times ا^{\frac{٣}{٢}} = ا^{\frac{٣}{٥} + \frac{٣}{٢}} = ا^{\frac{٢١}{١٠}} = ا^٢ \times ا^{\frac{١}{١٠}} = ا^٢ \sqrt[١٠]{ا}$

٢ $\left(\sqrt[٥]{س}\right)^٢ \times \sqrt[٣]{س^٢} = س^{\frac{٢}{٥}} \times س^{\frac{٢}{٣}} = س^{\frac{٢}{٥} + \frac{٢}{٣}} = س^{\frac{١٦}{١٥}}$

$= س \times س^{\frac{١}{١٥}} = س \sqrt[١٥]{س}$



٣ $\left(\sqrt[3]{\text{أ}^{-5}}\right)^2 \times \left(\sqrt[4]{\text{أ}^{3}}\right)^3 = \left(\text{أ}^{\frac{-5}{3}}\right)^2 \times \left(\text{أ}^{\frac{3}{4}}\right)^3 = \text{أ}^{\frac{-10}{3}} \times \text{أ}^{\frac{9}{4}} = \text{أ}^{\frac{-13}{12}}$

$= \dfrac{1}{\text{أ}^{\frac{13}{12}}} = \dfrac{1}{|\text{أ}| \times \text{أ}^{\frac{1}{12}}} = \dfrac{1}{|\text{أ}| \sqrt[12]{\text{أ}}}$

مثال ٢

اختصر لأبسط صورة : $\dfrac{\sqrt[4]{8} \times \sqrt[8]{0.01} \times 125}{\sqrt[4]{(15)^3} \times \sqrt[8]{4^5} \times (36)^{-\frac{3}{8}}}$

الحل

المقدار $= \dfrac{\sqrt[4]{2^3} \times \sqrt[8]{(10)^{-2}} \times 5^3}{\sqrt[4]{(15)^3} \times \sqrt[8]{4^5} \times (36)^{-\frac{3}{8}}} = \dfrac{2^{\frac{3}{4}} \times (10)^{-\frac{1}{4}} \times 5^3}{(15)^{\frac{3}{4}} \times 4^{\frac{5}{8}} \times (36)^{-\frac{3}{8}}}$

$= \dfrac{2^{\frac{3}{4}} \times (2 \times 5)^{-\frac{1}{4}} \times 5^3}{(3 \times 5)^{\frac{3}{4}} \times (2^2)^{\frac{5}{8}} \times (2^2 \times 3^2)^{-\frac{3}{8}}} = \dfrac{2^{\frac{3}{4}} \times 2^{-\frac{1}{4}} \times 5^{-\frac{1}{4}} \times 5^3}{3^{\frac{3}{4}} \times 5^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{5}{4}} \times 2^{-\frac{3}{4}} \times 3^{-\frac{3}{4}}}$

$= 2^{\frac{3}{4} - \frac{1}{4} - \frac{5}{4} + \frac{3}{4}} \times 3^{-\frac{3}{4} + \frac{3}{4}} \times 5^{-\frac{1}{4} + 3 - \frac{3}{4}} = 2^0 \times 3^0 \times 5^2$

$= 1 \times 1 \times 25 = 25$

مثال ٣

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

١ $3\,\text{س}^5 = -96$

٢ $\text{س}^6 = -64$

٣ $(\text{س} - 2)^4 = 81$

٤ $\text{س}^{\frac{3}{4}} = 27$

٥ $\sqrt[5]{\text{س}^2} = 1$

٦ $\sqrt[4]{(3\text{س} + 2)^3} = 8$

٧ $\text{س}^{\frac{4}{3}} - 5 \times \text{س}^{\frac{2}{3}} + 4 = 0$

٨ $(\text{س}^2 - 4\,\text{س} - 13)^{\frac{2}{5}} = 8$

الحل

لاحظ أن المطلوب إيجاد مجموعة الحل فى ح أى إيجاد الجذور الحقيقية فقط.

١ $\because 3\,\text{س}^5 = -96 \quad \therefore \text{س}^5 = -32$

$\therefore \text{س} = \sqrt[5]{-32} = -2 \quad \therefore$ م.ح $= \{-2\}$

٢ $س^{٦} = -٦٤$ ∵ $-٦٤ < ٠$ ، ٦ عدد زوجي ∴ م.ح = ∅

٣ ∵ $(س - ٢)^{٤} = ٨١$ ∴ $س - ٢ = \sqrt[٤]{٨١} = ٣$ أو $س - ٢ = -\sqrt[٤]{٨١} = -٣$

∴ س = ٣ + ٢ = ٥ أو س = -٣ + ٢ = -١ ∴ م.ح = {٥ ، -١}

٤ ∵ $س^{\frac{٣}{٤}} = ٢٧$ ∴ $س = ٢٧^{\frac{٤}{٣}} = (٣^{٣})^{\frac{٤}{٣}} = ٣^{٤}$

∴ س = ٨١ ∴ م.ح = {٨١}

٥ ∵ $\sqrt[٥]{س^{٢}} = ١$ ∴ $س^{\frac{٢}{٥}} = ١$

∴ $س = \pm ١^{\frac{٥}{٢}}$ ∴ س = ± ١ ∴ م.ح = {١ ، -١}

٦ ∵ $\sqrt[٤]{(٣س + ٢)^{٣}} = ٨$ ∴ $(٣س + ٢)^{\frac{٣}{٤}} = ٨$ ∴ $٣س + ٢ = ٨^{\frac{٤}{٣}}$

∴ $٣س + ٢ = (٢^{٣})^{\frac{٤}{٣}}$ ∴ ٣س + ٢ = ١٦

∴ $س = \frac{١٤}{٣}$ ∴ م.ح = $\{\frac{١٤}{٣}\}$

٧ ∵ $س^{\frac{٤}{٣}} - ٥ \times س^{\frac{٢}{٣}} + ٤ = ٠$ ∴ $(س^{\frac{٢}{٣}} - ١)(س^{\frac{٢}{٣}} - ٤) = ٠$

∴ $س^{\frac{٢}{٣}} = ١$ ومنها $س = \pm ١^{\frac{٣}{٢}} = \pm ١$

أو $س^{\frac{٢}{٣}} = ٤$ ومنها $س = \pm ٤^{\frac{٣}{٢}} = \pm (٢^{٢})^{\frac{٣}{٢}} = \pm ٢^{٣} = \pm ٨$

∴ م.ح = {١ ، -١ ، ٨ ، -٨}

حل آخر: نفرض $س^{\frac{٢}{٣}} = ل$ ∴ $ل^{٢} - ٥ل + ٤ = ٠$

∴ (ل - ٤) (ل - ١) = ٠ ∴ ل = ٤ ∴ $س^{\frac{٢}{٣}} = ٤$

∴ $س = \pm\sqrt{٤^{٣}} = \pm ٨$ أو ل = ١ ∴ $س^{\frac{٢}{٣}} = ١$

∴ $س = \pm\sqrt{١^{٣}} = \pm ١$ ∴ م.ح = {١ ، -١ ، ٨ ، -٨}

٨ $س^{٢} - ٤س - ١٣ = ٨^{\frac{٥}{٣}} = ٣٢$ ∴ $س^{٢} - ٤س - ٤٥ = ٠$

∴ (س - ٩) (س + ٥) = ٠ ∴ س = ٩ أو س = -٥

∴ م.ح = {٩ ، -٥}



المعادلة الأسية

هى معادلة تتضمن متغيرًا (مجهولاً) فى الأس مثل ($٢^{س + ١} = ٨$)

قوانين المعادلة الأسية

لكل م ، ن ∈ ص ، أ ، ب ∈ ح − {−١ ، ٠ ، ١} نجد أن :

١ إذا كان : $أ^{ن} = ١$ فإن : ن = صفر

٢ إذا كان : $أ^{م} = أ^{ن}$ فإن : م = ن

٣ إذا كان : $أ^{ن} = ب^{ن}$

- وكان ن عددًا فرديًا فإن أ = ب
- وكان ن عددًا زوجيًا فإن أ = ± ب
- وكان أ ≠ ب فإن ن = صفر

مثال ٤

أوجد قيمة س التى تحقق كلاً من المعادلات الآتية :

١ $٢^{س + ٥} = ٨$ ٢ $٣^{س^٢ - ٤} = ١$ ٣ $٤^{س + ٢} = س^{س + ٢}$

٤ $٤^{س - ٣} = ٢^{٣س - ٦}$ ٥ $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{|س - ٥|} = \left(٣\frac{٣}{٨}\right)^{-٢}$

الحل

١ ∵ $٢^{س + ٥} = ٨$ ∴ $٢^{س + ٥} = ٢^٣$

∴ س + ٥ = ٣ ∴ س = −٢

٢ ∵ $٣^{س^٢ - ٤} = ١$ ∴ $س^٢ - ٤ = ٠$

∴ س = ± ٢

٣ ∵ $٤^{س + ٢} = س^{س + ٢}$ ∴ إما س = ± ٤

أ، س + ٢ = ٠ ومنها س = −٢ ∴ س ∈ {−٢ ، ٤ ، −٤}

$\because\ ٤^{\text{س}-٣} = ٣^{٢\text{س}-٦}$ $\therefore\ ٤^{\text{س}-٣} = ٣^{٢(\text{س}-٣)}$

$\therefore\ ٤^{\text{س}-٣} = ٩^{\text{س}-٣}$

$\because\ ٤ \neq ٩$ $\therefore\ \text{س} - ٣ = ٠$ ومنها $\text{س} = ٣$

$\because\ \left(\frac{٢}{٣}\right)^{|\text{س}-٥|} = \left(\frac{٢٧}{٨}\right)^{-٢}$ $\therefore\ \left(\frac{٢}{٣}\right)^{|\text{س}-٥|} = \left(\left(\frac{٣}{٢}\right)^{٣}\right)^{-٢}$

$\therefore\ \left(\frac{٢}{٣}\right)^{|\text{س}-٥|} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^{-٦} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٦}$ $\therefore\ |\text{س} - ٥| = ٦$

$\therefore\ \text{س} - ٥ = \pm ٦$

$\therefore$ إما $\text{س} - ٥ = ٦$ ومنها $\text{س} = ١١$ أو $\text{س} - ٥ = -٦$ ومنها $\text{س} = -١$

مثال ٥

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١ $٢^{\text{س}} \times \sqrt[٣]{٤} = \left(\sqrt[٣]{١٦}\right)^{-١}$

٢ $٤^{\text{س}^{٢} - ١} = ٨^{-\text{س}}$

٣ $\frac{٣^{٣\text{س}} + ٣^{٢\text{س}} + ٣^{\text{س}}}{٣^{٢\text{س}} + ٣^{\text{س}} + ١} = \frac{١}{٩}$

الحل

١ $\because\ ٢^{\text{س}} \times ٤^{\frac{١}{٣}} = (١٦)^{-\frac{١}{٣}}$ $\therefore\ ٢^{\text{س}} \times (٢^{٢})^{\frac{١}{٣}} = (٢^{٤})^{-\frac{١}{٣}}$

$\therefore\ ٢^{\text{س}} \times ٢^{\frac{٢}{٣}} = ٢^{-\frac{٤}{٣}}$ $\therefore\ ٢^{\text{س} + \frac{٢}{٣}} = ٢^{-\frac{٤}{٣}}$

$\therefore\ \text{س} + \frac{٢}{٣} = -\frac{٤}{٣}$ $\therefore\ \text{س} = -٢$ $\therefore$ مجموعة الحل $= \{-٢\}$

٢ $\because\ ٤^{\text{س}^{٢} - ١} = ٨^{-\text{س}}$ $\therefore\ (٢^{٢})^{\text{س}^{٢} - ١} = (٢^{٣})^{-\text{س}}$

$\therefore\ ٢^{٢\text{س}^{٢} - ٢} = ٢^{-٣\text{س}}$ $\therefore\ ٢\text{س}^{٢} - ٢ = -٣\text{س}$

$\therefore\ ٢\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٢ = ٠$ $\therefore\ (٢\text{س} - ١)(\text{س} + ٢) = ٠$

$\therefore\ ٢\text{س} - ١ = ٠$ ومنها $٢\text{س} = ١$ $\therefore\ \text{س} = \frac{١}{٢}$

أو $\text{س} + ٢ = ٠$ $\therefore\ \text{س} = -٢$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \left\{\frac{١}{٢} \text{ ، } -٢\right\}$

٣ $\because \frac{٣^{٣س} + ٣^{٢س} + ٣^{س}}{٣^{٢س} + ٣^{س} + ١} = \frac{١}{٩}$ $\therefore \frac{٣^{س}(٣^{٢س} + ٣^{س} + ١)}{٣^{٢س} + ٣^{س} + ١} = ٣^{-٢}$

$\therefore ٣^{س} = ٣^{-٢}$ $\therefore س = -٢$

مثال ٦

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين :

١ $٢^{س+١} + ٢^{س-١} = ٥$ ٢ $٥^{س} + \frac{١٢٥}{٥^{س}} = ٣٠$

الحـــل

١ بأخذ $٢^{س-١}$ عامل مشترك $\therefore ٢^{س-١}(٢^{٢} + ١) = ٥$

$\therefore ٢^{س-١}(٤ + ١) = ٥$ $\therefore ٢^{س-١} = ١$

$\therefore س - ١ =$ صفر $\therefore س = ١$ $\therefore$ مجموعة الحل = $\{١\}$

حل آخر : $٢^{س+١} + ٢^{س-١} = ٥$ $\therefore ٢^{س} \times ٢ + ٢^{س} \times ٢^{-١} = ٥$

$\therefore ٢^{س}\left[٢ + \frac{١}{٢}\right] = ٥$ $\therefore ٢^{س} \times \frac{٥}{٢} = ٥$

$\therefore ٢^{س} = ٢$ $\therefore س = ١$ $\therefore$ مجموعة الحل = $\{١\}$

٢ بضرب الطرفين $\times ٥^{س}$ $\therefore ٥^{٢س} + ١٢٥ = ٣٠ \times ٥^{س}$

$\therefore ٥^{٢س} - ٣٠ \times ٥^{س} + ١٢٥ = ٠$

وبالتحليل : $\therefore (٥^{س} - ٥)(٥^{س} - ٢٥) = ٠$

$\therefore$ إما $٥^{س} - ٥ =$ صفر أو $٥^{س} - ٢٥ = ٠$

$\therefore ٥^{س} = ٥$ | $\therefore ٥^{س} = ٥^{٢}$

$\therefore س = ١$ | $\therefore س = ٢$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{١ ، ٢\}$

حل آخر :

بوضع $٥^{س} =$ ص $\therefore$ ص + $\frac{١٢٥}{ص} = ٣٠$ وبضرب الطرفين فى ص

$\therefore ص^{٢} - ٣٠ص + ١٢٥ = ٠$ $\therefore (ص - ٥)(ص - ٢٥) = ٠$

$\therefore$ ص = ٥ أو ص = ٢٥ $\therefore ٥^{س} = ٥$ أو $٥^{س} = ٥^{٢}$

$\therefore س = ١$ أو $س = ٢$ $\therefore$ مجموعة الحل = $\{١ ، ٢\}$







على الأسس الكسرية والمعادلات الأسية

من أسئلة الكتاب المدرسي

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $أ^{م} \times أ^{م} =$ ....

(أ) $أ^{م^{٢}}$ (ب) $أ^{٢م}$ (جـ) $٢\ أ^{م}$ (د) $م\ أ^{٢}$

② إذا كان : $٢^{س+١} = ٨$ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

③ إذا كان : $٥^{س-١} = ٤^{س-١}$ فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) −١ (د) صفر

④ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{أ^{٢} - أ - ٢} = ١$ حيث أ > صفر فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) −٣ (جـ) ٢ (د) ٣

⑤ إذا كان : $٣^{س} = ٢$ ، $٢^{ص} = ٩$ فإن : س ص = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٨ (د) ١٨

⑥ إذا كان : $٥^{س} = ٢$ فإن : $٢٥^{س} =$ ....

(أ) ١٠ (ب) ٦٢٥ (جـ) ٤ (د) ٢

⑦ إذا كان : $٢^{س} = ٥$ فإن : $٢^{س+٢} =$ ....

(أ) ١٥ (ب) ٤ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

⑧ إذا كان : $س^{\frac{٣}{٢}} = ٦٤$ فإن : س = ...

(أ) ٥١٢ (ب) ١٦ (جـ) ٤ (د) ٢

⑨ إذا كان : $٤\ س^{٥} = ١٢٨$ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ±٢ (جـ) ٢ (د) −٢

⑩ $(١٢٨)^{\frac{-٢}{٧}} =$ ....

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) ٤

⑪ $\sqrt[٤]{(١٦)^{-٣}} =$ ....

(أ) ٨ (ب) −٨ (جـ) $\frac{١}{٨}$ (د) $-\frac{١}{٨}$

⑫ المعادلة : $\text{س}^3 = 4$ عدد جذورها يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

⑬ عدد الجذور الحقيقية للمعادلة : $\text{س}^4 = -16$ هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

⑭ مجموعة الجذور الحقيقية للمعادلة : $(\text{س} - 2)^4 = 16$ هى ....

(أ) $\{0\}$ (ب) $\{4\}$ (جـ) $\{8\}$ (د) $\{0 ، 4\}$

⑮ $\sqrt[4]{16\,\text{س}^4\,\text{ص}^8} =$ ....

(أ) $2\,\text{س}\,\text{ص}^2$ (ب) $2\,|\text{س}|\,\text{ص}^2$

(جـ) $2\,\text{س}\,|\text{ص}|^2$ (د) $2\,\text{س}\,|\text{ص}^2|$

---

٢ اختصر لأبسط صورة :

① $\dfrac{(27)^{-2} \times (12)^2}{16 \times (81)^{-2}}$ «٣»

② $\dfrac{4^{2\text{ن}+1} \times 2^{1-\text{ن}}}{8^{\text{ن}+2}}$ «$\frac{1}{8}$»

③ $\dfrac{9^{4\text{ن}+1} \times 4^{2-2\text{ن}}}{3^{9\text{ن}+1} \times 48^{1-\text{ن}}}$ «١»

④ $\dfrac{125 \times (15)^{\text{ن}-3} \times (25)^{\text{ن}+\text{م}}}{(75)^{\text{ن}} \times (5)^{\text{ن}+2\text{م}}}$ «$\frac{1}{27}$»

⑤ $(18)^{\frac{1}{2}} \times (12)^{\frac{3}{2}} \times \dfrac{1}{(24)^{\frac{1}{2}}}$ «٣٦»

⑥ $\dfrac{3^{\frac{1}{2}} \times (147)^{\frac{1}{2}}}{(63)^{\frac{1}{2}}}$ «١»

---

٣ أثبت أن :

① $\dfrac{(27)^{\text{ص}-\frac{1}{2}} \times \sqrt[\text{ص}]{7^{\text{ص}^2+2\text{ص}}}}{(81)^{\text{ص}-1} \times (21)^{5-\text{ص}} \times (49)^{\text{ص}-1}} = \dfrac{1}{9}$

② $\dfrac{(343)^{2\text{س}-\frac{1}{3}} \times (4)^{3\text{س}+1}}{(196)^{3\text{س}} \times 4} = \dfrac{1}{7}$

③ $\dfrac{125 \times \sqrt[8]{4^3} \times 10^{-\frac{1}{4}}}{4^{\frac{5}{8}} \times \sqrt[4]{6^{-3}} \times 15^{\frac{3}{4}}} = 25$

④ $\dfrac{3 \times 2^{\text{س}+2} + \sqrt{4^{\text{س}+2}}}{2^{\text{س}+2} - 6 \times 2^{\text{س}}} = 8$

٤ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① $س^{\frac{7}{2}} = 128$

② $س^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{32}$

③ $س^{-\frac{5}{2}} = \sqrt[3]{32}$

④ $\sqrt[3]{س^4} = 81$

⑤ $\sqrt[3]{(س - 1)^5} = 32$

⑥ $(2س + 3)^{\frac{4}{3}} = 81$

⑦ $(س + 1)^{-\frac{5}{2}} = (32)^{-\frac{1}{2}}$

⑧ $(س^2 - 5س + 9)^{\frac{5}{2}} = 243$

⑨ $(\sqrt{س} + 2)^{\frac{1}{2}} = 3$

⑩ $س^{\frac{4}{5}} - 5س^{\frac{2}{5}} + 4 = 0$

⑪ $س^{\frac{4}{3}} - 10س^{\frac{2}{3}} + 9 = 0$

⑫ $س - 3س^{\frac{1}{2}} + 2 = 0$

⑬ $س + 15 = 8\sqrt{س}$

⑭ $\sqrt[3]{س^2} - 25\sqrt[3]{س} - 54 = 0$

⑮ $\sqrt[3]{س^5} - \sqrt[6]{س^5} = 6$

⑯ $\sqrt[5]{س^4} - 3\sqrt[5]{س^2} = 4$

⑰ $\sqrt[5]{س} - 3 = -\frac{2}{\sqrt[5]{س}}$

٥ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① $5^{2س - 1} = \frac{1}{125}$ «$\{-1\}$»

② $5^{س + 2} = س^{س + 2}$ «$\{5 ، -2\}$»

③ $2^{س^2 - 9} = 1$ «$\{3 ، -3\}$»

④ $س^{س^2 - 25} = 3^{س^2 - 25}$ «$\{3 ، -3 ، 5 ، -5\}$»

⑤ $(3\sqrt{3})^{|س|} = 27$ «$\{2 ، -2\}$»

⑥ $3^{|س - 4|} = 9^{س - 2}$ «$\{\frac{8}{7}\}$»

⑦ $2 \times 4^{س + 2} = \frac{1}{32}$ «$\{-6\}$»

⑧ $\left(\frac{3}{5}\right)^{2س - 1} = \frac{27}{125}$ «$\{2\}$»

⑨ $5^{س - 1} \times 7^{1 - س} = \frac{25}{49}$ «$\{3\}$»

⑩ $\frac{9^{س + 1} \times 4^{س - 1}}{36^{س}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{س}$ «$\{2\}$»

⑪ $\frac{12^{2س - 2} \times 9^{س + 1}}{18^{2س} \times 4^{2س - 2}} = 9$ «$\{2\}$»

⑫ $\frac{1}{27}\left(\sqrt{3}\right)^{س + 2} = 1$ «$\{4\}$»

⑬ $\left(\sqrt{3}\right)^{س^2 - 5س} = 1$ «$\{0 ، 5\}$»

⑭ $5^{س^2 - 5س} = 0.0016$ «$\{1 ، 4\}$»

⑮ $5^{س^2} = 25^{س + 4}$ «$\{-2 ، 4\}$»

⑯ $2^{س^2 - 42} = \left(\frac{1}{2}\right)^{س}$ «$\{6 ، -7\}$»

⑰ $\left(\sqrt{7}\right)^{|س + 2|} = 49$ «$\{2 ، -6\}$»

⑱ $3^{2س - 3} \times 7^{6 - 4س} = 1$ «$\{\frac{3}{2}\}$»

(١٩) $\sqrt{9^{س} - 2 \times 3^{س+1} + 9} = 24$ $\{3\}$

(٢٠) $\sqrt{5^{2س-2} - \frac{2}{5} \times 5^{س} + 1} = 124$ $\{4\}$

٦ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) $5^{س+1} + 5^{س-1} = 26$ $\{1\}$

(٢) $3^{س+3} - 3^{س+2} = 162$ $\{2\}$

(٣) $7^{2-س} + 7^{-س} = 50$ $\{0\}$

(٤) $5^{2س} + 25 = 26 \times 5^{س}$ $\{0 ، 2\}$

(٥) $2^{س} + 2^{5-س} = 12$ $\{2 ، 3\}$

(٦) $\left(\frac{1}{2}\right)^{س+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{س+2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{س+5} = 84$ $\{-7\}$

(٧) $4^{س} + 2^{س+1} = 8$ $\{1\}$

(٨) $2^{2س+1} - 33 \times 2^{س} + 16 = 0$ $\{-1 ، 4\}$

(٩) $5^{2س-2} - 6 \times 5^{س-1} + 5 = 0$ $\{1 ، 2\}$

(١٠) $9^{س^2-1} - 36 \times 3^{س^2-3} + 3 = 0$ $\{1 ، -1 ، \sqrt{2} ، -\sqrt{2}\}$

(١١) $10^{س} - 5^{س-1} \times 2^{س-2} = 950$ $\{3\}$

٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : $س \in ح^*$ ، ن عدد صحيح زوجى فأى مما يأتى صحيح ؟

(أ) $س^{ن} > 0$ (ب) $س^{ن} < 0$ (جـ) $س^{ن} \leq 0$ (د) $س^{ن} = 0$

(٢) إذا كانت : $س \in ح^-$ ، ن عدد صحيح فردى فأى مما يأتى صحيح ؟

(أ) $س^{ن} > 0$ (ب) $س^{ن} < 0$ (جـ) $س^{ن} \geq 0$ (د) $س^{ن} = 0$

(٣) أى مما يأتى لا يساوى $\left(\sqrt[5]{س^4}\right)$ ؟

(أ) $\left(\sqrt[5]{س}\right)^4$ (ب) $\sqrt[4]{س^5}$ (جـ) $س^{\frac{4}{5}}$ (د) $\left(س^{\frac{1}{5}}\right)^4$

④ $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{س}$ فإن : س = ...

(أ) ٢٧ (ب) ٤٨ (جـ) ٧٢ (د) ١٠٨

⑤ $\sqrt{٩^{١٦}\ س^{٢}}$ = ...

(أ) $٣^{٤}$ س (ب) $٣^{٨}$ $س^{٢}$ (جـ) $٩^{٤}$ س (د) $٩^{٨}$ $س^{٢}$

⑥ إذا كان : $٣^{س - ٢} = \sqrt[4]{٢٧}$ فإن : س = ...

(أ) $\frac{١١}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ٦

⑦ 📖 العدد ($٢^{٢٤} + ٢^{٢٣} + ٢^{٢٢}$) يقبل القسمة على ....

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٩

⑧ 📖 إذا كان : $٣^{أ} = ٤^{ب}$ فإن : $٩^{\frac{أ}{ب}} + ١٦^{\frac{ب}{أ}}$ = ...

(أ) ٧ (ب) ١٢ (جـ) ٢٠ (د) ٢٥

⑨ إذا كان : $٢^{أ} = ٣$ ، $٣^{ب} = ٧$ ، $٧^{جـ} = ١١$ فإن : $٢^{أ ب جـ}$ = ...

(أ) ١١ (ب) ٢٧ (جـ) ٢١ (د) ٢٣١

8

① إذا كان : $ص^{\frac{٣}{٤}} = ٢\ س^{\frac{٥}{٣}} = ٦٤$ فاوجد قيمة : ٥ س + ٢ ص «٥٥٢»

② 📖 إذا كان : $س^{\frac{٣}{٢}} = ٣\ ص^{\frac{٣}{٢}} = ٢٧$ فاوجد قيمة : س + ص «٣٦ ، -١٨»

③ إذا كان : $س^{\frac{٤}{٣}} = ٩\ ص^{-\frac{٢}{٣}} = ٨١$ فاوجد قيمة : | ٢ س ص | «٢»

---

9 📖 اكتشف الخطأ :

① $-٩ = (-٩)^{\frac{٢}{٢}} = \sqrt{(-٩)^{٢}} = \sqrt{٨١} = ٩$

② إذا كان : $س^{٤} = ٨١$ فإن : $س = \sqrt[4]{٨١}$ ∴ س = ٣

---

10 أوجد في ع × ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① $٤^{س + ص} = ١٢٨$ ، $٥^{س - ٢ ص - ٣} = ١$ «$\{(\frac{١٠}{٣} ، \frac{١}{٦})\}$»

② 📖 $٣^{س} \times ٥^{ص} = ٧٥$ ، $٣^{ص} \times ٥^{س} = ٤٥$ «$\{(٢ ، ١)\}$»

③ $٣^{س} \times ٣^{ص} = ٢٧$ ، $٣^{س} + ٣^{ص} = ١٢$ «$\{(١ ، ٢) ، (٢ ، ١)\}$»

١١ تفكير إبداعى : أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة :

$٩^{س+١} - ٣^{س+٢} - ٣^{س} + ٣ = ٠$ «{−٢ ، ١}»

١٢ تفكير إبداعى : إذا كان : $س^٢ = ص^٢$ وكان : $س^{ن+١} = ص^{ن-١}$

فما قيمة ن ؟ «٥»

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

١٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : س < صفر

فإن : $\sqrt{س^٢} - \sqrt[٣]{س^٣} - \sqrt{س^٢ - ٢س + ١} + ١ = ...$

(أ) س (ب) −س (جـ) صفر (د) −١

② إذا كان $أ = \sqrt[٤]{\frac{\sqrt[٣]{٢}}{\sqrt{٧}}}$ فأى الأعداد الآتية عدد نسبى ؟

(أ) $أ^{١٢}$ (ب) $أ^{١٦}$ (جـ) $أ^{١٨}$ (د) $أ^{٢٤}$

③ أى مما يأتى لا يكون دائمًا صحيح ؟

(أ) $\left(\sqrt[٥]{\sqrt[٤]{٢}}\right)^{٢٠} = ٢$ (ب) $\sqrt[٥]{١٢٨} = ٢\sqrt[٥]{٤}$

(جـ) $\sqrt{س^٢ ص^٦} = س ص^٣$ (د) $\sqrt[٦]{س^٤}\sqrt[٦]{س^٤} = س^{\frac{٤}{٣}}$

④ مجموعة حل المعادلة : $س^{\frac{٢}{٣}} = س^{\frac{٣}{٢}}$ فى ح هى ....

(أ) {١} (ب) {−١ ، ١}

(جـ) {٠ ، ١} (د) {٠ ، ١ ، −١}

⑤ $\sqrt[٥]{\frac{٢}{٢٧}} = \frac{.............}{٣}$

(أ) $\sqrt[٥]{٢}$ (ب) $\sqrt[٥]{٤}$ (جـ) $\sqrt[٥]{١٨}$ (د) $٣\sqrt{٥}$

⑥ العلاقة : $\sqrt[ن]{أ^{م}} = \left(\sqrt[ن]{أ}\right)^{م}$ صحيحة لجميع قيم ....

(أ) أ ∈ ح (ب) ن ∈ $ص^+$ − {١} ، ن زوجية

(جـ) $\sqrt[ن]{أ}$ ∈ ح ، ن ∈ $ص^+$ − {١} (د) لا شىء مما سبق.

⑦ المعادلة : $س^{\frac{٢}{٣}} = أ$ يكون لها حل فى ح إذا كان ....

(أ) أ ∈ ح　　　(ب) أ ∈ $ح^+$

(جـ) أ ∈ $ح^-$　　　(د) أ ∈ $ح^+ \cup \{٠\}$

⑧ إذا كان : $\sqrt[٣]{٢\sqrt{٣\sqrt{٢}}} = \sqrt[٦]{م\sqrt{٢}}$ فإن : م = ...

(أ) ٦　　　(ب) ٨　　　(جـ) ١٠　　　(د) ١٢

⑨ $\sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[م]{أ} = $ ....

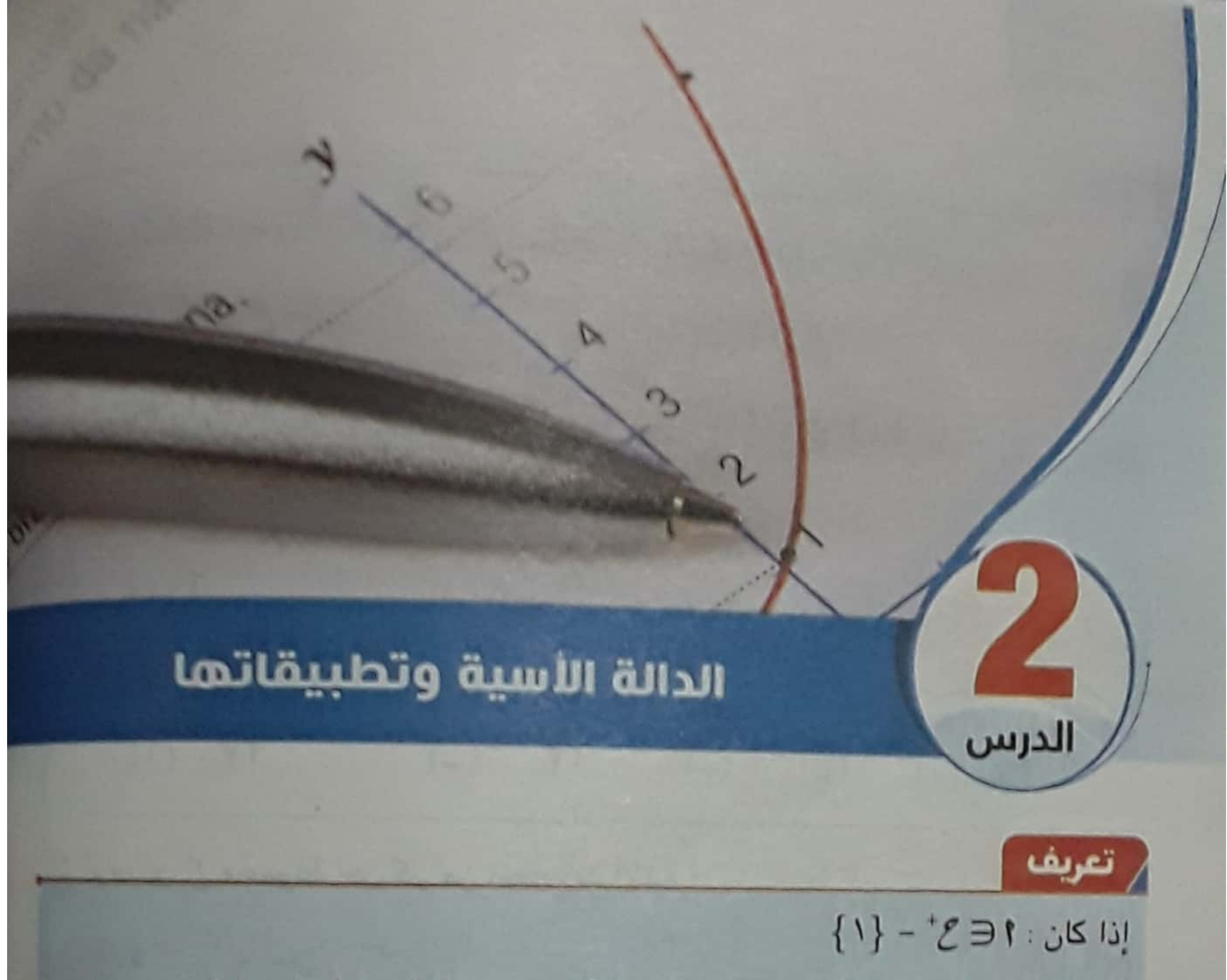
(أ) $\sqrt[نم]{أ}$　　　(ب) $\sqrt[ن+م]{أ}$　　　(جـ) $\sqrt[\frac{١}{ن}+\frac{١}{م}]{أ}$　　　(د) $\sqrt[نم]{أ^{م+ن}}$

١٤ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① $٥^{س-١} \times س^{٢-س} = ٥$　　　{٢، ٥}

② $(س - ٣)^{(س - ٥)} = ١$　　　{٤، ٥}

③ $(س - ٣)^{(س - ٦)} = ١$　　　{٢، ٤، ٦}



الدرس 2

الدالة الأسية وتطبيقاتها

تعريف

إذا كان : أ ∈ ح⁺ - {١}

فإن الدالة د : ح ⟵ ح⁺ حيث د (س) = أ^س تسمى دالة أسية أساسها أ

فمثلًا :

- د : د (س) = ٣^س دالة أسية أساسها ٣ وأسها س
- د : د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س + ١}$ دالة أسية أساسها $\frac{١}{٢}$ وأسها (س + ١)

ملاحظة

لاحظ الفرق بين الدالة الجبرية والدالة الأسية :

- فى الدالة الجبرية يكون المتغير المستقل س موجود كأساس فى قاعدة الدالة أما الأس فهو عدد حقيقى.

مثل : د : د (س) = س٢ - ٣ س + ١ أو د : د (س) = (س - ٣)٢ أو ...

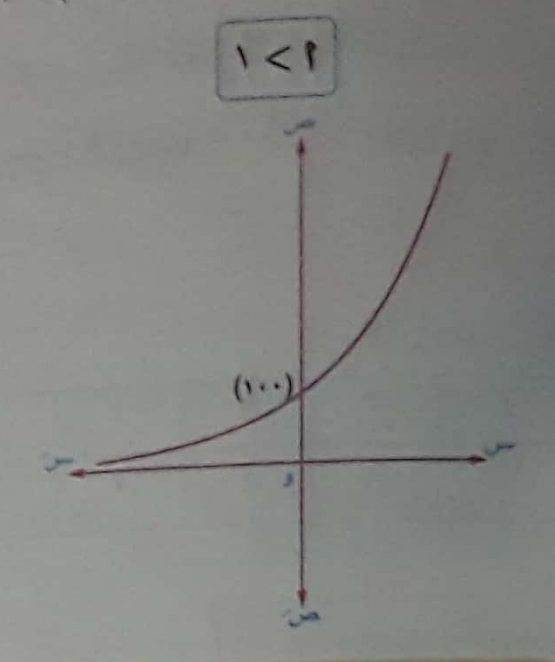
- فى الدالة الأسية يكون المتغير المستقل س موجود كأس فى قاعدة الدالة أما الأساس فهو عدد حقيقى موجب لا يساوى الواحد.

فمثلًا : د : د (س) = ٣^س أو د : د (س) = ٣^(س - ١) + ٢ دوال أسية

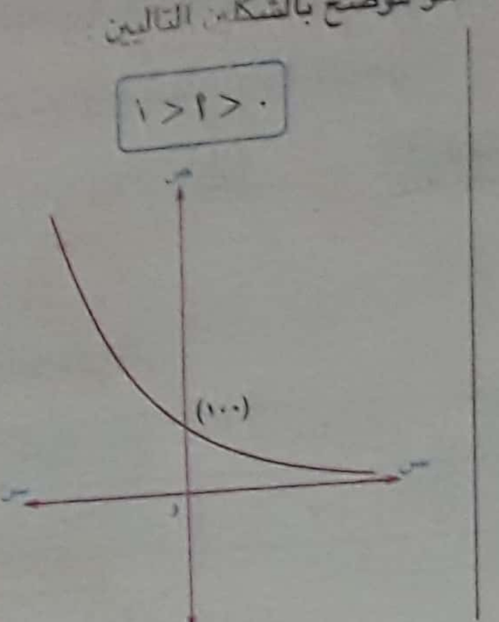
أما د : د (س) = (-٣)^س أو د : د (س) = (١)^س ليست دوال أسية

الشكل العام لمنحنى الدالة د : د (س) = أ^س كما هو موضح بالشكلين التاليين

أ > ١



٠ < أ < ١



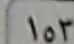
خواص الدالة الأسية د : د (س) = أ^س

- مجالها ح
- مداها ح^+ ويقع منحناها بأكمله فوق محور السينات.
- الدالة تزايدية على مجالها ح إذا كان أ > ١ وتسمى دالة نمو أسى معامله أ ومنحنى الدالة يقترب من محور السينات كلما قلت قيمة س
- الدالة تناقصية على مجالها ح إذا كان ٠ < أ < ١ وتسمى دالة تضاؤل أسى معامله أ ومنحنى الدالة يقترب من محور السينات كلما زادت قيمة س
- منحنى الدالة الأسية يمر بالنقطة (٠ ، ١)
- د : د (س) = أ^س هى دالة أحادية
- إذا كانت : د (س) = أ^س

فإن : د (−س) = أ^−س = $\left(\frac{١}{أ}\right)^{س}$

ويكون المنحنى ص = $\left(\frac{١}{أ}\right)^{س}$ صورة المنحنى ص = أ^س بالانعكاس فى محور الصادات

- أ^س ⟵ ∞ عندما س ⟵ ∞ حيث أ > ١
- أ^س ⟵ ٠ عندما س ⟵ ∞ حيث ٠ < أ < ١





مثال ١

ارسم منحنى الدالة د : ح ⟵ ح⁺ ، د (س) = $٢^{س}$ متخذًا س ∈ [-٣ ، ٤]

ومن الرسم أوجد قيمة تقريبية لكل من :

١ د (١,٥) ، د $(-\frac{١}{٢})$ ٢ قيمة س عندما د (س) = ١٠

الحل

نكون الجدول الآتى :

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
ص = $٢^{س}$	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨	١٦

١ إيجاد قيمة د (١,٥) :

عند س = ١,٥ نرسم مستقيمًا

يوازى محور الصادات ليقابل

المنحنى فى نقطة ثم نقرأ قيمة ص

المناظرة على محور الصادات

فنجدها ٢,٨ تقريبًا .

∴ د (١,٥) ≃ ٢,٨

وبالمثل د $(-\frac{١}{٢})$ ≃ ٠,٧



لاحظ أن

د (س) = $٢^{س}$ دالة نمو أسى حيث ٢ > ١

٢ إيجاد قيمة س عندما د (س) = ١٠

أى عندما $٢^{س}$ = ١٠

∴ عند ص = ١٠ نرسم مستقيمًا يوازى محور السينات يقابل المنحنى فى نقطة

ثم نقرأ قيمة س المناظرة على محور السينات فنجدها ٣,٣ تقريبًا .

∴ عندما $٢^{س}$ = ١٠ تكون س ≃ ٣,٣

مثال ٢

ارسم منحنى الدالة د : ع ⟵ $ع^{+}$ ، د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ متخذاً س ∈ [-٤ ، ٣]

ومن الرسم أوجد قيمة تقريبية لكل مما يأتى :

١ د (- ٢,٥)　　٢ $\sqrt[٤]{٢}$　　٣ س عندما $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ = ٧

الحــل

نكون الجدول الآتى :

س	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$	١٦	٨	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$

منحنى الدالة يقترب من محور السينات كلما زادت قيمة س

* ومن الرسم نجد أن :

١ د (- ٢,٥) ≃ ٥,٧

٢ ∵ $\sqrt[٤]{٢}$ = $٢^{\frac{١}{٤}}$ = $(٢^{-١})^{-\frac{١}{٤}}$

= $\left(\frac{١}{٢}\right)^{-\frac{١}{٤}}$ = د $\left(-\frac{١}{٤}\right)$

∴ د $\left(-\frac{١}{٤}\right)$ ≃ ١,٢

٣ عندما $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ = ٧

∴ س ≃ - ٢,٨

لاحظ أن

د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ دالة تضاؤل أسى حيث ٠ < أ < ١

لاحظ أنه : فى مثال ١ ، مثال ٢ :

منحنى د : د (س) = $٢^{س}$ هو صورة منحنى الدالة

د : د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ بالانعكاس فى محور الصادات

وسوف نتناول بعض حالات التحويلات الهندسية للدالة د : د (س) = $أ^{س}$ لنتعرف على أشكالها البيانية :



١ الإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة الأسية :

إذا كانت : د (س) = $أ^{س}$ فإن المنحنى : ص = د (س) + حـ أى : ص = $أ^{س}$ + حـ

يمثله بيانيًا المنحنى : ص = $أ^{س}$ بإزاحة رأسية مقدارها | حـ |

- فى اتجاه و ص → إذا كان حـ > ٠ (إزاحة لأعلى)
- فى اتجاه و ص ← إذا كان حـ < ٠ (إزاحة لأسفل)

٢ الإزاحة الأفقية لمنحنى الدالة الأسية :

إذا كانت : د (س) = $أ^{س}$ فإن المنحنى : ص = د (س + ب)

أى : ص = $أ^{س + ب}$ يمثله بيانيًا المنحنى : ص = $أ^{س}$ بإزاحة أفقية مقدارها | ب |

- فى اتجاه و س ← إذا كان ب > ٠ • فى اتجاه و س → إذا كان ب < ٠

٣ انعكاس منحنى الدالة الأسية فى محور السينات :

إذا كانت : د (س) = $أ^{س}$ فإن : منحنى الدالة ص = − د (س)

أى : ص = − $أ^{س}$ هو صورة المنحنى : ص = $أ^{س}$ بالانعكاس فى محور السينات.

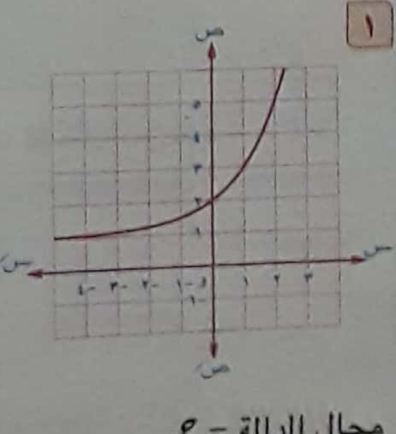
مثال ٣

مثل الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ثم أوجد المجال والمدى لكل منهم وبين أيًا منهم تزايدية وأيًا منهم تناقصية :

١ ص = $٢^{س}$ + ١ ٢ ص = $٢^{س - ١}$ ٣ ص = − $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$

الحل

١

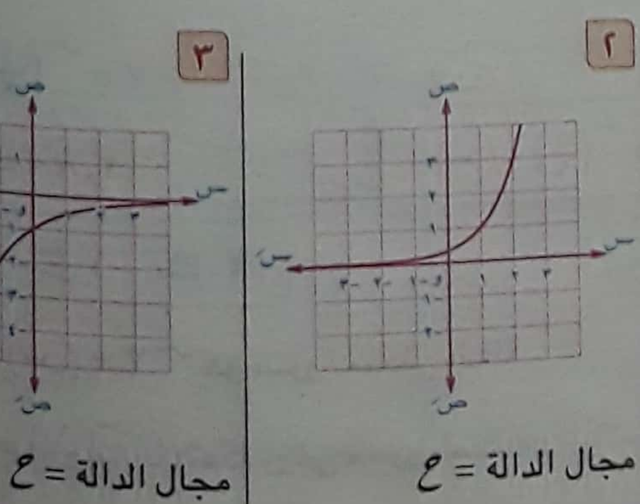


مجال الدالة = ح

، مدى الدالة =]١ ، ∞[

، الدالة تزايدية على مجالها

٢

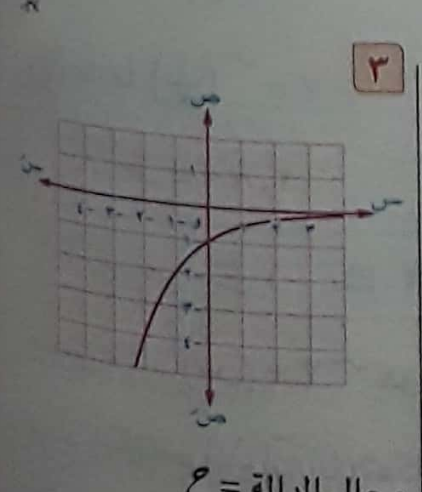


مجال الدالة = ح

، مدى الدالة =]٠ ، ∞[

، الدالة تزايدية على مجالها

٣



مجال الدالة = ح

، مدى الدالة =]−∞ ، ٠[

، الدالة تزايدية على مجالها.

Scanned by CamScanner

مثال ٤

مثل الدالة المعرفة بالقاعدة الآتية ثم أوجد المجال والمدى وبين هل الدالة تزايدية أم تناقصية :

$ص = -٣^{١ - س} + ٢$

الحل

$\because ص = -٣^{١ - س} + ٢ = -٣^{-(س - ١)} + ٢$

$= -\left(\frac{١}{٣}\right)^{س - ١} + ٢$

- المنحنى $ص = -\left(\frac{١}{٣}\right)^{س - ١} + ٢$

هو نفس المنحنى $ص = \left(\frac{١}{٣}\right)^{س}$

بانعكاس فى محور السينات ثم إزاحة أفقية

وحدة واحدة فى اتجاه $\overleftarrow{و س}$

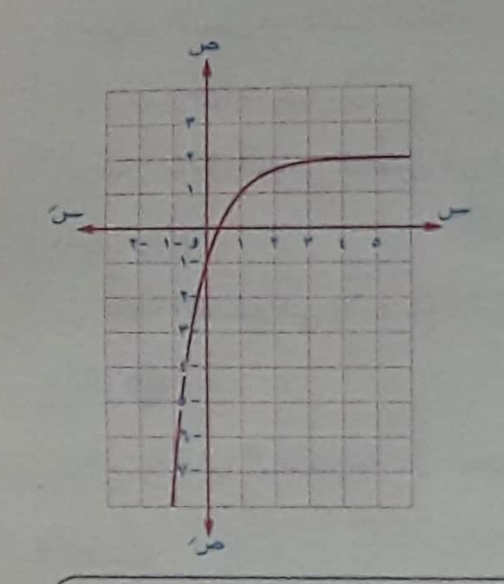
ثم إزاحة رأسية وحدتين

فى اتجاه $\overleftarrow{و ص}$

المجال = ح

، المدى = $]-\infty ، ٢[$

، الدالة تزايدية على مجالها.



لاحظ أن :

يجب ترتيب إجراء التحويلات على المنحنى $ص = \left(\frac{١}{٣}\right)^{س}$

للحصول على المنحنى $ص = -\left(\frac{١}{٣}\right)^{س - ١} + ٢$ كما يلى :

انعكاس فى محور السينات - إزاحة أفقية - إزاحة رأسية.

فإذا عكس الترتيب فإننا نحصل على منحنى أخر غير المنحنى المطلوب.

حل المعادلات الأسية بيانيا

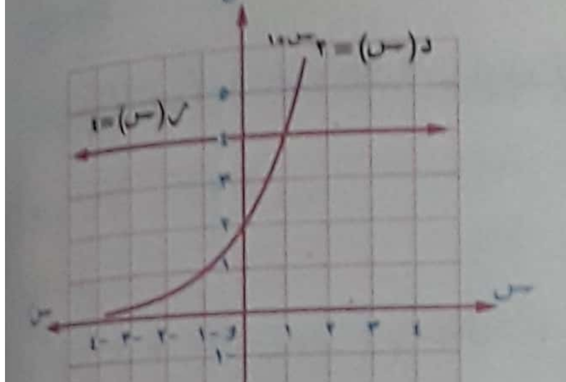
يعتمد الحل البيانى للمعادلات الأسية على فرض الطرف الأيمن للمعادلة على أنه دالة أسية د وفرض الطرف الأيسر للمعادلة على أنه أى دالة أخرى ر وبرسم الدالتين د ، ر فى شكل واحد وإيجاد الإحداثى السينى لنقطة (نقط) التقاطع نحصل على مجموعة الحل.

مثال ٥

أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل المعادلة : $٢^{س + ١} = ٤$



الحـــل



نفرض أن الطرف الأيمن للمعادلة

هو قاعدة الدالة د : د (س) = $٢^{س + ١}$

والطرف الأيسر هو قاعدة الدالة

ر : ر (س) = ٤

وبرسم الشكل البيانى للدالتين فى شكل واحد

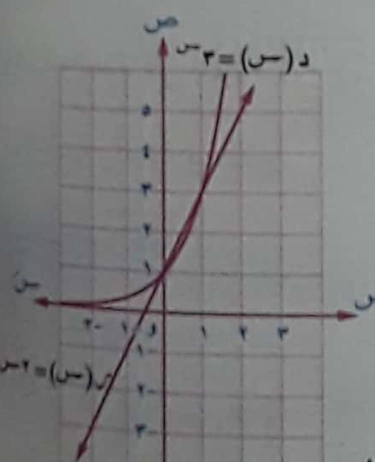
ومن الرسم :

∴ نقطة التقاطع هى (١ ، ٤)   ∴ س = ١   ∴ مجموعة الحل = {١}

مثال ٦

أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل المعادلة : $٣^{س}$ = ٢ س + ١

الحـــل



نفرض أن الطرف الأيمن للمعادلة هو قاعدة الدالة

د : د (س) = $٣^{س}$ والطرف الأيسر هو قاعدة الدالة

ر : ر (س) = ٢ س + ١

وبرسم الشكل البيانى للدالتين فى شكل واحد

ومن الرسم : الإحداثيان السينيان لنقطتى التقاطع هما ٠ ، ١

∴ مجموعة الحل = {٠ ، ١}

مثال ٧

إذا كانت د : ح ← $ح^{+}$ ، د (س) = $٣^{س}$ فأثبت أن : $\frac{د (س + ٥) + د (س + ٣)}{د (س + ٣) + د (س + ١)}$ = د (٢)

الحـــل

∵ الطرف الأيمن = $\frac{٣^{س + ٥} + ٣^{س + ٣}}{٣^{س + ٣} + ٣^{س + ١}} = \frac{٣^{س + ٣} (٣^{٢} + ١)}{٣^{س + ١} (٣^{٢} + ١)} = \frac{٣^{س + ٣}}{٣^{س + ١}} = ٣^{٢}$

، الطرف الأيسر = د (٢) = $٣^{٢}$

∴ الطرفان متساويان.

حل آخر : الطرف الأيمن = $\frac{٣^{س + ٥} + ٣^{س + ٣}}{٣^{س + ٣} + ٣^{س + ١}} = \frac{٣^{س} (٣^{٥} + ٣^{٣})}{٣^{س} (٣^{٣} + ٣)} = ٩ = ٣^{٢} =$ د (٢)

مثال ٨

إذا كانت د (س) = ٥ ^س^ أوجد قيمة س إذا كان : د (٢ س - ١) + د (٢ س + ١) = $\frac{٢٦}{٢٥}$

الحـــل

∵ د (٢ س - ١) + د (٢ س + ١) = $\frac{٢٦}{٢٥}$

∴ ٥ ^٢ س - ١^ + ٥ ^٢ س + ١^ = $\frac{٢٦}{٢٥}$ ∴ ٥ ^٢ س - ١^ (١ + ٥^٢^) = $\frac{٢٦}{٢٥}$

∴ ٥ ^٢ س - ١^ × ٢٦ = $\frac{٢٦}{٢٥}$ ∴ ٥ ^٢ س - ١^ = $\frac{١}{٢٥}$

∴ ٥ ^٢ س - ١^ = ٥ ^-٢^ ∴ ٢ س - ١ = -٢ ∴ س = - $\frac{١}{٢}$

حل آخر :

∵ د (٢ س - ١) + د (٢ س + ١) = $\frac{٢٦}{٢٥}$

∴ ٥ ^٢ س - ١^ + ٥ ^٢ س + ١^ = $\frac{٢٦}{٢٥}$ ∴ ٥ ^٢ س^ (٥^-١^ + ٥) = $\frac{٢٦}{٢٥}$

∴ ٥ ^٢ س^ = ٥ ^-١^ ∴ ٢ س = -١ ∴ س = - $\frac{١}{٢}$

تطبيقات حياتية على النمو والتضاؤل الأسى

١ النمو الأسى

* الدالة د : د (ن) = أ (١ + ر)^ن^ تستخدم لتمثيل النمو الأسى بنسبة مئوية ثابتة فى فترات زمنية متساوية حيث أ القيمة الابتدائية ، ر النسبة المئوية للنمو فى الفترة الزمنية الواحدة ، ن الفترة الزمنية.

* ويمكن استنتاج هذه الدالة عند دراسة ظاهرة تزايد السكان على سبيل المثال : فإذا كان عدد سكان إحدى المدن فى أحد الأعوام أ وكان هذا العدد يتزايد سنويًا بنسبة مئوية ثابتة ر.

فإن عدد السكان بعد عام = أ + ر أ = أ (١ + ر)

، وبعد عامين = أ (١ + ر) + ر أ (١ + ر) = أ (١ + ر)^٢^ وهكذا

فيكون عدد السكان بعد ن عام = أ (١ + ر)^ن^



مثال ٩

اشترى وائل منزلًا بمبلغ ١٣٥٠٠٠٠ جنيه فإذا كان سعر المنزل يزداد بمعدل ٢,٥ ٪ كل سنة :

١ اكتب دالة أسية تمثل سعر المنزل بعد $ن$ سنة من شرائه.

٢ قدِّر لأقرب جنيه سعر المنزل بعد مرور ٦ سنوات من شرائه.

الحل

أ = ١٣٥٠٠٠٠ ، $ر = \frac{٢,٥}{١٠٠} = ٠,٠٢٥$ ، $ن = ٦$

١ دالة النمو الأسى د : د $(ن)$ = أ $(١ + ر)^{ن}$ ∴ د $(ن)$ = ١٣٥٠٠٠٠ $(١ + ٠,٠٢٥)^{ن}$

∴ د $(ن)$ = ١٣٥٠٠٠٠ $(١,٠٢٥)^{ن}$

٢ بالتعويض عن $ن = ٦$ ∴ د (٦) = ١٣٥٠٠٠٠ $(١,٠٢٥)^{٦}$ ≈ ١٥٦٥٥٨٦ جنيهًا

الربح المركب

* عند حساب الجملة (ح) لمبلغ (أ) مستثمر فى أحد البنوك التى تعطى ربحًا سنويًا مركبًا (ر) كنسبة مئوية لعدد من السنوات (ن) بفترات تقسيم العائد السنوى إلى (س) فترة فإن جملة المبلغ تعطى بالعلاقة : $ح = أ \left(١ + \frac{ر}{س}\right)^{ن س}$

مثال ١٠

أودع رجل مبلغ ١٥٠٠٠ جنيه فى أحد البنوك التى تعطى فائدة سنوية مركبة قدرها ٧٪ أوجد جملة هذا المبلغ بعد مرور ١٠ سنوات فى كل من الحالات الآتية :

١ العائد سنوى. ٢ العائد ربع سنوى. ٣ العائد شهرى.

الحل

∵ $ح = أ \left(١ + \frac{ر}{س}\right)^{ن س}$

١ ∵ العائد سنوى أى أن عدد فترات التقسيم = ١ ∴ س = ١

∴ ح = ١٥٠٠٠ $(١ + ٠,٠٧)^{١٠}$ ≈ ٢٩٥٠٧,٢٧ جنيه

٢ ∵ العائد ربع سنوى أى أن عدد فترات التقسيم = ٤ ∴ س = ٤

∴ حـ = ١٥٠٠٠ $\left(1 + \frac{0.07}{4}\right)^{10 \times 4}$ ≈ ٣٠٠٢٣,٩٦ جنيه

٣ ∵ العائد شهرى أى أن عدد فترات التقسيم = ١٢ ∴ س = ١٢

∴ حـ = ١٥٠٠٠ $\left(1 + \frac{0.07}{12}\right)^{10 \times 12}$ ≈ ٣٠١٤٤,٩٢ جنيه

٢ التضاؤل الأسى

الدالة د : د (ن) = أ (١ – ر)^ن تستخدم لتمثيل التضاؤل الأسى حيث أ القيمة الابتدائية ، ر النسبة المئوية للتضاؤل فى الفترة الزمنية الواحدة ، ن الفترة الزمنية.

مثال ١١

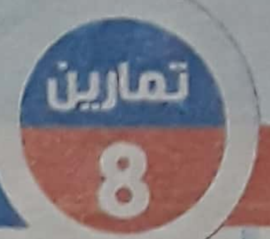
يتناقص عدد المرضى بفيروس الالتهاب الكبدى الوبائى حـ بمعدل ١٥٪ سنويًا نتيجة اكتشاف علاج له فإذا كان عدد المرضى فى إحدى الدول ٨٠٠٠٠٠٠ مريض فاكتب دالة أسية تمثل عدد المرضى بعد ن سنة من اكتشاف العلاج ثم قدر عدد المرضى بعد ٨ سنوات.

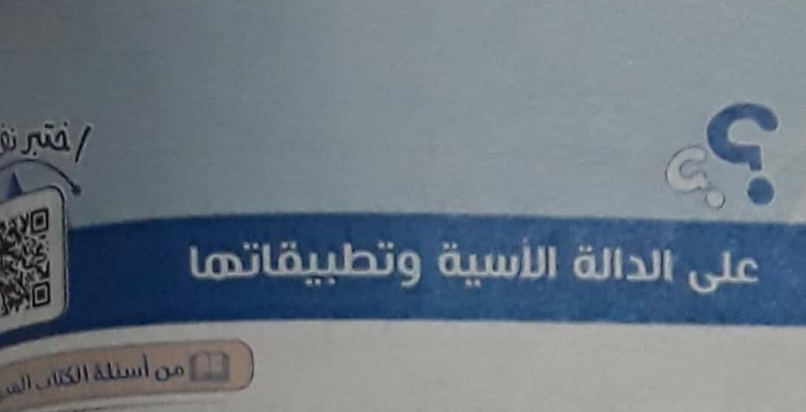
الحل

أ = ٨٠٠٠٠٠٠ ، ر = ٠,١٥ ، ن = ٨

الدالة الأسية د : د (ن) = ٨٠٠٠٠٠٠ (١ – ٠,١٥)^ن = ٨٠٠٠٠٠٠ (٠,٨٥)^ن

وعند ن = ٨ فإن عدد المرضى = ٨٠٠٠٠٠٠ (٠,٨٥)^٨ ≈ ٢١٧٩٩٢٤ مريضًا





تمارين 8

على الدالة الأسية وتطبيقاتها

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي

١ بين أيًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية دالة أسية ، ثم اكتب أسها وأساسها :

① $د(س) = ٢ س^{٢}$

② $د(س) = \frac{٢}{٣} (٥)^{س}$

③ $د(س) = \frac{١}{س - ١}$

④ $د(س) = ٣ س^{٢} - ١$

⑤ $د(س) = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{س - ١}$

⑥ $د(س) = (-٧)^{س}$

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : $د(س) = أ^{س}$ دالة أسية فإن : $أ \in$ ....

(أ) ح (ب) $ح^{+}$ (جـ) $ح^{-}$ (د) $ح^{+} - \{١\}$

② إذا كان : $د(س) = ٤^{س - ١}$ فإن : $د(س + ١) =$ ....

(أ) $٤^{س}$ (ب) $٤^{س + ١}$ (جـ) $٤^{س + ٢}$ (د) $٢^{س}$

③ إذا كانت : $د(س) = ٢^{س}$ فإن : $د(-س) =$ ....

(أ) $-٢^{س}$ (ب) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ (جـ) $٢^{س + ١}$ (د) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{-س}$

④ إذا كانت : $د(س) = أ^{س}$ فإن : $د(س + ١) \times د(س - ١) = د($..............$)$

(أ) $٢ س + ١$ (ب) $أ^{٢ س}$ (جـ) $٢ س$ (د) ٢

⑤ إذا كان : $د(س + ١) = ٢^{س}$ وكان : $د(أ) = ٨$ فإن : $أ =$ ....

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٥

٣ إذا كانت : $د(س) = ٥^{س}$ فأوجد قيمة : $\frac{د(س + ٤) - د(س + ٣)}{د(س + ٥) - د(س + ٤)}$

٤ إذا كانت : $د(س) = ٧^{س + ١}$

فأوجد قيمة س التى تحقق : $د(٢ س - ١) + د(س - ٢) = ٥٠$

٥ إذا كانت : $د_{١}(س) = ٣^{س}$ ، $د_{٢}(س) = ٩^{س}$

فأوجد قيمة س التى تحقق : $د_{١}(٢س - ١) + د_{٢}(س + ١) = ٧٥٦$ «٢»

---

٦ إذا كانت د : ح ⟵ $ح^{+}$ حيث $د(س) = ص^{س}$

فاثبت أن : $\frac{د(س + ١) + د(س + ٢)}{د(س + ١) + د(س)} = ص$

---

٧ إذا كانت : $د(س) = ٣^{س}$ فاثبت أن : $\frac{د(٢س + ٢) + د(٢س - ١)}{٥ د(٢س) - ٧ د(٢س - ١)} = \frac{٧}{٢}$

---

٨ إذا كانت : $د(س) = ٣^{٣س - ١}$ فاثبت أن : $\frac{د(س + ١) \times د(س + ٢)}{د(س + ٣)} = د(س)$

---

٩ إذا كانت : $د(س) = ٢^{س}$ فاثبت أن : $\frac{د(س + ١)}{د(س - ١)} + \frac{د(س - ١)}{د(س + ١)} = \frac{١٧}{٤}$

---

١٠ إذا كانت : $د(س) = ٧^{س}$

أوجد قيمة س إذا كان : $د(٢س - ١) + د(٢س + ١) = \frac{٥٠}{٤٩}$ «$-\frac{١}{٢}$»

---

١١ إذا كانت : $د(س) = ٢^{س}$ ، $\frac{د(س + ١) - د(س)}{د(س) - د(س - ١)} = د(س - ٢)$ فأوجد قيمة : س «٣»

---

١٢ إذا كانت : $د(س) = ٣^{-س}$ فأوجد مجموعة حل المعادلة : $\frac{د(٢س + ١)}{د(س - ١)} = ٧٢٩$ «{-٨}»

---

١٣ إذا كانت : $د(س) = ٣^{س - ١}$

فأوجد قيمة س التى تحقق : $د(س + ٢) + د(٤ - س) = ٣٠$ «٠ أ، ٢»

---

١٤ إذا كانت : $د(س) = ٢^{س}$

فأوجد مجموعة حل المعادلة : $د(٢س) - ٦ د(س) + د(٣) = ٠$ «{١ ، ٢}»

---

١٥ إذا كانت : $د(س) = ٣^{س}$

أوجد مجموعة حل المعادلة : $د(س) + د\left(\frac{س}{٢}\right) = ١٢$ «{٢}»

١٦ إذا كانت : د (س − ٢) = ٣^س

أوجد قيمة س التى تحقق أن : د (٣ س + ١) − د (٣ س − ١) = ٢٤

١٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① تكون الدالة الأسية التى أساسها أ تزايدية إذا كانت ....

(أ) أ > ٠ (ب) أ > ١

(جـ) ٠ < أ < ١ (د) أ = ١

② تكون الدالة الأسية التى أساسها أ تناقصية إذا كانت ....

(أ) أ > ٠ (ب) أ < ٠

(جـ) ٠ < أ < ١ (د) −١ < أ < ٠

③ مدى الدالة د : د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ هو ....

(أ)]−∞ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٠]

(جـ)]٠ ، ∞[(د)]١ ، ∞[

④ إذا تحرك منحنى الدالة د : د (س) = ٢^س وحدة واحدة لليسار فإن الدالة الجديدة هى ....

(أ) ر (س) = ٢^(س + ١) (ب) ر (س) = ٢^(س − ١)

(جـ) ر (س) = −٢^س (د) ر (س) = −٢^(١ − س)

⑤ منحنى الدالة د : د (س) = ٣^س هو صورة منحنى الدالة ر : ر (س) = −٣^س بالانعكاس فى ....

(أ) ص = ٠ (ب) س = ٠ (جـ) ص = س (د) ص = − س

⑥ معادلة محور التماثل لمنحنى الدالتين د ، ر حيث د (س) = ٣^س ، ر (س) = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{س}$ هى ....

(أ) ص = ٠ (ب) س = ٠ (جـ) ص = س (د) ص = − س

⑦ منحنى الدالة د : د (س) = $٥^{س}$ يقطع محور الصادات فى النقطة ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (٥ ، ١) (د) (١ ، ٥)

⑧ منحنى الدالة د : د (س) = $٣^{س+١}$ يقطع محور الصادات فى النقطة ....

(أ) (٠ ، ١) (ب) (١ ، ٠) (جـ) (٠ ، ٣) (د) (٣ ، ٠)

⑨ المستقيم ص = ٩ يقطع منحنى الدالة د : د (س) = $٣^{س}$ فى النقطة ....

(أ) (٠ ، ١) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (٢ ، ٩) (د) (١ ، ٩)

⑩ إذا كانت النقطة (أ ، ب) حيث أ ≠ ٠ تقع على منحنى الدالة ص = $٢^{س}$ فأى من النقط الآتية تقع على منحنى الدالة ص = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ ؟

(أ) (أ ، ب) (ب) (− أ ، ب) (جـ) (أ ، − ب) (د) (أ ، $\frac{١}{٢}$ ب)

⑪ الدالة الأسية د حيث د (س) = $أ^{س}$ ، أ > ١ يقترب خطها البيانى من ....

(أ) محور السينات (الاتجاه الموجب) (ب) محور السينات (الاتجاه السالب)

(جـ) محور الصادات (الاتجاه الموجب) (د) محور الصادات (الاتجاه السالب)

⑫ فى الدالة الأسية د : د (س) = $أ^{س}$ ، أ > ١ تكون د (س) > ١

عندما س ∈ ....

(أ) ع (ب) $ع^{+}$ (جـ) $ع^{-}$ (د) ص

⑬ أى من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية تمثل دالة نماء أسى ؟

(أ) د (س) = $٢^{-س}$ (ب) د (س) = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{س}$

(جـ) د (س) = $٣^{س}$ (د) د (س) = $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$

⑭ أى من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية تمثل دالة تضاؤل أسى ؟

(أ) د (س) = $٢^{س}$ (ب) د (س) = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{-س}$

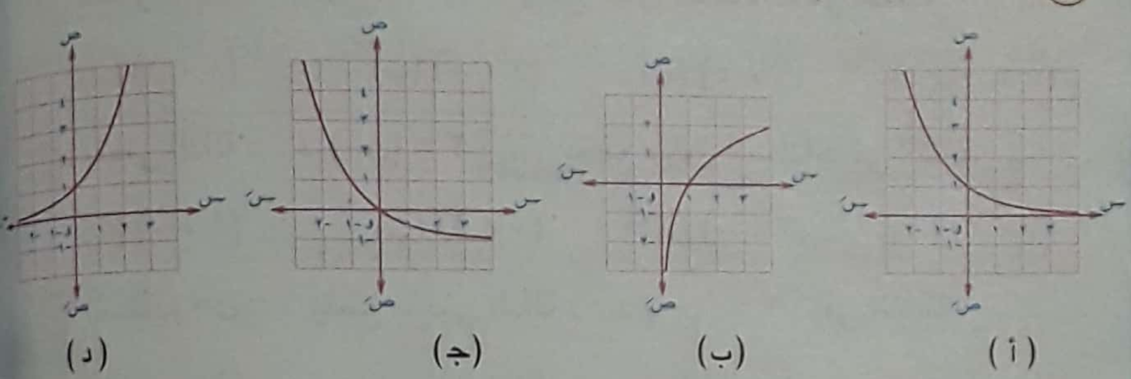
(جـ) د (س) = $٣^{س}$ (د) د (س) = $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$

⑮ فى الدالة الأسية ر حيث ر (س) = $أ^{س}$ ، ٠ < أ < ١ تكون ٠ < $أ^{س}$ < ١

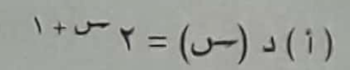
عندما س ∈ ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]− ∞ ، ٠[(جـ)]١ ، ∞[(د)]− ∞ ، ١[

(١٦) الدالة د حيث د (س) = $٢^{س}$ يمثلها الشكل البيانى ....



(١٧) الشكل المقابل يمثل الدالة د حيث ....



(أ) د (س) = $٢^{س + ١}$

(ب) د (س) = $٢^{-س}$

(جـ) د (س) = $٣^{-س}$

(د) د (س) = $٢^{س}$

(١٨) جملة مبلغ ٥٠٠٠ جنيه موضوع فى بنك يعطى فائدة مركبة سنوية قدرها ٥٪ لمدة ٧ سنوات ≃ .... جنيه.

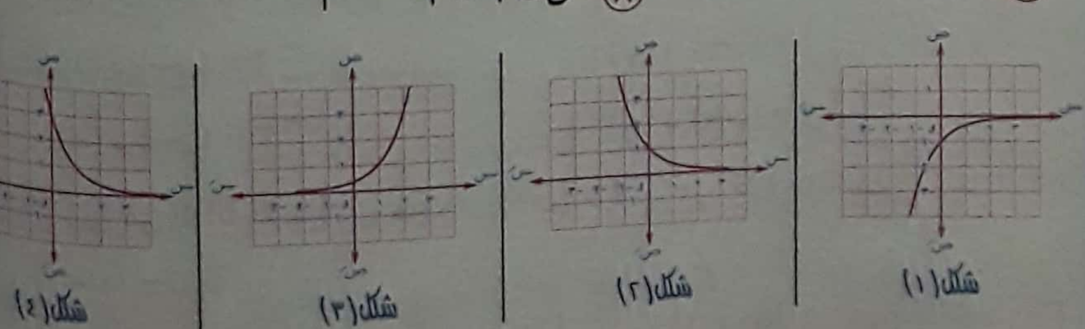
(أ) ٦٧٥٠ (ب) ٧٠٣٥٫٥ (جـ) ٥٣٥٠ (د) ٨٥٠٠

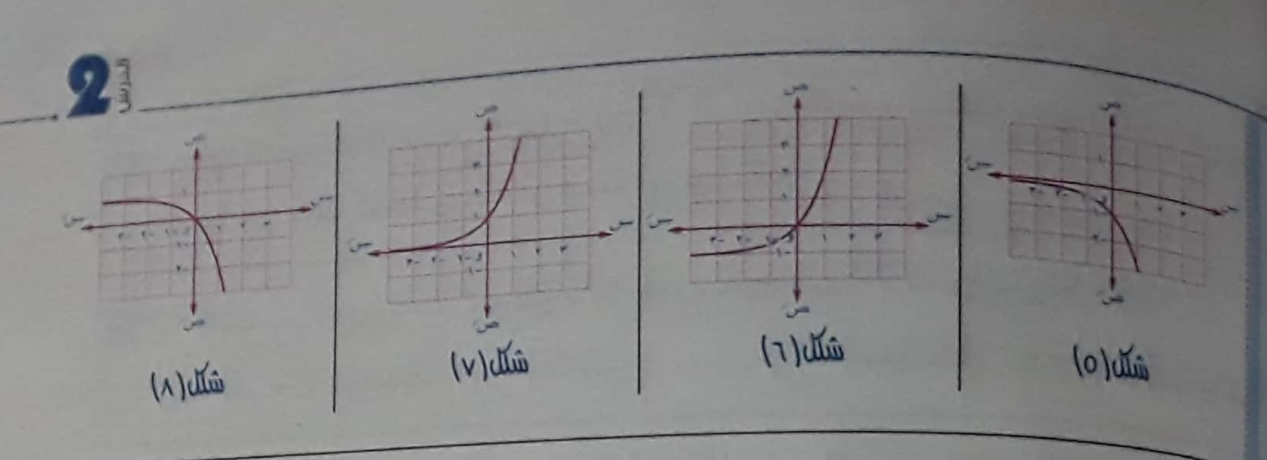
١٨ اختر الشكل البيانى المناسب لكل من قواعد الدوال الآتية :

(١) ص = $٣^{س}$ (٢) ص = $٣^{-س}$ (٣) ص = $-٣^{س}$

(٤) ص = $-٣^{-س}$ (٥) ص = $٣^{س} - ١$ (٦) ص = $٣^{س - ١}$

(٧) ص = $٣^{١ - س}$ (٨) ص = $١ - ٣^{س}$





١٩ مثل الدالة د فى كل مما يأتى بيانيًا ، ثم أوجد المجال والمدى لكل منها ، وبين أيًا منها تزايدية وأيًا منها تناقصية :

① د (س) = $٣^{س}$
② د (س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$
③ د (س) = −٣ $(٢)^{س}$
④ د (س) = $٢^{س + ١}$ + ١
⑤ د (س) = $(\frac{١}{٢})^{س + ٢}$ − ٢
⑥ د (س) = ٢ $(\frac{٢}{٣})^{س - ١}$ + ١
⑦ د (س) = − $(\frac{١}{٢})^{س - ٢}$ + $\frac{٣}{٤}$

٢٠ أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① $٢^{س + ٢}$ = ٤
② $٢^{س}$ = ٨
③ $٣^{س}$ = ٤ − س
④ $٣^{س - ٢}$ = ٣ − س
⑤ $٢^{١ - س}$ = س + ٥
⑥ $٤^{س + ١}$ = ٤ − س
⑦ $٢^{س}$ = ٢ س
⑧ $٢^{س}$ = $٣^{س + ١}$
⑨ $٢^{س + ١}$ = $٣^{١ - س}$

٢١ إذا كانت د : ح ⟵ $ح^{+}$ حيث د (س) = $٣^{س - ١}$ ، فارسم منحنى الدالة لكل س ∈ [−٢ ، ٣] ومن الرسم أوجد :

① د $(\frac{٣}{٢})$
② قيمة س عندما $٣^{س - ١}$ = $٧\frac{١}{٢}$ «١,٧ ، ٢,٨»

٢٢ مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ١ - س^{٢} & \text{، عندما س} \le ٠ \\ (\frac{١}{٢})^{س} & \text{، عندما س} > ٠ \end{cases}$

ومن الرسم استنتج مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها .

٢٣ ارسم منحنى الدالة د : د (س) = $٢^{|س|}$ ومن الرسم استنتج مدى الدالة واطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

٢٤ ارسم منحنى الدالة د : د (س) = $(\frac{1}{2})^{|س|}$ ومن الرسم استنتج مدى الدالة واطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

٢٥ إذا كانت : د (س) = $٥^{س}$ وكان د (١ + جا س) + د (-١ + جا س) = ٢٦
أوجد قيم س الحقيقية. «س = $\frac{\pi}{2}$ + ٢ ن π حيث ن ∈ ص»

٢٦ تفكير إبداعي : إذا كانت د (س) = $٢^{س}$
فأثبت أن : المقدار $\frac{1}{د(س) + 1}$ + $\frac{1}{د(-س) + 1}$ له قيمة ثابتة مهما كانت قيمة س

تطبيقات على النمو والتضاؤل الأسى

٢٧ الربط بالادخار : أودع زياد مبلغ ٨٠٠٠٠ جنيه فى أحد البنوك بفائدة سنوية ١٠,٥٪ ، كم يصبح جملة رصيده بالجنيه بعد ١٠ سنوات ؟ «٢١٧١٢٦ جنيه»

٢٨ الربط بالسكان : إذا كان عدد سكان إحدى الدول فى نهاية عام ٢٠٠٠ هو ٤٣,٣ مليون نسمة وكان معدل الزيادة السكانية فى السنة يساوى ١,٥ ٪

(١) أوجد صيغة تمثل عدد سكان هذه الدولة بعد مرور ن سنة من عام ٢٠٠٠

(٢) استخدم هذه الصيغة لإيجاد عدد سكان المتوقع لهذه الدولة عام ٢٠٢٠

«٥٨,٣ مليون نسمة»

٢٩ الربط بالرياضة : يتناقص عدد المشجعين لإحدى فرق كرة القدم بمعدل ٤٪ نتيجة خسارتها فى إحدى الدورات الرياضية، فإذا كان عدد المشجعين فى أول مباراة ٣٦٤٠٠ فاكتب دالة أسية تمثل عدد الحضور (ص) فى المباراة (ن) ، ثم قدر عدد المشجعين فى المباراة العاشرة. «٢٤٢٠٠ مشجع»

٣٠ الربط بالاستثمار : بلغ عدد الأبقار فى إحدى مزارع الماشية ٨٠ بقرة ، فإذا كان معدل التكاثر لهذه الأبقار يبلغ ١٨٪ سنويًا تقريبًا ، فأوجد عدد الأبقار فى المزرعة بعد ٤ سنوات. «١٥٥ بقرة»

٣١ الربط بالسكان : بلغ تعداد سكان إحدى المحافظات فى جمهورية مصر العربية ٤,٦ مليون نسمة بمتوسط زيادة ٤٪ سنويًا.

(١) اكتب دالة أسية تمثل النمو المستقبلى بعد ن سنة.

(٢) قدر عدد سكان هذه المحافظة بعد مرور ٥ سنوات من وقت التعداد. «٥,٦ مليون نسمة»

٣٢ الربط بالصناعة : يتناقص إنتاج منجم ذهب سنويًا بمقدار ٥٪ فإذا كان إنتاج المنجم فى السنة الأولى حوالى ٢٥٤ كجم قدر إنتاج المنجم فى السنة التاسعة. «١٦٠ كجم»

٣٣ الربط بالأحياء : إذا كانت كمية البكتيريا الموجودة فى وقت ما ٢٠٠٠ بكتيريا وكانت البكتيريا تتزايد بمعدل ٧٪ فى الساعة. أوجد كمية البكتيريا الموجودة بعد مرور ١١ ساعة. «٤٢١٠ بكتيريا»

٣٤ أودع رجل مبلغ ٥٠٠٠ جنيه فى أحد البنوك التى تعطى فائدة سنوية مركبة قدرها ٨٪
أوجد جملة المبلغ بعد مرور عشرة أعوام فى كل من الحالات الآتية :

(١) العائد سنوى. (٢) العائد ربع سنوى.

(٣) العائد شهرى. «١٠٧٩٤,٦٢ ، ١١٠٤٠,٢ ، ١١٠٩٨,٢ جنيه»

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٣٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الدالة د : د (س) = (٢ أ)^س تكون متناقصة عندما أ ∈ ....

(أ)]٠ ، ١[(ب)]١ ، ∞[(جـ)]٠ ، ٢[(د)]٠ ، $\frac{١}{٢}$[

(٢) إذا كانت الدالة د : د (س) = $\left(\frac{أ}{٣}\right)^{س}$ دالة أسية تزايدية فإن ....

(أ) أ > ٠ (ب) أ > ١ (جـ) أ > ٣ (د) أ < ٣

(٣) إذا كانت : د (س) = (أ − ٢)^س دالة أسية فإن ....

(أ) أ ∈ ح⁺ − {٢} (ب) أ > ٢

(جـ) أ < ٢ (د) أ ∈]٢ ، ∞[− {٣}

④ أى المنحنيات الآتية تقطع محور السينات ؟

(أ) د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ (ب) د (س) = $٢^{س} + ٣$

(جـ) د (س) = $٣^{س} - ١$ (د) د (س) = $٣^{-س} - ١$

⑤ إذا قطع المستقيم ص = ٨ المنحنيين : ص = $٢^{س}$ ، ص = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ فى النقطتين

أ ، ب على الترتيب فإن : طول $\overline{أب}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

⑥ إذا انعكس منحنى الدالة : د (س) = $٣^{س}$ حول محور الصادات ثم ازاحته ٥ وحدات

لأعلى فإن الدالة الجديدة هى ....

(أ) ر (س) = ٥ + $٣^{-س}$ (ب) ر (س) = $-٣^{س}$ + ٥

(جـ) ر (س) = $٣^{س}$ − ٥ (د) ر (س) = $٣^{-س}$ − ٥

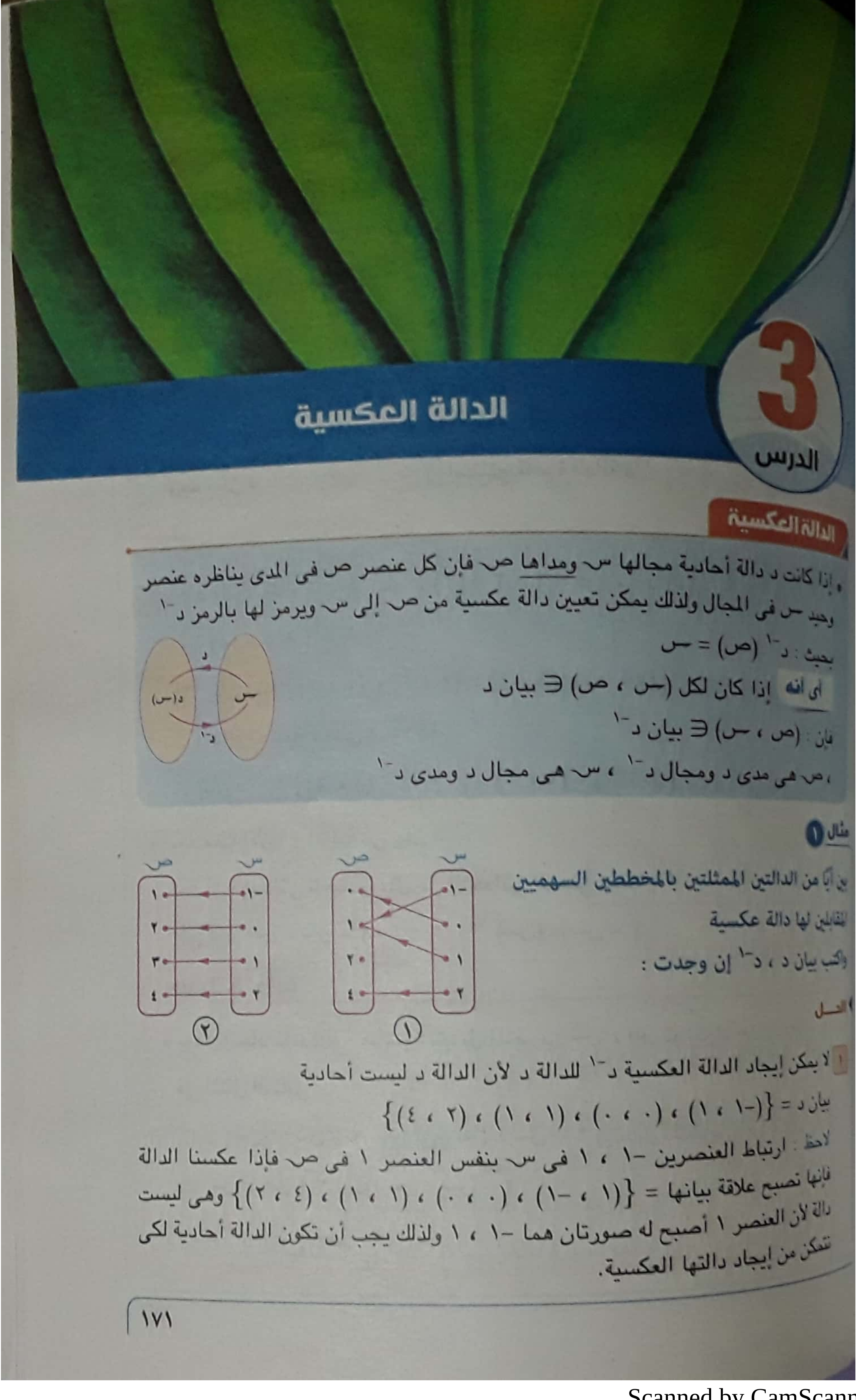
⑦ إذا كانت : د (س) = $\frac{٩^{س}}{٩^{س} + ٣}$ فإن : د (س) + د (١ − س) = ...

(أ) $\frac{٢}{٩^{س} + ٣}$ (ب) $\frac{٩^{س} + ٣}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

⑧ إذا كانت : د (س) = $\frac{٤^{س}}{٤^{س} + ٢}$

فإن : د $\left(\frac{١}{١١}\right)$ + د $\left(\frac{٢}{١١}\right)$ + د $\left(\frac{٣}{١١}\right)$ + ... + د $\left(\frac{١٠}{١١}\right)$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) $\frac{٦}{١١}$ (د) ١٠



الدرس 3

الدالة العكسية

الدالة العكسية

• إذا كانت د دالة أحادية مجالها س ومداها ص فإن كل عنصر ص في المدى يناظره عنصر وحيد س في المجال ولذلك يمكن تعيين دالة عكسية من ص إلى س ويرمز لها بالرمز د$^{-1}$

بحيث : د$^{-1}$ (ص) = س

أي أنه إذا كان لكل (س ، ص) ∈ بيان د

فإن : (ص ، س) ∈ بيان د$^{-1}$

، ص هي مدى د ومجال د$^{-1}$ ، س هي مجال د ومدى د$^{-1}$

مثال ①

بين أيًا من الدالتين الممثلتين بالمخططين السهميين المقابلين لها دالة عكسية

واكتب بيان د ، د$^{-1}$ إن وجدت :

الحل

① لا يمكن إيجاد الدالة العكسية د$^{-1}$ للدالة د لأن الدالة د ليست أحادية

بيان د = {(-١ ، ١) ، (٠ ، ٠) ، (١ ، ١) ، (٢ ، ٤)}

لاحظ : ارتباط العنصرين -١ ، ١ في س بنفس العنصر ١ في ص فإذا عكسنا الدالة فإنها تصبح علاقة بيانها = {(١ ، -١) ، (٠ ، ٠) ، (١ ، ١) ، (٤ ، ٢)} وهي ليست دالة لأن العنصر ١ أصبح له صورتان هما -١ ، ١ ولذلك يجب أن تكون الدالة أحادية لكي نتمكن من إيجاد دالتها العكسية.



٢ يمكن إيجاد الدالة العكسية $د^{-١}$ للدالة د لأن الدالة د أحادية ولكل (س ، ص) ∈ بيان د
يوجد (ص ، س) ∈ بيان $د^{-١}$
بيان د = {(-١ ، ١) ، (٠ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٤)}
بيان $د^{-١}$ = {(١ ، -١) ، (٢ ، ٠) ، (٣ ، ١) ، (٤ ، ٢)}

مثال ٢

إذا كانت الدالة د معرفة من المجموعة س = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}
إلى المجموعة ص = {٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧} وكانت : د (س) = س + ٢

١ أوجد بيان $د^{-١}$
٢ استنتج قاعدة الدالة $د^{-١}$

الحــل

١ ∵ د (٢) = ٢ + ٢ = ٤ ، د (٣) = ٣ + ٢ = ٥ ، د (٤) = ٤ + ٢ = ٦
، د (٥) = ٥ + ٢ = ٧
∴ بيان د = {(٢ ، ٤) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٦) ، (٥ ، ٧)}
∴ د دالة أحادية ، مدى د = ص
∴ بيان $د^{-١}$ = {(٤ ، ٢) ، (٥ ، ٣) ، (٦ ، ٤) ، (٧ ، ٥)}

٢ بملاحظة الأزواج المرتبة فى بيان $د^{-١}$
نجد أن الإحداثى الصادى يقل عن الإحداثى السينى بمقدار ٢
أى أن ص = س − ٢ ∴ $د^{-١}$ (س) = س − ٢

ملاحظــة هامة

- يمكن إيجاد قاعدة $د^{-١}$ مباشرةً بتبديل المتغيرين س ، ص ثم إيجاد ص بدلالة س
فى المثال السابق :
∵ د (س) = س + ٢ **أى أن** ص = س + ٢ وبتبديل المتغيرين س ، ص
∴ س = ص + ٢ ومنها ص = س − ٢
∴ $د^{-١}$ (س) = س − ٢

مثال ٣

أوجد الدالة العكسية للدالة د : د (س) = ٣ س − ٢ ومثل الدالة ومعكوسها بيانيًا فى شكل واحد.

الحل

• لإيجاد الدالة العكسية نقوم بتبديل المتغيرين ثم نوجد ص بدلالة س

∴ ص = ٣ س − ٢

وبتبديل المتغيرين ∴ س = ٣ ص − ٢

نوجد ص بدلالة س ∴ ٣ ص = س + ٢

∴ ص = $\frac{١}{٣}$ (س + ٢) ∴ $د^{-١}$ (س) = $\frac{١}{٣}$ (س + ٢)

التمثيل البيانى :

• د (س) = ٣ س − ٢

س	١	٠	−١
د (س)	١	−٢	−٥

• $د^{-١}$ (س) = $\frac{١}{٣}$ (س + ٢)

س	١	−٢	−٥
$د^{-١}$ (س)	١	٠	−١

ملاحظـــات

١ لاحظ أن : $د^{-١}$ (س) ≠ $\frac{١}{د (س)}$ ففى المثال السابق

$د^{-١}$ (س) = $\frac{١}{٣}$ (س + ٢) بينما $\frac{١}{د (س)}$ = $\frac{١}{٣ س − ٢}$

٢ فى المثال السابق نلاحظ أن الدالة د والدالة العكسية لها $د^{-١}$ متماثلتان بالنسبة للمستقيم ص = س وبصفة عامة لأى دالة د إذا أمكن إيجاد دالتها العكسية $د^{-١}$ فإن الدالتين د ، $د^{-١}$ تكونان متماثلتين بالنسبة للمستقيم ص = س

أى أن د ، $د^{-١}$ كل منهما صورة للأخرى بالانعكاس فى المستقيم ص = س

خواص الدالة العكسية

من خواص الدالة العكسية :

١ يقال إن د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى إذا كان (د ∘ ر) (س) = س
، (ر ∘ د) (س) = س

٢ مجال الدالة د = مدى الدالة العكسية $د^{-1}$ ، مدى الدالة د = مجال الدالة العكسية $د^{-1}$

مثال ٤

حقق أن كلًّا من : د ، ر حيث د (س) = ٤ س + ٩ ، ر (س) = $\frac{\text{س} - ٩}{٤}$ دالة عكسية للأخرى

الحـــل

∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) = د $\left(\frac{\text{س} - ٩}{٤}\right)$

= $\cancel{٤}\left(\frac{\text{س} - ٩}{\cancel{٤}}\right)$ + ٩ = (س − ٩) + ٩ = س

، (ر ∘ د) (س) = ر (د (س)) = ر (٤ س + ٩) = $\frac{٤\text{س} + ٩ - ٩}{٤}$ = $\frac{٤\text{س}}{٤}$ = س

∴ د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى.

مثال ٥

أوجد المجال الذى يكون فيه للدالة د : د (س) = $\text{س}^{٢}$ دالة عكسية ، وأوجد هذه الدالة العكسية

الحـــل

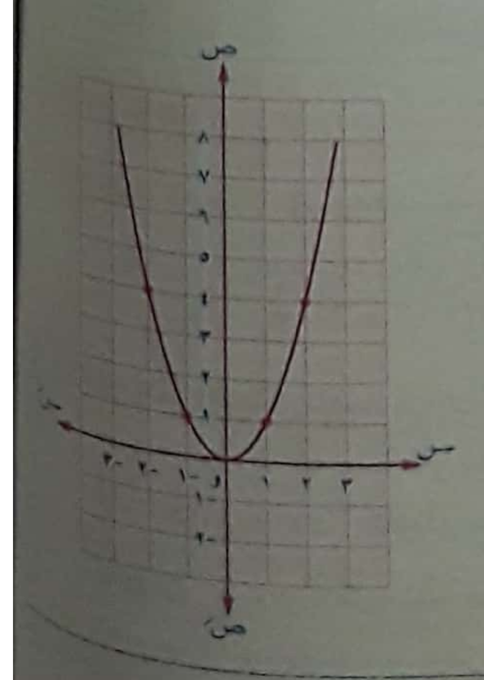
- إذا كانت س ∈ ح

فإن الدالة د : د (س) = $\text{س}^{٢}$

ليست أحادية (لا تحقق شرط

الخط الأفقى) لذلك ليس لها

دالة عكسية فى المجال ح



• إذا كانت س ∈ [٠ ، ∞[فإن الدالة د : د (س) = س^٢

تكون أحادية ويكون لها في هذه الحالة دالة عكسية.

∴ ص = س^٢ حيث س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

وبتبديل المتغيرين

∴ س = ص^٢

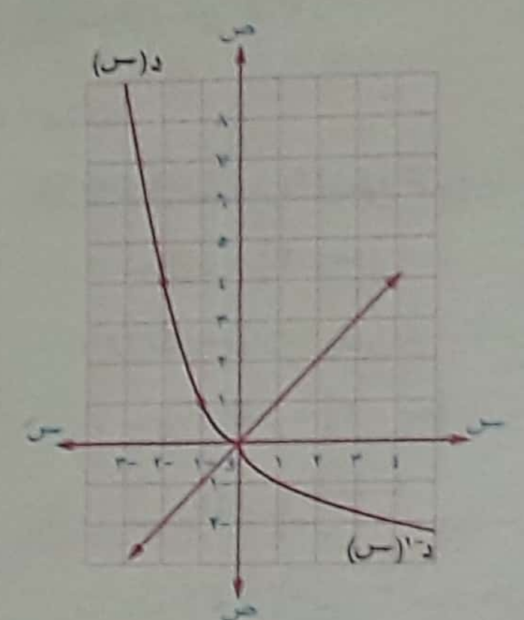
∴ ص = √س

حيث : ص ≥ ٠ ، س ≥ ٠

∴ د^-١ (س) = √س

• إذا كانت : س ∈]- ∞ ، ٠] فإن الدالة د : د (س) = س^٢

تكون أحادية ويكون لها في هذه الحالة دالة عكسية.



∴ ص = س^٢ حيث س ≤ ٠ ، ص ≥ ٠

وبتبديل المتغيرين

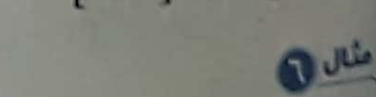
∴ س = ص^٢ حيث س ≥ ٠ ، ص ≤ ٠

∴ ص = - √س حيث س ≥ ٠ ، ص ≤ ٠

∴ د^-١ (س) = - √س

∴ المجال الذي يكون فيه للدالة د دالة عكسية

=]٠ ، ∞[أ ،]- ∞ ، ٠]



مثال ٦

إذا كانت : د(س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٣ فأوجد :

١ مجال ومدى الدالة د

٢ د^-١ (س) وعين مجال ومدى الدالة د^-١



الحـــل

1. مجال د = ح − {٢} ومدى د = ح − {٣}

2. ∵ ص = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٣ بتبديل المتغيرين ∴ س = $\frac{١}{ص - ٢}$ + ٣

∴ $\frac{١}{ص - ٢}$ = س − ٣ ∴ ص − ٢ = $\frac{١}{س - ٣}$

∴ ص = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٢ ∴ $د^{-١}$ (س) = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٢

∴ مجال $د^{-١}$ = ح − {٣} ومدى $د^{-١}$ = ح − {٢}

لاحظ أن : مجال الدالة $د^{-١}$ = مدى الدالة د

مثال ٧

إذا كانت د دالة حيث د (س) = ٢ + $\sqrt{س - ٣}$ فأوجد :

1. مجال ومدى الدالة د
2. $د^{-١}$ (س) وعين مجال ومدى الدالة $د^{-١}$

الحـــل

1. ∵ د (س) معرفة لجميع قيم س − ٣ ≥ ٠ ∴ س ≥ ٣

∴ مجال د = [٣ ، ∞[

، ∵ لكل س ≥ ٣ يكون ٢ + $\sqrt{س - ٣}$ ≥ ٢ ∴ ص ≥ ٢

∴ مدى الدالة د = [٢ ، ∞[

2. ∵ ص = ٢ + $\sqrt{س - ٣}$ حيث س ≥ ٣ ، ص ≥ ٢ وبتبديل المتغيرين

∴ س = ٢ + $\sqrt{ص - ٣}$ حيث ص ≥ ٣ ، س ≥ ٢

∴ س − ٢ = $\sqrt{ص - ٣}$ ∴ $(س - ٢)^٢$ = ص − ٣

∴ ص = $(س - ٢)^٢$ + ٣

∴ $د^{-١}$ (س) = $(س - ٢)^٢$ + ٣ حيث س ≥ ٢ ، ص ≥ ٣

، مجال $د^{-١}$ = مدى د = [٢ ، ∞[، مدى $د^{-١}$ = مجال د = [٣ ، ∞[

مثال ٨

أوجد الدالة العكسية للدالة د حيث د (س) = $(س - ٢)^٢ + ٣$ ، س ≥ ٢ موضحًا مجال $د^{-١}$

الحل

∵ ص = $(س - ٢)^٢ + ٣$ ، س ≥ ٢

، ∵ لكل س ≥ ٢ يكون $(س - ٢)^٢ + ٣ ≥ ٣$ ∴ ص ≥ ٣

بتبديل المتغيرين

∴ س = $(ص - ٢)^٢ + ٣$ ، ص ≥ ٢ ، س ≥ ٣ ∴ $(ص - ٢)^٢$ = س - ٣

، وبأخذ الجذر التربيعى للطرفين ∴ ص - ٢ = $\pm\sqrt{س - ٣}$

، ∵ ص ≥ ٢

∴ ص - ٢ = $-\sqrt{س - ٣}$ ∴ ص = $-\sqrt{س - ٣} + ٢$

∴ $د^{-١}$ (س) = $-\sqrt{س - ٣} + ٢$ حيث س ≥ ٣ ، ص ≥ ٢

∴ مجال $د^{-١}$ = [٣ ، ∞[

مثال ٩

إذا كانت د : $ح^+$ ⟵ ح حيث د (س) = $\frac{١}{س^٢ + ١}$ أوجد $د^{-١}$ (س) وعين مجال ومدى $د^{-١}$

الحل

∵ ص = $\frac{١}{س^٢ + ١}$ ، س ∈ $ح^+$ ولكل س > ٠ يكون ٠ < ص < ١

وبتبديل المتغيرين

∴ س = $\frac{١}{ص^٢ + ١}$ ، ص > ٠ ، ٠ < س < ١

∴ $ص^٢ + ١ = \frac{١}{س}$ ∴ $ص^٢ = \frac{١}{س} - ١$

، ∵ ص > ٠ ∴ ص = $\sqrt{\frac{١}{س} - ١}$

∴ $د^{-١}$ (س) = $\sqrt{\frac{١}{س} - ١}$ حيث ص > ٠ ، ٠ < س < ١

∴ مجال $د^{-١}$ =]٠ ، ١[ومدى $د^{-١}$ = $ح^+$

ملاحظـــة

الدوال المتماثلة حول المستقيم ص = س دالتها العكسية هى نفسها ومنها :

١ الدوال الخطية على الصورة د : د (س) = − س + ب

مثل د : د (س) = − س + ١ ، د : د (س) = $\frac{١}{٢}$ − س ، ...

٢ الدوال الكسرية على الصورة د : د (س) = $\frac{أ}{س - ك}$ + ك حيث ك ∈ ع

مثل د : د (س) = $\frac{١}{س - ٥}$ + ٥ ، د : د (س) = $\frac{-٢}{س}$ ، ...

مثال ١٠

أثبت أن الدالة د فى كل مما يأتى دالتها العكسية هى نفسها :

١ د (س) = ٢ − س

٢ د (س) = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٣

الحـــل

١ ص = ٢ − س بتبديل المتغيرين

∴ س = ٢ − ص

∴ ص = ٢ − س

∴ $د^{-١}$ (س) = ٢ − س = د (س)

∴ د دالتها العكسية هى نفسها.

٢ ص = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٣ بتبديل المتغيرين

∴ س = $\frac{١}{ص - ٣}$ + ٣

∴ س − ٣ = $\frac{١}{ص - ٣}$

∴ ص − ٣ = $\frac{١}{س - ٣}$

∴ ص = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٣

∴ $د^{-١}$ (س) = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٣ = د (س)

∴ د دالتها العكسية هى نفسها.



تمارين 9

على الدالة العكسية



من أسئلة الكتاب المدرسي

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت د دالة أحادية وكانت ر دالة حيث منحنى ر هو صورة منحنى د بالانعكاس في المستقيم ص = س فإن : ....

(أ) ر (س) = د (س)
(ب) ر (س) = $\frac{١}{د (س)}$
(جـ) ر (س) = $د^{-١}$ (س)
(د) ر (س) = (د ο د) (س)

(٢) أى مما يأتى ليس له دالة عكسية ؟

(أ) ص = $\sqrt{س}$
(ب) ص = ٢ س
(جـ) ص = $س^{٣}$
(د) ص = $س^{٢}$

(٣) إذا كانت الدالة د = {(١ ، ٤) ، (٢ ، −٣) ، (٣ ، ١) ، (٤ ، ٠)}

فإن : $د^{-١}$ (١) + د (٢) = ...

(أ) −١
(ب) صفر
(جـ) ١
(د) ٣

(٤) إذا كانت الدالة $د^{-١}$ حيث $د^{-١}$ = {(٢ ، ٣) ، (٥ ، ب)} هى الدالة العكسية للدالة د حيث د = {(٤ ، ٥) ، (أ ، ٢)} فإن : أ − ب = ...

(أ) صفر
(ب) ١
(جـ) −١
(د) ٢

(٥) إذا قطع المستقيم ص = س الدالة الأحادية د فى النقطة (٢ ، ٢) فإنه يقطع الدالة $د^{-١}$ فى النقطة ....

(أ) (−٢ ، ٢)
(ب) (٢ ، ٢)
(جـ) (−٢ ، −٢)
(د) (٢ ، −٢)

(٦) إذا كانت د دالة حيث د (س) = س + ٢ فإن : $د^{-١}$ (س) = ...

(أ) س + ٢
(ب) − س + ٢
(جـ) س − ٢
(د) $\frac{س}{٢}$

(٧) إذا كانت د دالة حيث د (س) = ٧ س فإن : $د^{-١}$ (س) = ...

(أ) ٧ س
(ب) $\frac{س}{٧}$
(جـ) $\frac{٧}{س}$
(د) ٧ − س

⑧ صورة النقطة (٣ ، −١) بالانعكاس فى المستقيم ص = س هى ....

(أ) (٣ ، −١)　(ب) (−١ ، −٣)　(جـ) (−١ ، ٣)　(د) (٣ ، ١)

⑨ إذا تقاطع منحنى الدالة د مع منحنى الدالة د$^{-1}$ فى نقطة (ك ، ٢ك − ٣)

فإن : ك = ...

(أ) ٢　(ب) ٣　(جـ) ٤　(د) ٥

⑩ إذا تقاطع منحنى الدالة د مع منحنى الدالة د$^{-1}$ فى نقطة (أ ، $\frac{٤}{أ}$)

فإن : أ = ...

(أ) ٢　(ب) ± ٢　(جـ) ٤　(د) ± ٤

⑪ إذا كانت د$^{-1}$ هى الدالة العكسية للدالة د فإن : ....

(أ) مجال د$^{-1}$ = مجال د　(ب) مجال د$^{-1}$ = مدى د

(جـ) مدى د$^{-1}$ = مدى د　(د) مدى د$^{-1}$ = مجال د$^{-1}$

⑫ إذا كانت : ص = $\sqrt[٣]{س}$ فإن الدالة العكسية لها ص = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ س^{٣}　(ب) س^{٣}　(جـ) س^{٣} − ١　(د) ٣ س^{٣}

⑬ إذا كانت د : ح − {٢} ⟵ ح − {١} حيث د (س) = $\frac{س + ١}{س − ٢}$

فإن : د$^{-1}$ (٤) = ...

(أ) ٢　(ب) ٣　(جـ) ٤　(د) ٥

⑭ إذا كانت : د (س) = $\frac{٢ س + ٣}{٣ س + ٥}$ فإن مجال الدالة العكسية د$^{-1}$ (س)

هو ....

(أ) ح　(ب) ح − {$\frac{-٥}{٣}$}

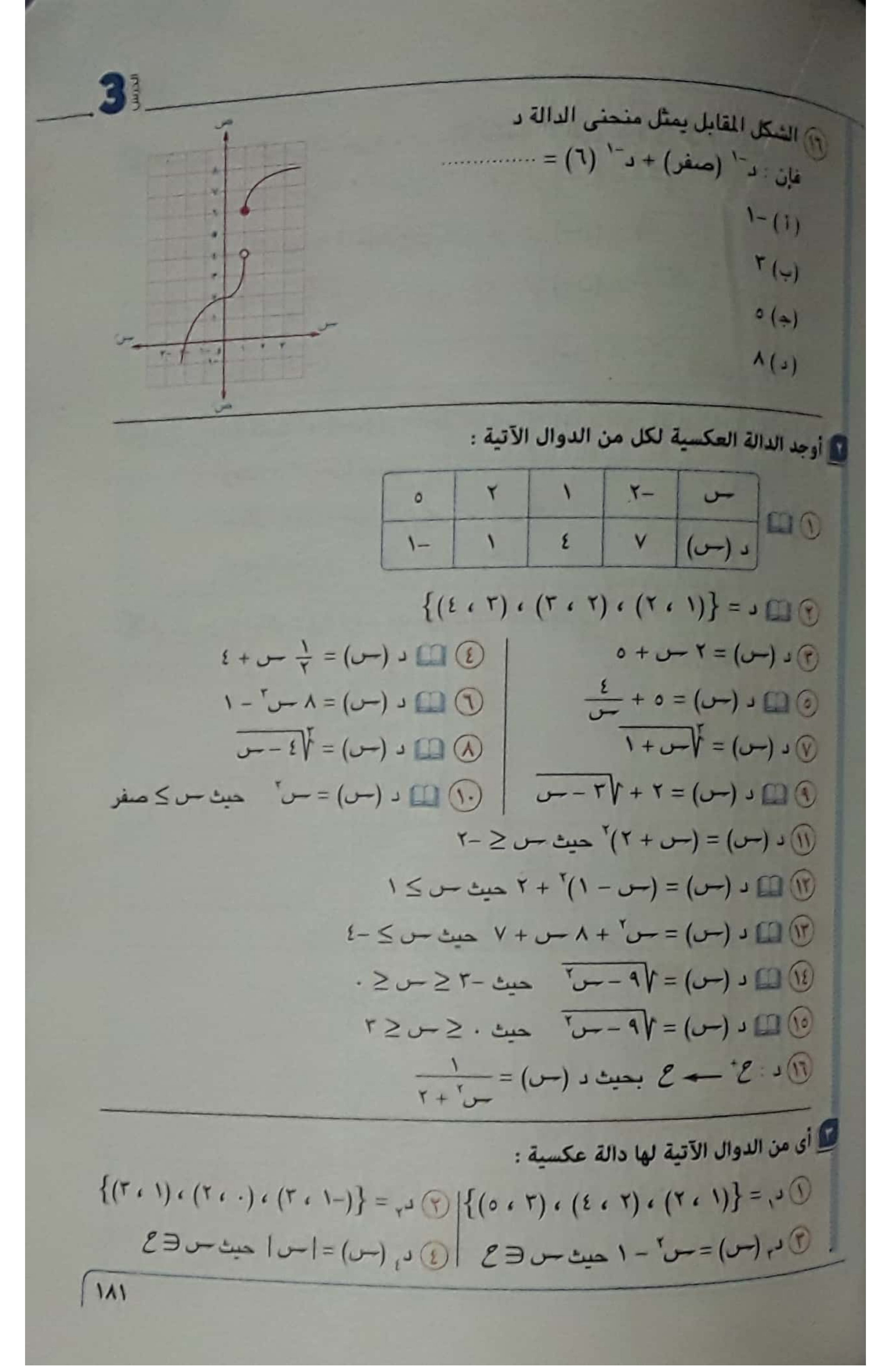
(جـ) ح − {$\frac{٢}{٣}$}　(د) ح − {$\frac{-٥}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$}

⑮ الشكل المقابل يمثل دالة د : س ⟵ ص

فإن : د$^{-1}$ (٢) = ...

(أ) ١　(ب) ٥

(جـ) ٤　(د) ٧



⑯ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن : $د^{-1}$ (صفر) + $د^{-1}$ (٦) = ...

(أ) −١

(ب) ٣

(جـ) ٥

(د) ٨

٢ أوجد الدالة العكسية لكل من الدوال الآتية :

①

س	−٢	١	٢	٥
د (س)	٧	٤	١	−١

② د = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤)}

③ د (س) = ٢ س + ٥

④ د (س) = $\frac{١}{٢}$ س + ٤

⑤ د (س) = ٥ + $\frac{٤}{س}$

⑥ د (س) = ٨ $س^{٣}$ − ١

⑦ د (س) = $\sqrt[٣]{س + ١}$

⑧ د (س) = $\sqrt[٣]{٤ − س}$

⑨ د (س) = ٢ + $\sqrt{٣ − س}$

⑩ د (س) = $س^{٢}$ حيث س ≤ صفر

⑪ د (س) = $(س + ٢)^{٢}$ حيث س ≥ −٢

⑫ د (س) = $(س − ١)^{٢}$ + ٢ حيث س ≥ ١

⑬ د (س) = $س^{٢}$ + ٨ س + ٧ حيث س ≥ −٤

⑭ د (س) = $\sqrt{٩ − س^{٢}}$ حيث −٣ ≤ س ≤ ٠

⑮ د (س) = $\sqrt{٩ − س^{٢}}$ حيث ٠ ≤ س ≤ ٣

⑯ د : $ح^{+}$ ⟵ ح بحيث د (س) = $\frac{١}{س^{٢} + ٢}$

٣ أى من الدوال الآتية لها دالة عكسية :

① $د_{١}$ = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٥)}

② $د_{٢}$ = {(−١ ، ٣) ، (٠ ، ٢) ، (١ ، ٣)}

③ $د_{٣}$ (س) = $س^{٢}$ − ١ حيث س ∈ ح

④ $د_{٤}$ (س) = |س| حيث س ∈ ح

٤ حدد إذا كان كل من الدالتين د ، ر دالة عكسية للأخرى أم لا فى كل مما يأتى :

(١) د (س) = ٢ س − ٣ ، ر (س) = $\frac{\text{س} + ٣}{٢}$

(٢) د (س) = س^{٢} + ٤ حيث س ≤ ٠ ، ر (س) = $\sqrt{\text{س} - ٤}$

(٣) د (س) = $\frac{-٢}{\text{س} - ٥}$ ، ر (س) = $\frac{٥\,\text{س} - ٢}{\text{س}}$

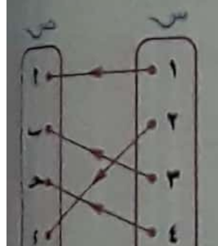
(٤) د (س) = $\sqrt[٣]{٤\,\text{س}}$ ، ر (س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{٤}$

٥ (١) إذا كانت : د (س) = ٥ س

أوجد : د$^{-1}$ (س) ومثلهما بيانيًا.

(٢) الشكل المقابل يمثل دالة د من س إلى ص

فأوجد قيمة : د$^{-1}$ (ب) + ٢ د$^{-1}$ (حـ)



٦ فى كل من الأشكال الآتية ارسم منحنى الدالة العكسية د$^{-1}$:

(١)

(٢)

(٣)

(٤)

(٥)

(٦)

٧ أى من الدوال الآتية معكوسها هو نفس الدالة :

① د (س) = ٢ س	② د (س) = − س
③ د (س) = $\frac{٢}{\text{س}}$	④ د (س) = ٧ − س
⑤ د (س) = $\frac{١}{\text{س} - ٣}$ + ٥	⑥ د (س) = $\frac{١}{\text{س} - \text{ك}}$ + ك حيث ك ∈ ح

---

٨ اكتشف الخطأ :

حاول كل من وائل ورنا إيجاد الدالة العكسية للدالة د (س) = $\frac{\text{س} - ٥}{\text{س}}$

إجابة وائل	إجابة رنا
∵ د (س) = $\frac{\text{س} - ٥}{\text{س}}$	∵ ص = $\frac{\text{س} - ٥}{\text{س}}$
، ∵ $\text{د}^{-١}$ (س) = $\frac{١}{\text{د (س)}}$	∴ س = $\frac{\text{ص} - ٥}{\text{ص}}$ بتبديل المتغيرين
∴ $\text{د}^{-١}$ (س) = ١ ÷ $\frac{\text{س} - ٥}{\text{س}}$	∴ ص س = ص − ٥ بالضرب التبادلى
= ١ × $\frac{\text{س}}{\text{س} - ٥}$	∴ ص س − ص = −٥
$\text{د}^{-١}$ (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س} - ٥}$	∴ ص (س − ١) = −٥
	∴ $\text{د}^{-١}$ (س) = $\frac{-٥}{\text{س} - ١}$

أى من الإجابتين هى الصواب ؟ ولماذا ؟

---

٩ فى كل مما يأتى عين المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية :

① د (س) = $\text{س}^{٢}$	② د (س) = $\text{س}^{٣}$
③ د (س) = $\frac{١}{٢}$ س	

---

١٠ أوجد الدالة العكسية للدالة د حيث : د (س) = $\frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ٥}$

---

١١ إذا كانت كل من الدالتين د ، ر حيث : د (س) = ٢ س + أ

، ر (س) = ب س + ٣ دالة عكسية للأخرى. فما قيمة كل من أ ، ب ؟ « −٦ ، $\frac{١}{٢}$ »

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

١٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = أ س + ب ، د$^{-1}$ (٩) = ٣ ، د$^{-1}$ (٥) = ٢
فإن : أ × ب = ...

(أ) −١٢ (ب) −١٠ (جـ) −٨ (د) −٧

② إذا كانت : د (س) = س^{٢} ، ر (س) = س − ٣ فإن مجموعة حل المعادلة
ر (د (س)) = ر$^{-1}$ (س) هى ....

(أ) {٢ ، −٣} (ب) {٣} (جـ) {٣ ، −٢} (د) {٢ ، ٢}

③ إذا كانت د : ح − {١} ⟵ ح − {٢} حيث س = $\frac{\text{د (س)} + ١}{٢ - \text{د (س)}}$
فإن : د$^{-1}$ (٣) = ...

(أ) −٤ (ب) −٣ (جـ) −٢ (د) −١

④ إذا كانت د : ح − {١} ⟵ ح − {٣} حيث د (س) = $\frac{\text{أ س} + ٢}{\text{س} - \text{ب}}$
فإن : د$^{-1}$ (١) = ...

(أ) −٢ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) غير معرف.

⑤ إذا كانت د : ح ⟵ ح حيث د (س) = $\sqrt[3]{\text{س} - ٥}$ ، ر : ح ⟵ ح حيث
ر (س) = ٢ س − ٧ فإن : (ر ∘ د$^{-1}$) (س) = ...

(أ) ٢ س^{٣} − ٣ (ب) ٢ س^{٣} − ٥ (جـ) ٢ س^{٣} + ٣ (د) ٢ س^{٣} + ٥

⑥ إذا كانت د : ح ⟵ ح حيث د (س) = ٣ س − ٤ فإن : د$^{-1}$ (س + ٢) = ...

(أ) $\frac{\text{س} - ٢}{٣}$ (ب) $\frac{\text{س} + ٢}{٣}$ (جـ) $\frac{\text{س} + ٤}{٣}$ (د) $\frac{\text{س} + ٦}{٣}$

⑦ إذا كانت : د (س) = س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٣ س + ١
فإن الدالة العكسية د$^{-1}$ (س) = ...

(أ) (س + ١)^{٣} (ب) $\sqrt[3]{\text{س}}$ − ١ (جـ) $\sqrt[3]{\text{س}}$ + ١ (د) س^{٣} − ١

⑧ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د$^{-1}$ (س)
فإن : (د ∘ د) (صفر) = ...

(أ) −٣ (ب) −٢
(جـ) صفر (د) ١



الدرس 4
الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البيانى

نعلم أنه يمكن كتابة العدد ٨ على الصورة : ٨ = ٢^{٣} ، والعدد (٣) الذى يجب وضعه كأس للعدد (٢) ليعطى (٨) يسمى لوغاريتم العدد (٨) للأساس (٢) ويرمز له بالرمز لو$_{٢}$ ٨

وهكذا نجد أن كل صورة أسية أساسها عدد حقيقى موجب $\neq$ ١ يوجد لها صورة أخرى تكافئها تسمى بالصورة اللوغاريتمية وعمومًا فإن :

ص = لو$_{أ}$ س $\Leftrightarrow$ س = أ^{ص} حيث أ $\in$ ح$^{+}$ − {١} ، س $\in$ ح$^{+}$ ، ص $\in$ ح

فمثلًا : لو$_{٣}$ ٨١ = ٤ $\Leftrightarrow$ ٣^{٤} = ٨١ ، لو$_{٣}$ $\frac{١}{٩}$ = −٢ $\Leftrightarrow$ ٣$^{-٢}$ = $\frac{١}{٩}$

، ٤^{٢} = ١٦ $\Leftrightarrow$ لو$_{٤}$ ١٦ = ٢ ، ٢$^{-٣}$ = $\frac{١}{٨}$ $\Leftrightarrow$ لو$_{٢}$ $\frac{١}{٨}$ = −٣ وهكذا

ملاحظات

١ لا معنى للحديث عن لوغاريتم عدد غير موجب ، فكل من لو$_{٢}$ −٣ ، لو$_{٥}$ −٨ ، لو$_{٦}$ صفر لا معنى له.

٢ الأساس أ يجب أن يكون عددًا موجبًا يختلف عن الواحد الصحيح ويترتب على ذلك أن كلًا من : لو$_{-٢}$ ٨ ، لو$_{صفر}$ ٥ ، لو$_{١}$ ٤ لا معنى له.

٣ اللوغاريتم المعتاد هو اللوغاريتم الذى أساسه ١٠ وقد اتفق على حذف هذا الأساس عند كتابة اللوغاريتم

فمثلًا : لو$_{١٠}$ ٣ تكتب لو ٣

الدالة اللوغاريتمية

إذا كان $أ \in ح^{+} - \{١\}$ فإن الدالة $د : ح^{+} \longrightarrow ح$ حيث $د(س) = لو_{أ} س$ تسمى بالدالة اللوغاريتمية.

العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية

درسنا فيما سبق لرسم الدالة الأسية $د : د(س) = ٣^{س}$ أى $ص = ٣^{س}$ نكون الجدول التالى :

س	٢-	١-	٠	١	٢
$د(س) = ٣^{س}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩

وبتبديل المتغيرين نحصل على الدالة العكسية $س = ٣^{ص}$

وهى الصورة المكافئة للدالة اللوغاريتمية $ص = لو_{٣} س$ أى $د^{-١}(س) = لو_{٣} س$

ولرسم هذه الدالة نبدل قيم س ، ص فى الجدول السابق كما يلى :

س	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩
$د^{-١}(س) = لو_{٣} س$	٢-	١-	٠	١	٢

* من خواص الدالة العكسية والشكل المقابل نلاحظ أن :

منحنيى الدالتين متماثلان حول المستقيم ص = س

، مجال الدالة الأسية هو ح والمدى = $]٠ ، \infty[$

، مجال الدالة اللوغاريتمية هو $]٠ ، \infty[$ والمدى = ح

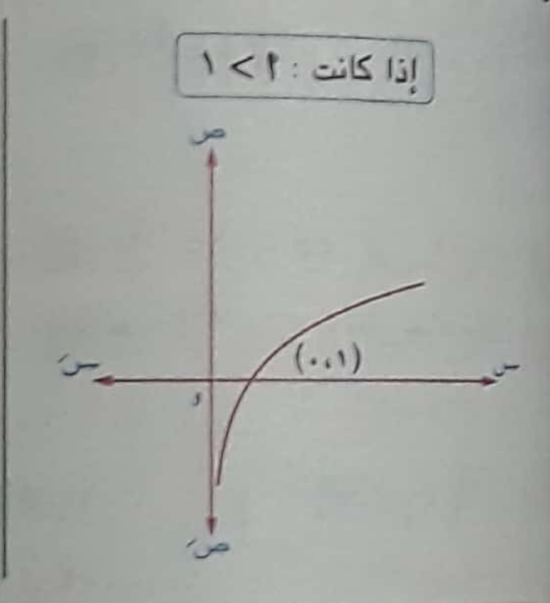
أى أن

الدالة اللوغاريتمية هى الدالة العكسية للدالة الأسية.

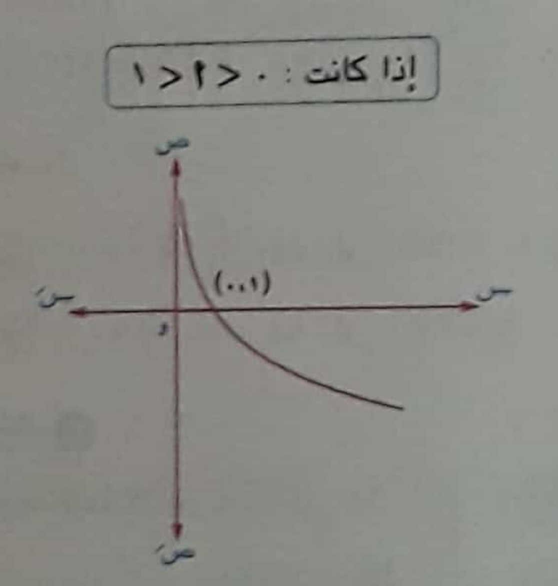
التمثيل البيانى للدالة اللوغاريتمية د : د(س) = $لو_{أ}$ س

• الشكل البيانى للدالة اللوغاريتمية يأخذ أحد الشكلين الآتيين حسب قيمة الأساس أ :

إذا كانت : أ > ١



إذا كانت : ٠ < أ < ١



بعض خواص الدالة اللوغاريتمية د : د (س) = $لو_{أ}$ س

١ مجال الدالة اللوغاريتمية = $ح^{+}$

٢ مدى الدالة اللوغاريتمية = ح

٣ الدالة اللوغاريتمية تزايدية عندما أ > ١ وتناقصية عندما ٠ < أ < ١

٤ جميع منحنيات الدوال اللوغاريتمية لأى أساس موجب ≠ ١ تمر بالنقطة (١ ، ٠)

٥ الدالة اللوغاريتمية هى دالة أحادية أى أنه إذا كان $لو_{أ}$ س = $لو_{أ}$ ص فإن س = ص

مثال ١

عبر عن كل مما يأتى بالصورة الأسية المكافئة :

١ $لو_{٢}$ ٦٤ = ٦ ٢ $لو_{٢}$ ٨ $\sqrt{٢}$ = $\frac{٧}{٢}$ ٣ $لو_{٣}$ $\frac{١}{٢٧}$ = −٣ ٤ لو ٠,٠١ = −٢

الحل

١ $لو_{٢}$ ٦٤ = ٦ ⟺ ٦٤ = $٢^{٦}$

٢ $لو_{٢}$ ٨ $\sqrt{٢}$ = $\frac{٧}{٢}$ ⟺ ٨ $\sqrt{٢}$ = $٢^{\frac{٧}{٢}}$

٣ $لو_{٣}$ $\frac{١}{٢٧}$ = −٣ ⟺ $\frac{١}{٢٧}$ = $٣^{-٣}$

٤ لو ٠,٠١ = −٢ ⟺ ٠,٠١ = $١٠^{-٢}$



مثال ٢

اكتب الصورة اللوغاريتمية المكافئة لكل من الصور الأسية الآتية :

١ $٢٤٣ = (\sqrt{٣})^{١٠}$ ٢ $١٠^{-٢} = ٠,٠١$ ٣ $٣^{\frac{٥}{٢}} = ٩\sqrt{٣}$ ٤ $ح = م^{س}$

الحل

١ $٢٤٣ = (\sqrt{٣})^{١٠} \Leftrightarrow لو_{\sqrt{٣}}\ ٢٤٣ = ١٠$

٢ $١٠^{-٢} = ٠,٠١ \Leftrightarrow لو_{١٠}\ ٠,٠١ = -٢$

٣ $٣^{\frac{٥}{٢}} = ٩\sqrt{٣} \Leftrightarrow لو_{٣}\ ٩\sqrt{٣} = \frac{٥}{٢}$

٤ $ح = م^{س} \Leftrightarrow لو_{م}\ ح = س$

مثال ٣

أوجد قيمة كل من : ١ $لو_{٢}\ ٦٤$ ٢ $لو_{٦}\ ١$ ٣ $لو_{٤}\ ٤\sqrt{٢}$ ٤ $لو_{\sqrt{٣}}\ \frac{١}{٢٧}$ ٥ $لو\ ٠,٠٠٠١$

الحل

١ بفرض أن : $لو_{٢}\ ٦٤ = س$ $\therefore ٢^{س} = ٦٤$ $\therefore ٢^{س} = ٢^{٦}$

$\therefore س = ٦$ $\therefore لو_{٢}\ ٦٤ = ٦$

٢ بفرض أن : $لو_{٦}\ ١ = س$ $\therefore ٦^{س} = ١$

$\therefore س = صفر$ $\therefore لو_{٦}\ ١ = صفر$

٣ بفرض أن : $لو_{٤}\ ٤\sqrt{٢} = س$ $\therefore ٤^{س} = ٤\sqrt{٢}$ $\therefore ٢^{٢س} = ٢^{٢} \times ٢^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore ٢^{٢س} = ٢^{\frac{٥}{٢}}$ $\therefore ٢\ س = \frac{٥}{٢}$ $\therefore س = \frac{٥}{٤}$

$\therefore لو_{٤}\ ٤\sqrt{٢} = \frac{٥}{٤}$

٤ بفرض أن : $لو_{\sqrt{٣}}\ \frac{١}{٢٧} = س$ $\therefore (\sqrt{٣})^{س} = \frac{١}{٢٧}$ $\therefore ٣^{\frac{١}{٢}س} = ٣^{-٣}$

$\therefore \frac{١}{٢}\ س = -٣$ $\therefore س = -٦$ $\therefore لو_{\sqrt{٣}}\ \frac{١}{٢٧} = -٦$

٥ بفرض أن : $لو\ ٠,٠٠٠١ = س$ $\therefore ١٠^{س} = ٠,٠٠٠١ = ١٠^{-٤}$

$\therefore س = -٤$ $\therefore لو\ ٠,٠٠٠١ = -٤$

مثال ٤

أوجد قيمة س إذا كان :

[١] لو$_{٢}$ س = -٤

[٢] لو$_{٩}$ $٨١\sqrt{٣}$ = س

[٣] لو$_{\frac{١}{٢}}$ س = -٣

[٤] لو$_{س}$ ٨ = ٦

الحل

[١] ∵ لو$_{٢}$ س = -٤ ∴ س = $٢^{-٤}$ ∴ س = $\frac{١}{٢^{٤}} = \frac{١}{١٦}$

[٢] ∵ لو$_{٩}$ $٨١\sqrt{٣}$ = س ∴ $٩^{س} = ٨١\sqrt{٣}$ ∴ $٣^{٢س} = ٣^{٤} \times ٣^{\frac{١}{٢}}$

∴ $٣^{٢س} = ٣^{\frac{٩}{٢}}$ ∴ ٢ س = $\frac{٩}{٢}$ ∴ س = $\frac{٩}{٤}$

[٣] ∵ لو$_{\frac{١}{٢}}$ س = -٣ ∴ س = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{-٣} = ٢^{٣}$ ∴ س = ٨

[٤] ∵ لو$_{س}$ ٨ = ٦ ∴ $س^{٦} = ٨$ ∴ $س^{٦} = ٢^{٣}$

∴ س = $(٢^{٣})^{\frac{١}{٦}}$ ∴ س = $٢^{\frac{١}{٢}}$ ∴ س = $\sqrt{٢}$

مثال ٥

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

[١] لو$_{س}$ ٧ س = ٢

[٢] لو$_{٢}$ $\left(س^{٢} + \frac{٣}{٤} س\right) = -٢$

[٣] لو$_{٢}$ لو$_{٢}$ $(س^{٢} - ٧ س + ٢١) = ١$

[٤] $(لو_{٢} س)^{٢} - ٣$ لو$_{٢}$ س = ٤

الحل

[١] ∵ لو$_{س}$ ٧ س = ٢ ∴ $س^{٢} = ٧$ س

∴ $س^{٢} - ٧$ س = ٠ ∴ س (س − ٧) = ٠

∴ إما س = ٠ (مرفوض) أ، س = ٧ (يحقق)

∴ مجموعة الحل = {٧}

[٢] ∵ لو$_{٢}$ $\left(س^{٢} + \frac{٣}{٤} س\right) = -٢$

∴ $س^{٢} + \frac{٣}{٤} س = ٢^{-٢}$

∴ $س^{٢} + \frac{٣}{٤} س = \frac{١}{٤}$

لاحظ أنه

عند حل المعادلات نعوض بالقيم التى نحصل عليها فى المعادلة الأصلية ويكون الحل هو القيمة التى تحقق هذه المعادلة حيث إنه لا معنى للحديث عن لوغاريتم عدد غير موجب.

أو إيجاد مجموعة قيم المتغير س المسموح التعويض بها قبل البدء فى حل المعادلات وذلك لتجنب عملية التعويض بقيم س التى تم الحصول عليها.



∴ ٤ س^٢ + ٣ س − ١ = ٠

∴ (س + ١) (٤ س − ١) = ٠ ∴ س = −١ (يحقق) أ، س = $\frac{١}{٤}$ (يحقق)

∴ مجموعة الحل = {−١ ، $\frac{١}{٤}$}

٣ ∵ لو٢ لو٣ (س^٢ − ٧ س + ٢١) = ١

∴ لو٣ (س^٢ − ٧ س + ٢١) = ٢^١ = ٢

∴ س^٢ − ٧ س + ٢١ = ٣^٢ = ٩ ∴ س^٢ − ٧ س + ١٢ = ٠

∴ (س − ٣) (س − ٤) = ٠ ∴ إما س = ٣ (يحقق) أ، س = ٤ (يحقق)

∴ مجموعة الحل = {٣ ، ٤}

٤ ∵ (لو٢ س)^٢ − ٣ لو٢ س − ٤ = ٠ ∴ (لو٢ س − ٤) (لو٢ س + ١) = ٠

∴ إما لو٢ س = ٤ ∴ س = ٢^٤ = ١٦ (يحقق)

أ، لو٢ س = −١ ∴ س = ٢^−١ = $\frac{١}{٢}$ (يحقق)

∴ مجموعة الحل = {١٦ ، $\frac{١}{٢}$}

مثال ٦

إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = لوم س يمر بالنقطة (٢٧ ، ٣)

أوجد قيمة م ثم ارسم منحنى الدالة د متخذًا س ∈ [$\frac{١}{٩}$ ، ٩] ومن الرسم :

١ استنتج المجال والمدى والاطراد ونقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات.

٢ أوجد قيمة تقريبية للعدد لو٣ ٦

الحل

∵ د (س) = لوم س لكل س > ٠ ، م ∈ ح^+ − {١}

، ∵ النقطة (٢٧ ، ٣) ∈ منحنى الدالة ∴ ٣ = لوم ٢٧ ∴ م^٣ = ٢٧ = ٣^٣

∴ م = ٣

∴ د (س) = لو٣ س

نكون الجدول الآتى : [مع ملاحظة أن الأساس = ٣ > ١]

س	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩
ص = لوم س	−٢	−١	صفر	١	٢

- لاحظ اختيار قيم س قوى العدد ٣ (الأساس) $\{٣^{-٢} ، ٣^{-١} ، ٣^{٠} ، ٣^{١} ، ٣^{٢}\}$
- ومن الرسم نجد أن :
- المجال = $ح^{+}$ ، المدى = ح
- الدالة تزايدية على مجالها.
- المنحنى يقطع محور السينات فى النقطة (١ ، ٠)
- $لو_{٣}\ ٦ \simeq ١٫٦$



مثال ٧

إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = $لو_{أ}$ س يمر بالنقطة $(\frac{١}{١٦} ، ٤)$ أوجد قيمة أ ثم ارسم منحنى الدالة د متخذاً س $\in [\frac{١}{٤} ، ٤]$ ومن الرسم استنتج المدى والاطراد ثم أوجد قيمة تقريبية للعدد $لو_{\frac{١}{٢}}\ ٣٫٥$

الحل

∵ د (س) = $لو_{أ}$ س لكل س > ٠ ، أ $\in ح^{+} - \{١\}$

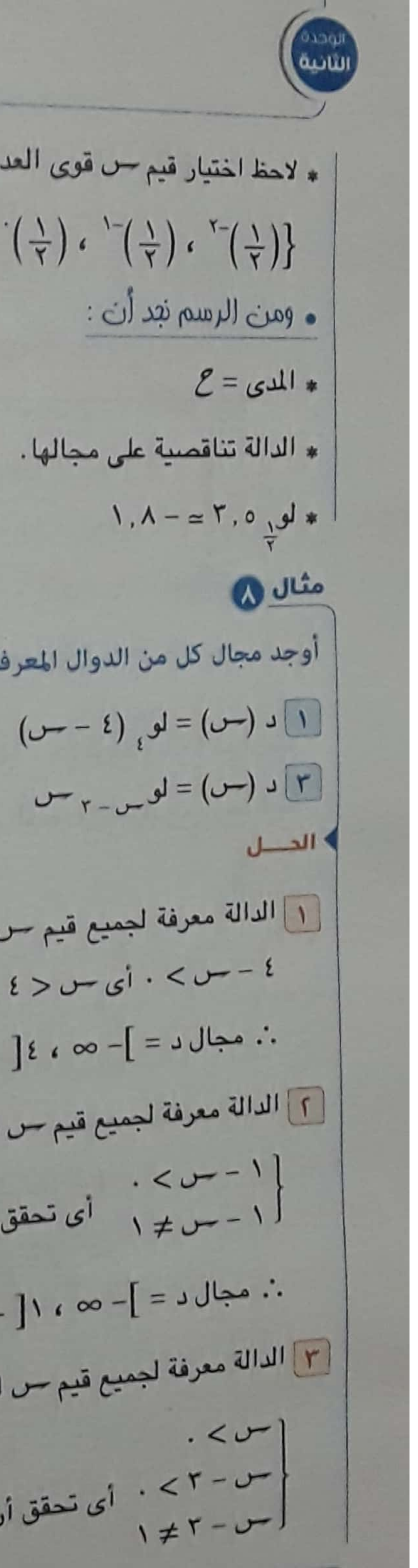
، ∵ النقطة $(\frac{١}{١٦} ، ٤) \in$ منحنى الدالة

∴ ٤ = $لو_{أ} \frac{١}{١٦}$ ∴ $أ^{٤} = \frac{١}{١٦} = (\frac{١}{٢})^{٤}$

∴ أ = $\frac{١}{٢}$ (ويرفض الحل السالب) ∴ د (س) = $لو_{\frac{١}{٢}}$ س

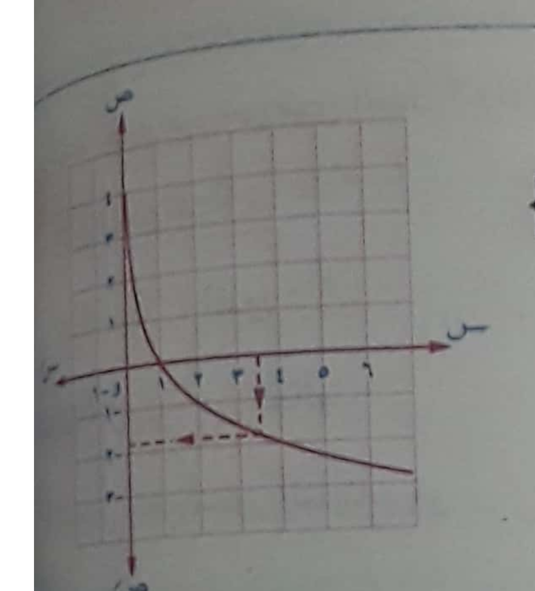
نكون الجدول الآتى : (مع ملاحظة أن الأساس = $\frac{١}{٢} < ١$)

س	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤
ص = $لو_{\frac{١}{٢}}$ س	٢	١	صفر	−١	−٢



* لاحظ اختيار قيم س قوى العدد $\frac{١}{٢}$ (الأساس)

$$\left\{\left(\frac{١}{٢}\right)^{-٢} ، \left(\frac{١}{٢}\right)^{-١} ، \left(\frac{١}{٢}\right)^{٠} ، \left(\frac{١}{٢}\right)^{١} ، \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}\right\}$$



• ومن الرسم نجد أن :

* المدى = ح
* الدالة تناقصية على مجالها.
* $لو_{\frac{١}{٢}}$ ٣,٥ ≃ − ١,٨

مثال ٨

أوجد مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

١ د (س) = $لو_{٤}$ (٤ − س)

٢ د (س) = $لو_{١-س}$ ٥

٣ د (س) = $لو_{س-٢}$ س

٤ د (س) = $لو_{٣-س}$ س

الحل

١ الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن :

٤ − س > ٠ أى س < ٤

∴ مجال د =]− ∞ ، ٤[

٢ الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن

١ − س > ٠ ، ١ − س ≠ ١ أى تحقق أن س < ١ ، س ≠ ٠

∴ مجال د =]− ∞ ، ١[− {٠}

٣ الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن

س > ٠ ، س − ٢ > ٠ ، س − ٢ ≠ ١ أى تحقق أن س > ٠ ، س > ٣ ، س ≠ ٤

∴ مجال د =]٢ ، ∞[− {٤}

تذكر أن

الدالة د : د (س) = $لو_{أ}$ س معرفة لجميع قيم س ، أ التى تحقق أن : س > ٠ ، أ > ٠ ، أ ≠ ١

(٢) الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن $\left\{\begin{array}{l}س > ٠\\ ٢ - س > ٠\\ ٢ - س \neq ١\end{array}\right.$ أى تحقق أن $\left\{\begin{array}{l}س > ٠\\ س < ٢\\ س \neq ٢\end{array}\right.$

∴ مجال د =]٠ ، ٢[- {٢}

مثال ٩

استخدم منحنى الدالة د : د (س) = لو٢ س لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم حدد مجال ومدى واطراد كل دالة :

١ ر (س) = لو٢ س + ٢ | ٢ ن (س) = لو٢ (س - ١)

٣ ك (س) = - لو٢ س | ٤ ت (س) = لو٢ (-س)

الحل

١ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{و ص}$

، المجال =]٠ ، ∞[

، المدى = ح

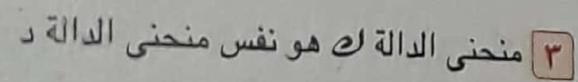
، الدالة تزايدية على مجالها.

٢ منحنى الدالة ن هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة أفقية قدرها وحدة واحدة فى اتجاه $\overleftarrow{و س}$

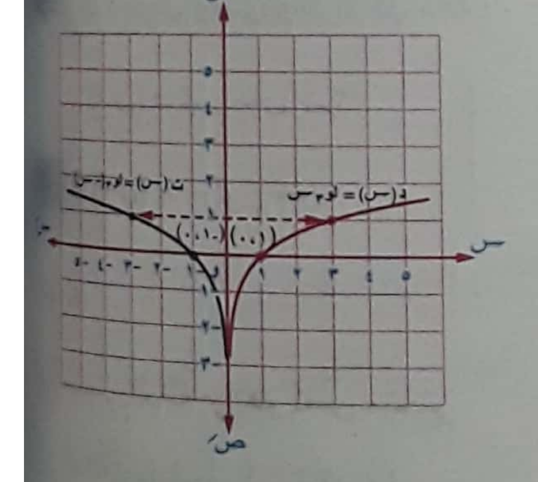
، المجال =]١ ، ∞[

، المدى = ح

، الدالة تزايدية على مجالها.



٣ منحنى الدالة ك هو نفس منحنى الدالة د
بالانعكاس فى محور السينات
، المجال =]٠ ، ∞[
، المدى = ح
، الدالة تناقصية على مجالها.

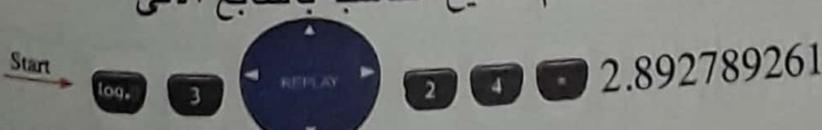


٤ منحنى الدالة ت هو نفس
منحنى الدالة د بالانعكاس فى
محور الصادات
، المجال =]-∞ ، ٠[
، المدى = ح
، الدالة تناقصية على مجالها.

استخدام الآلة الحاسبة

* مفتاح اللوغاريتم لأى أساس هو $\log_{\square}$ ، مفتاح اللوغاريتم المعتاد هو log

فمثلًا : ١ لإيجاد $لو_{٣}$ ٢٤ نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى



فيكون $لو_{٣}$ ٢٤ ≃ ٢,٨٩٢٨ مقربًا لأربعة أرقام عشرية.

٢ لإيجاد لو ٨,٤ نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى

Start → log 8 . 4 = 0.9242792861

فيكون لو ٨,٤ ≃ ٠,٩٢٤٣ مقربًا لأربعة أرقام عشرية.

٣ لإيجاد العدد س الذى يحقق لو س = ٠,٤٥٧٢ نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى

Start → shift $10^{\square}$ log 0 . 4 5 7 2 = 2.865497276

∴ س ≃ ٢,٨٦٥٥ مقربًا لأربعة أرقام عشرية.



تمارين 10

على الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البيانى



من أسئلة الكتاب المدرسى

1 عبر عن كل من الصور اللوغاريتمية الآتية بالصورة الأسية المكافئة لها :

① لو$_{٢}$ ١٢٨ = ٧   ② لو$_{\frac{٢}{٥}}$ $\frac{٤}{٢٥}$ = ٢   ③ لو$_{٢}$ ٤$\sqrt{٢}$ = $\frac{٥}{٢}$

---

2 عبر عن كل من الصور الأسية الآتية بالصورة اللوغاريتمية المكافئة لها :

① ٥$^{\text{صفر}}$ = ١   ② ١٠$^{-٤}$ = ٠,٠٠٠١   ③ ٥$^{-٣}$ = $\frac{١}{١٢٥}$

---

3 أوجد قيمة كل مما يأتى :

① لو$_{٢}$ ١٦ «٤»
② لو$_{٨}$ ١ «صفر»
③ لو ٠,٠٠٠٠١ «-٥»
④ لو$_{\frac{١}{٢}}$ ١٢٨ «-٧»
⑤ لو$_{٢}$ $\frac{١}{٨}$ «-٣»
⑥ لو$_{\sqrt{٢}}$ ٨$\sqrt{٢}$ «٧»
⑦ لو$_{٣}$ $\sqrt[٤]{٢٧}$ «$\frac{٣}{٤}$»
⑧ لو$_{٢}$ حا ٤٥° «$-\frac{١}{٢}$»

---

4 حل فى ح كلاً من المعادلات الآتية :

① لو$_{٢}$ س = ٧ «١٢٨»
② لو$_{\frac{١}{٢}}$ س = -١ «٢»
③ لو$_{٥}$ س = -٢ «$\frac{١}{٢٥}$»
④ لو$_{٣}$ س^{٢} = ٤ «±٩»
⑤ لو$_{٨١}$ س = $\frac{٣}{٤}$ «٢٧»
⑥ لو$_{٢}$ س$^{-١}$ = -٥ «٣٢»
⑦ لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٢^{س} = -٤ «٤»
⑧ لو$_{٢}$ (لو$_{٣}$ س) = ١ «٩»
⑨ لو$_{٣}$ (٢ س - ٥) = ٠ «٣»
⑩ لو$_{٦}$ $\sqrt{س + ٤}$ = $\frac{١}{٢}$ «٢»
⑪ لو$_{٨}$ $\sqrt[٣]{س^{٢} + ٤٨}$ = $\frac{٢}{٣}$ «±٤»
⑫ لو$_{٣}$ لو$_{٢}$ (س^{٢} - ٢ س) = ١ «٤ أو -٢»
⑬ لو$_{٥}$ |٢ س + ١| = ١ «٢ أو -٣»
⑭ لو$_{٢}$ س (س + ٦) = ٤ «٢ أو -٨»
⑮ لو$_{٣}$ (س^{٢} - ٢ س) = ١ «٣ أو -١»
⑯ (لو$_{٣}$ س)^{٢} - ٩ لو$_{٣}$ س + ٢٠ = ٠ «٨١ أو ٢٤٣»

(١٧) لو$_{٢}$ س = لو$_{٣}$ ٩ «٤»

(١٨) لو$_{٢}$ ($٣^{س}$ − ٢ $س^{-٢}$) = ٢ «٢»

(١٩) ٣ لو$_{٤}$ $(س + ١,٢٥)^{...}$ = $\frac{١}{٣}$ «−١»

(٢٠) | لو$_{١٠}$ س − ٢ | = ٢ «١,٠٠٠١، ٩٩٩٩»

٥ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) لو$_{س}$ ١٢٥ = ٣ «{٥}»

(٢) لو$_{س}$ ٢ = ٥ «{$\sqrt[٥]{٢}$}»

(٣) لو$_{س}$ ٣ = −٢ «{$\frac{١}{\sqrt{٣}}$}»

(٤) لو$_{س}$ ٠,٠٠١ = $\frac{-٣}{٤}$ «{١٠٠٠٠}»

(٥) لو$_{س}$ ٨١ = ٤ «{−٣}»

(٦) لو$_{س-١}$ ٢٧ = ٣ «{٤}»

(٧) لو$_{س-١}$ (٧ − س) = ٢ «{٣}»

(٨) لو$_{\frac{٢}{س}}$ ٦٤ = −٣ «{٨}»

(٩) لو$_{س}$ ٥ س = ٢ «{٥}»

(١٠) لو$_{س}$ ٦٤ س = ٤ «{٤}»

(١١) لو$_{س}$ $س^{٦}$ = ٥ س «{$\frac{٦}{٥}$}»

(١٢) لو$_{٩}$ لو$_{٣}$ لو$_{س}$ ٢٧ = ٠ «{٣}»

(١٣) لو$_{س}$ ($س^{٢}$ − ١٢) = ١ «{٤}»

(١٤) لو$_{س}$ (٢ س + ٨) = ٢ «{٤}»

(١٥) لو$_{س}$ ($\sqrt{س - ٢}$ + ٢) = ١ «{٢ ، ٣}»

(١٦) $(لو_{٣} س)^{٢}$ + ١٥ = ٨ لو$_{٣}$ س «{٢٧ ، ٢٤٣}»

(١٧) لو$_{٢٧}$ (س − ٢) + لو$_{٣}$ (س − ٢) = ٤ «{٢٩}»

٦ أوجد قيمة س فى كل مما يأتى :

(١) لو$_{\frac{٥}{٢}}$ $\frac{١٦}{٦٢٥}$ = س «−٤»

(٢) لو$_{٤}$ ٨ $\sqrt{٢}$ = س «$\frac{٧}{٤}$»

(٣) لو$_{\sqrt{٥}}$ ٦٢٥ $\sqrt{٥}$ = $س^{٢}$ «± ٣»

(٤) لو ٠,٠٠١ = ٣ س + ١ «−١»

(٥) لو$_{٣}$.. ٠,٠٩ = $س^{-٢}$ «± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$»

(٦) لو$_{٢}$ لو$_{٢}$ ٨ = س «١»

(٧) لو$_{٢}$ ($٢^{س}$ − ٤) + س − ٥ = ٠ «٣»

(٨) لو$_{٤}$ [١٣ + لو$_{٢}$ (س − ١)] = ٢ «٩»

(٩) لو$_{٣}$ ($\frac{س^{٢}}{٢ س - ٣}$) = ١ «٣»

٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الصورة $لو_{أ}$ س = ص تكافئ تماماً الصورة ....

(أ) $لو_{أ}$ ص = س (ب) $أ^{ص}$ = س (جـ) $أ^{س}$ = ص (د) ص = أ س

② مجموعة حل المعادلة : $لو_{س}$ ٨١ = ٤ هى ....

(أ) {-٣} (ب) {٣} (جـ) {٣ ، -٣} (د) {٩}

③ مجموعة حل المعادلة : $لو_{س}$ (٣ س - ٢) = ٢ هى ....

(أ) {١ ، ٢} (ب) {١} (جـ) {٢} (د) ∅

④ إذا كان : لو (س + ١١) = ٢ فإن : س = ...

(أ) -٩ (ب) ٢٢ (جـ) ٨٩ (د) ٩١

⑤ إذا كان : $لو_{|س + ٢|}$ ٦٤ = ٣ فإن : س = ...

(أ) {٦ ، -٢} (ب) {٢ ، -٦}

(جـ) {٠ ، -٨} (د) {٤ ، -٨}

⑥ إذا كان : $لو_{٣}$ (٤ + $لو_{٢}$ س) = ٢ فإن : س = ...

(أ) ١٦ (ب) ٣٢ (جـ) ٦٤ (د) ١٢٨

---

٨ باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتى مقرباً لأربعة أرقام عشرية :

① لو ٣,١٥ ② $لو_{٢}$ ٢٧ ③ ٤ لو ٧ - ٥ لو ١٣

---

٩ باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة س فى كل مما يأتى مقرباً لأربعة أرقام عشرية :

① لو س = ٠,٢٣٤٥ ② لو س = ١,٤١٢ ③ لو س = -٠,٣

---

١٠ أوجد مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية فى ح × ح :

① $س^{ص}$ = ٥ س - ٤ ، $لو_{س}$ ١٦ = ص «{(٤ ، ٢)}»

② $لو_{س}$ $لو_{٣}$ $لو_{س}$ ص = ٠ ، $لو_{ص}$ ٩ = ١ «{(٣ ، ٩)}»

---

١١ إذا كان : $لو_{١٦}$ ٤٩ = أ ، $لو_{٧}$ ٢,٥ = ب أثبت أن : $٤^{أ ب + ١}$ = ١٠

١٢ عين مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

① د (س) = لو$_{٣}$ (٢ س + ١)
② د (س) = ٢ لو س
③ د (س) = لو$_{س}$ س
④ د (س) = لو$_{س - ٢}$ س
⑤ د (س) = لو$_{٢ - س}$ س
⑥ د (س) = لو$_{(٥ - س)}$ (س - ٢)
⑦ د (س) = لو$_{س - ٢}$ س^{٢}
⑧ د (س) = لو$_{س + ٢}$ (٣ س + ١)
⑨ د (س) = لو$_{٤}$ (٣ - س) (س + ١)
⑩ د (س) = لو$_{س}$ (٣ - س) (س + ١)

١٣ إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{أ}$ س يمر بالنقطة (٨١ ، ٤)

أوجد قيمة أ ثم ارسم منحنى الدالة د متخذاً س ∈ [$\frac{١}{٩}$ ، ٩] ومن الرسم :

① استنتج المجال والمدى والاطراد ونقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات.

② أوجد قيمة تقريبية للعدد لو$_{٣}$ ٥

١٤ إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{أ}$ س يمر بالنقطة ($\frac{١}{٨}$ ، ٣) أوجد قيمة أ

ثم ارسم منحنى الدالة د متخذاً س ∈ [$\frac{١}{٤}$ ، ٤] ومن الرسم استنتج المدى والاطراد

ونقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات ثم أوجد قيمة تقريبية للعدد لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٢,٥

١٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{٢}$ (٣ - س) يقطع محور السينات فى النقطة ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (٠ ، ١) (د) (٣ ، ٠)

② مدى الدالة د : د (س) = لو$_{أ}$ س هو ....

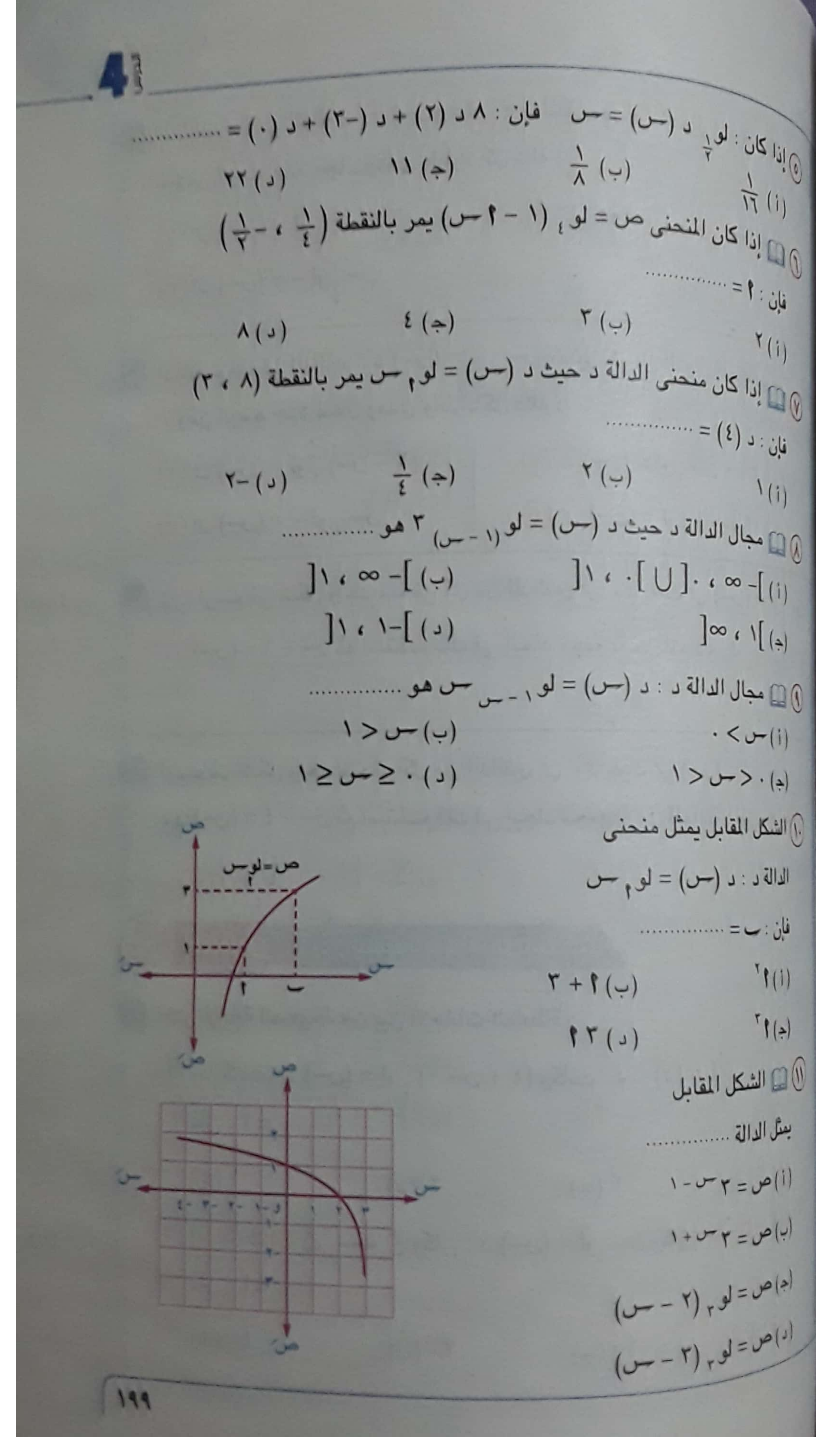
(أ) ح$^{+}$ (ب) ح$^{-}$ (جـ) ح (د) ح*

③ الدالة د : د (س) = لو$_{أ}$ س متناقصة لكل أ ∈ ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٠[(جـ)]٠ ، ١[(د)]١ ، ∞[

④ إذا كانت الدالة د : د (س) = لو$_{\frac{١}{٢}}$ س فإن : د ($\frac{١}{٤}$) + د (٨) = ...

(أ) -٣ (ب) -١ (جـ) ٢ (د) ٥



⑤ إذا كان : لو$_{\frac{1}{2}}$ د (س) = س فإن : ٨ د (٢) + د (-٣) + د (٠) = ...

(أ) $\frac{1}{16}$ (ب) $\frac{1}{8}$ (جـ) ١١ (د) ٢٢

⑥ إذا كان المنحنى ص = لو$_{٤}$ (١ - أس) يمر بالنقطة ($\frac{1}{4}$ ، -$\frac{1}{2}$)

فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٨

⑦ إذا كان منحنى الدالة د حيث د (س) = لو$_{أ}$ س يمر بالنقطة (٨ ، ٣)

فإن : د (٤) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) $\frac{1}{4}$ (د) -٢

⑧ مجال الدالة د حيث د (س) = لو$_{(١ - س)}$ ٣ هو ....

(أ)]-∞ ، ٠[∪]٠ ، ١[(ب)]-∞ ، ١[

(جـ)]١ ، ∞[(د)]-١ ، ١[

⑨ مجال الدالة د : د (س) = لو$_{١ - س}$ س هو ....

(أ) س > ٠ (ب) س < ١

(جـ) ٠ < س < ١ (د) ٠ ≤ س ≤ ١

⑩ الشكل المقابل يمثل منحنى

الدالة د : د (س) = لو$_{أ}$ س

فإن : ب = ...

(أ) أ^{٢} (ب) أ + ٣

(جـ) أ^{٣} (د) ٣ أ

⑪ الشكل المقابل

يمثل الدالة ....

(أ) ص = ٢ س - ١

(ب) ص = ٢ س + ١

(جـ) ص = لو$_{٢}$ (٢ - س)

(د) ص = لو$_{٢}$ (٣ - س)

١٦ استخدم منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{\frac{١}{٢}}$ س لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية
، ومن الرسم حدد مجال ومدى واطراد كل دالة :

① ر (س) = لو$_{\frac{١}{٢}}$ س + ٢ ② 📖 ن (س) = لو$_{\frac{١}{٢}}$ (س + ١)

③ هـ (س) = − لو$_{\frac{١}{٢}}$ س

١٧ استخدم منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{٢}$ س لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية
، ومن الرسم حدد مجال ومدى واطراد كل دالة :

① ن (س) = لو$_{٢}$ (س − ٢) ② ت (س) = لو$_{٢}$ س + ١

③ هـ (س) = − لو$_{٢}$ س ④ ر (س) = لو$_{٢}$ (−س)

١٨ 📖 ارسم فى شكل واحد منحنى كل من الدالتين ر ، د حيث ر (س) = لو$_{٢}$ س
، د (س) = ٦ − س ثم استخدم ذلك فى إيجاد مجموعة حل المعادلة : لو$_{٢}$ س = ٦ − س

«{٤}»

١٩ ارسم فى شكل واحد منحنى كل من الدالتين ر ، د حيث ر (س) = لو$_{٣}$ س
، د (س) = ٤ − س ثم استخدم ذلك فى إيجاد مجموعة حل المعادلة : لو$_{٣}$ س = ٤ − س

«{٣}»

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

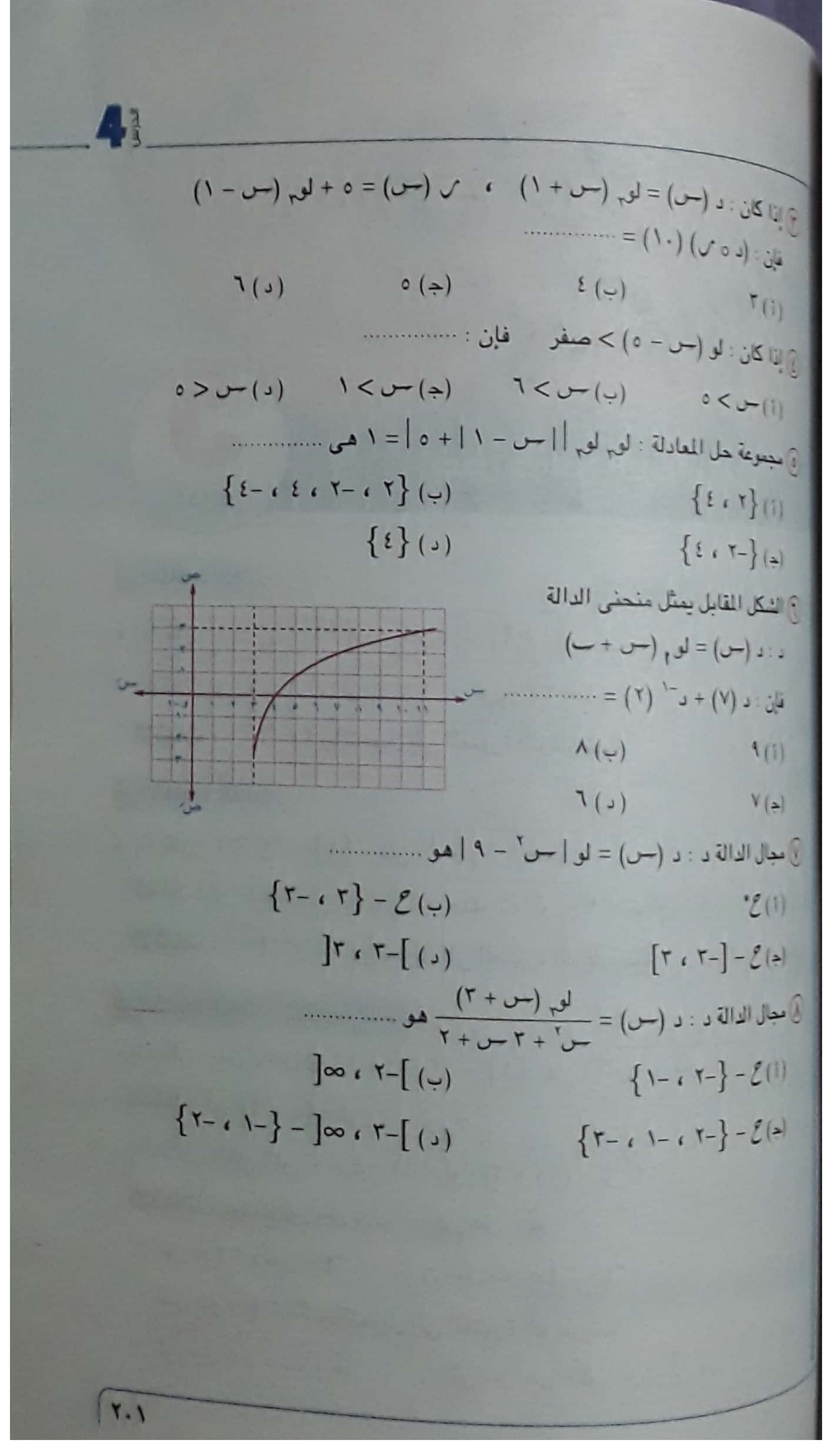
٢٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = لو$_{أ}$ (٢ س + ٤) وكانت : د$^{-١}$ (٥) = ١٤
فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

② إذا كانت د : ح$^{+}$ ⟵ ح وكان : د (س) = لو$_{٤}$ س وكان : د$^{-١}$ (أ + ٣) = ٣٢
فإن : أ = ...

(أ) −٤ (ب) −٢ (جـ) −١ (د) −$\frac{١}{٢}$



(٣) إذا كان : د (س) = لو$_{٣}$ (س + ١) ، ر (س) = ٥ + لو$_{٣}$ (س − ١)

فإن : (د ٥ ر) (١٠) = ...

(أ) ٣　　(ب) ٤　　(جـ) ٥　　(د) ٦

(٤) إذا كان : لو (س − ٥) > صفر　فإن : ....

(أ) س > ٥　　(ب) س > ٦　　(جـ) س > ١　　(د) س < ٥

(٥) مجموعة حل المعادلة : لو$_{٣}$ لو$_{٣}$ ||س − ١| + ٥| = ١ هى ....

(أ) {٢ ، ٤}　　(ب) {٢ ، −٢ ، ٤ ، −٤}

(جـ) {−٢ ، ٤}　　(د) {٤}

(٦) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة

د : د (س) = لو$_{٢}$ (س + ب)

فإن : د (٧) + د$^{-١}$ (٢) = ...

(أ) ٩　　(ب) ٨

(جـ) ٧　　(د) ٦

(٧) مجال الدالة د : د (س) = لو |س^{٢} − ٩| هو ....

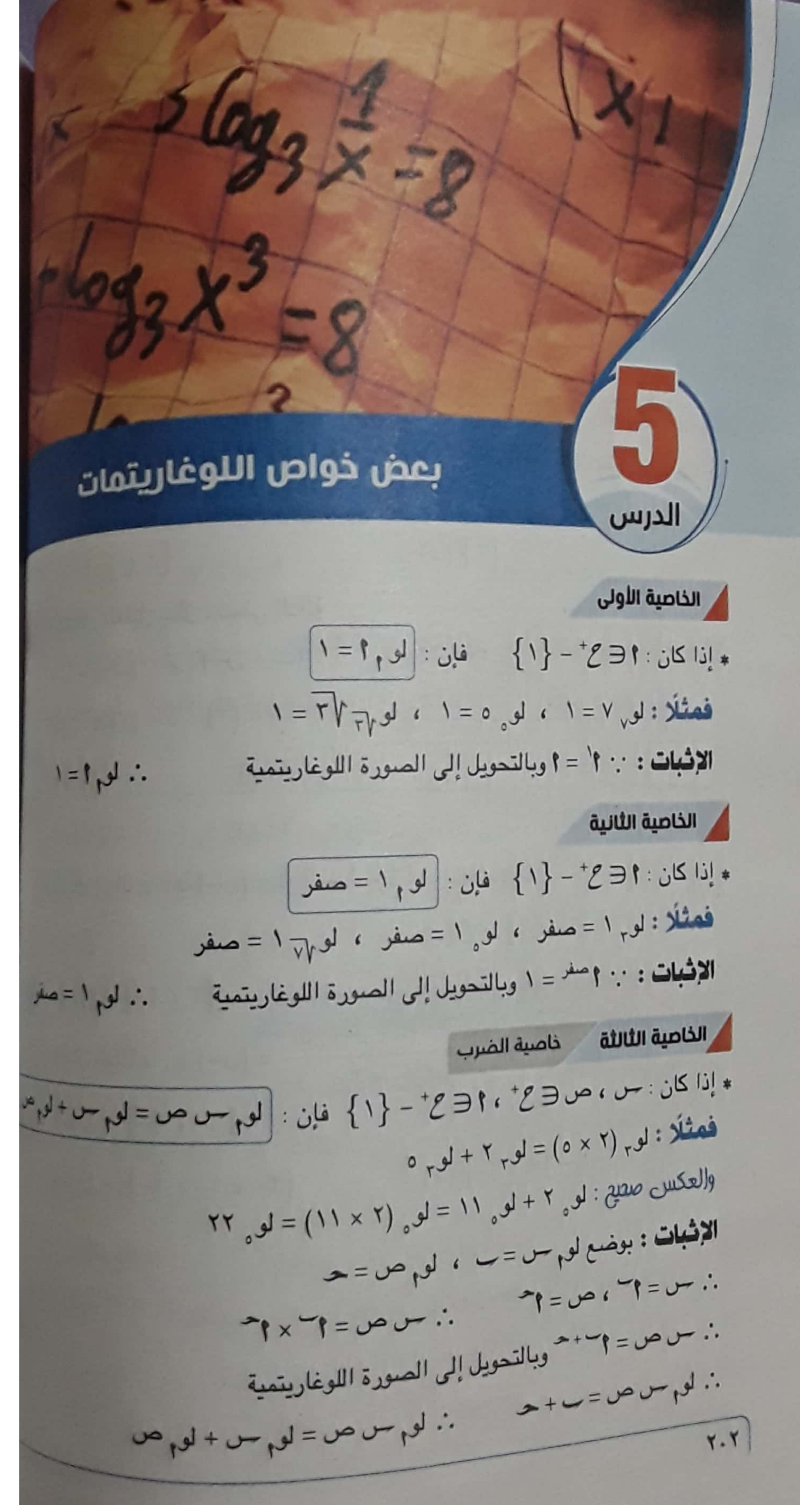
(أ) ح*　　(ب) ح − {٣ ، −٣}

(جـ) ح − [−٣ ، ٣]　　(د)]−٣ ، ٣[

(٨) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\text{لو}_{٣} (\text{س} + ٣)}{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٢}$ هو ....

(أ) ح − {−٢ ، −١}　　(ب)]−٢ ، ∞[

(جـ) ح − {−٢ ، −١ ، −٣}　　(د)]−٣ ، ∞[− {−١ ، −٢}



5
الدرس

بعض خواص اللوغاريتمات

الخاصية الأولى

* إذا كان : أ ∈ ح$^{+}$ − {١} فإن : لو$_{\text{أ}}$ أ = ١

فمثلًا : لو$_{\text{٧}}$ ٧ = ١ ، لو$_{\text{٥}}$ ٥ = ١ ، لو$_{\sqrt{\text{٣}}}$ $\sqrt{\text{٣}}$ = ١

الإثبات : ∵ أ$^{\text{١}}$ = أ وبالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية ∴ لو$_{\text{أ}}$ أ = ١

الخاصية الثانية

* إذا كان : أ ∈ ح$^{+}$ − {١} فإن : لو$_{\text{أ}}$ ١ = صفر

فمثلًا : لو$_{\text{٣}}$ ١ = صفر ، لو$_{\text{٥}}$ ١ = صفر ، لو$_{\sqrt{\text{٧}}}$ ١ = صفر

الإثبات : ∵ أ$^{\text{صفر}}$ = ١ وبالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية ∴ لو$_{\text{أ}}$ ١ = صفر

الخاصية الثالثة خاصية الضرب

* إذا كان : س ، ص ∈ ح$^{+}$ ، أ ∈ ح$^{+}$ − {١} فإن : لو$_{\text{أ}}$ س ص = لو$_{\text{أ}}$ س + لو$_{\text{أ}}$ ص

فمثلًا : لو$_{\text{٣}}$ (٢ × ٥) = لو$_{\text{٣}}$ ٢ + لو$_{\text{٣}}$ ٥

والعكس صحيح : لو$_{\text{٥}}$ ٢ + لو$_{\text{٥}}$ ١١ = لو$_{\text{٥}}$ (٢ × ١١) = لو$_{\text{٥}}$ ٢٢

الإثبات : بوضع لو$_{\text{أ}}$ س = ب ، لو$_{\text{أ}}$ ص = حـ

∴ س = أ$^{\text{ب}}$ ، ص = أ$^{\text{حـ}}$ ∴ س ص = أ$^{\text{ب}}$ × أ$^{\text{حـ}}$

∴ س ص = أ$^{\text{ب+حـ}}$ وبالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية

∴ لو$_{\text{أ}}$ س ص = ب + حـ ∴ لو$_{\text{أ}}$ س ص = لو$_{\text{أ}}$ س + لو$_{\text{أ}}$ ص

نتيجة: إذا كانت: $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، ..... ، $س_ن \in ح^+$ ، $م \in ح^+ - \{1\}$

فإن: $لو_م (س_1 \times س_2 \times س_3 \times ..... \times س_ن) = لو_م س_1 + لو_م س_2 + ... + لو_م س_ن$

فمثلًا: $لو_2 (3 \times 5 \times 7) = لو_2 3 + لو_2 5 + لو_2 7$

والعكس صحيح: $لو_م 75 + لو_م \frac{4}{9} + لو_م 0,06 = لو_م \left(75 \times \frac{4}{9} \times \frac{6}{100}\right) = لو_م 2$

تنبيه هام

تذكر جيدًا أن: $لو_م (س + ص) \neq لو_م س + لو_م ص$

كما أن: $لو_م (س \times ص) \neq لو_م س \times لو_م ص$

الخاصية الرابعة: خاصية القسمة

• إذا كان: $س$ ، $ص \in ح^+$ ، $م \in ح^+ - \{1\}$ فإن: $لو_م \frac{س}{ص} = لو_م س - لو_م ص$

فمثلًا: $لو_5 \frac{2}{3} = لو_5 2 - لو_5 3$ والعكس صحيح: $لو_5 11 - لو_5 2 = لو_5 \frac{11}{2}$

الإثبات: بوضع $لو_م س = ب$ ، $لو_م ص = جـ$ $\therefore س = م^ب$ ، $ص = م^{جـ}$

$\therefore \frac{س}{ص} = \frac{م^ب}{م^{جـ}} = م^{ب - جـ}$

وبالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية $\therefore لو_م \frac{س}{ص} = ب - جـ$

أي أن $لو_م \frac{س}{ص} = لو_م س - لو_م ص$

نتيجة: $لو_م \frac{س ص}{ع ل} = لو_م س + لو_م ص - لو_م ع - لو_م ل$

تنبيه هام

تذكر جيدًا أن: $لو_م (س - ص) \neq لو_م س - لو_م ص$

كما أن: $لو_م \left(\frac{س}{ص}\right) \neq لو_م س \div لو_م ص$

الخاصية الخامسة: خاصية لوغاريتم القوة

• إذا كان: $س \in ح^+$ ، $م \in ح^+ - \{1\}$ ، $ن \in ح$ فإن: $لو_م س^ن = ن لو_م س$

فمثلًا : لو$_{٢}$ ١٢٥ = لو$_{٢}$ ٥^{٣} = ٣ لو$_{٢}$ ٥ والعكس صحيح : ٧ لو$_{٥}$ ٢ = لو$_{٥}$ ٢^{٧} = لو$_{٥}$ ١٢٨

الإثبات : لو$_{م}$ س^{ن} = لو$_{م}$ (س × س × س × .... إلى ن حدًا)

= لو$_{م}$ س + لو$_{م}$ س + ... إلى ن حدًا

= ن لو$_{م}$ س

الخاصية السادسة — خاصية تغيير الأساس

* إذا كان : س ∈ ح$^{+}$ ، ص ∈ ح$^{+}$ - {١} ، م ∈ ح$^{+}$ - {١}

فإن : $\boxed{\text{لو}_{\text{ص}}\ \text{س} = \frac{\text{لو}_{\text{م}}\ \text{س}}{\text{لو}_{\text{م}}\ \text{ص}}}$

فمثلًا : لو$_{٥}$ ٧ = $\frac{\text{لو}\ ٧}{\text{لو}\ ٥}$ ، لو$_{٣}$ ٢ = $\frac{\text{لو}_{١١}\ ٢}{\text{لو}_{١١}\ ٣}$

الإثبات : بوضع لو$_{ص}$ س = ع ∴ ص^{ع} = س بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس م

∴ ع لو$_{م}$ ص = لو$_{م}$ س ∴ ع = $\frac{\text{لو}_{\text{م}}\ \text{س}}{\text{لو}_{\text{م}}\ \text{ص}}$

أى أن لو$_{ص}$ س = $\frac{\text{لو}_{\text{م}}\ \text{س}}{\text{لو}_{\text{م}}\ \text{ص}}$

الخاصية السابعة — خاصية المعكوس الضربى

* إذا كان : س ، ص ∈ ح$^{+}$ - {١} فإن : $\boxed{\text{لو}_{\text{ص}}\ \text{س} = \frac{١}{\text{لو}_{\text{س}}\ \text{ص}}}$

فمثلًا : لو$_{٧}$ ٥ = $\frac{١}{\text{لو}_{٥}\ ٧}$ ومنها لو$_{٧}$ ٥ × لو$_{٥}$ ٧ = ١

الإثبات : ∵ لو$_{ص}$ س = $\frac{\text{لو}\ \text{س}}{\text{لو}\ \text{ص}}$ ، لو$_{س}$ ص = $\frac{\text{لو}\ \text{ص}}{\text{لو}\ \text{س}}$

∴ لو$_{ص}$ س × لو$_{س}$ ص = ١ ∴ لو$_{ص}$ س = $\frac{١}{\text{لو}_{\text{س}}\ \text{ص}}$

مثال ١

بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة كل مما يأتى :

١ لو$_{٣}$ ١٥ + لو$_{٣}$ ٦ - لو$_{٣}$ ١٠

٢ لو$_{٥}$ ١٠٠ - ٣ لو$_{٥}$ ٢ - لو$_{٥}$ ١٨ + لو$_{٥}$ ٣٦

٣ لو$_{٥}$ $\frac{٣}{٥}$ + ٢ لو$_{٥}$ $\frac{١٥}{٢}$ - لو$_{٥}$ $\frac{٥}{٣٦}$ + لو$_{٥}$ $\frac{٥}{٢٤٣}$

٤ لو$_{٢}$ ٧ × لو$_{٧}$ ١١ × لو$_{١١}$ ٩ × لو$_{٣}$ ٢

٥ $\frac{\text{لو}_{٢}\ ٢٤٣ - \text{لو}_{٢}\ ٣٢}{\text{لو}_{٢}\ ٢٧ - \text{لو}_{٢}\ ٨}$

الحـل

١ المقدار = $\text{لو}_{٣} \frac{١٥ \times ٦}{١٠} = \text{لو}_{٣}\, ٩ = \text{لو}_{٣}\, ٣^{٢} = ٢\, \text{لو}_{٣}\, ٣ = ٢ \times ١ = ٢$

٢ المقدار = $\text{لو}_{٥}\, ١٠٠ - \text{لو}_{٥}\, ٢^{٣} - \text{لو}_{٥}\, ١٨ + \text{لو}_{٥}\, ٣٦$

$= \text{لو}_{٥} \frac{١٠٠ \times ٣٦}{٨ \times ١٨} = \text{لو}_{٥}\, ٢٥ = \text{لو}_{٥}\, ٥^{٢} = ٢\, \text{لو}_{٥}\, ٥ = ٢ \times ١ = ٢$

٣ المقدار = $\text{لو}_{٥} \frac{٣}{٥} + \text{لو}_{٥} \left(\frac{١٥}{٢}\right)^{٢} - \text{لو}_{٥} \frac{٥}{٣٦} + \text{لو}_{٥} \frac{٥}{٢٤٣}$

$= \text{لو}_{٥} \frac{\frac{٣}{٥} \times \frac{١٥}{٢} \times \frac{١٥}{٢} \times \frac{٥}{٢٤٣}}{\frac{٥}{٣٦}} = \text{لو}_{٥} \frac{٣ \times ١٥ \times ١٥ \times ٥ \times ٣٦}{٥ \times ٢ \times ٢ \times ٢٤٣ \times ٥} = \text{لو}_{٥}\, ٥ = ١$

٤ المقدار = $\frac{\text{لو } ٧}{\text{لو } ٢} \times \frac{\text{لو } ١١}{\text{لو } ٧} \times \frac{\text{لو } ٩}{\text{لو } ١١} \times \frac{\text{لو } ٢}{\text{لو } ٣} = \frac{\text{لو } ٩}{\text{لو } ٣} = \frac{\text{لو } ٣^{٢}}{\text{لو } ٣} = \frac{٢\, \text{لو } ٣}{\text{لو } ٣} = ٢$

٥ المقدار = $\frac{\text{لو}_{م}\, ٣^{٥} - \text{لو}_{م}\, ٢^{٥}}{\text{لو}_{م}\, ٣^{٣} - \text{لو}_{م}\, ٢^{٣}} = \frac{٥\, \text{لو}_{م}\, ٣ - ٥\, \text{لو}_{م}\, ٢}{٣\, \text{لو}_{م}\, ٣ - ٣\, \text{لو}_{م}\, ٢} = \frac{٥\, (\text{لو}_{م}\, ٣ - \text{لو}_{م}\, ٢)}{٣\, (\text{لو}_{م}\, ٣ - \text{لو}_{م}\, ٢)} = \frac{٥}{٣}$

مثال ٢

بدون استخدام حاسبة الجيب أثبت كلاً مما يأتي :

١ $٣\, \text{لو } ٥ + ٢\, \text{لو } ٦ - \text{لو } ٩ + \text{لو } ٠٫٢ = \text{لو}_{٥}\, ٢٥$

٢ $\frac{\text{لو } ٣٠ - \text{لو } ٦ + \text{لو } ٥}{\text{لو } ١٢ - \text{لو } ٣ + \text{لو } ٢٥} = ١ - \text{لو } ٢$

الحـل

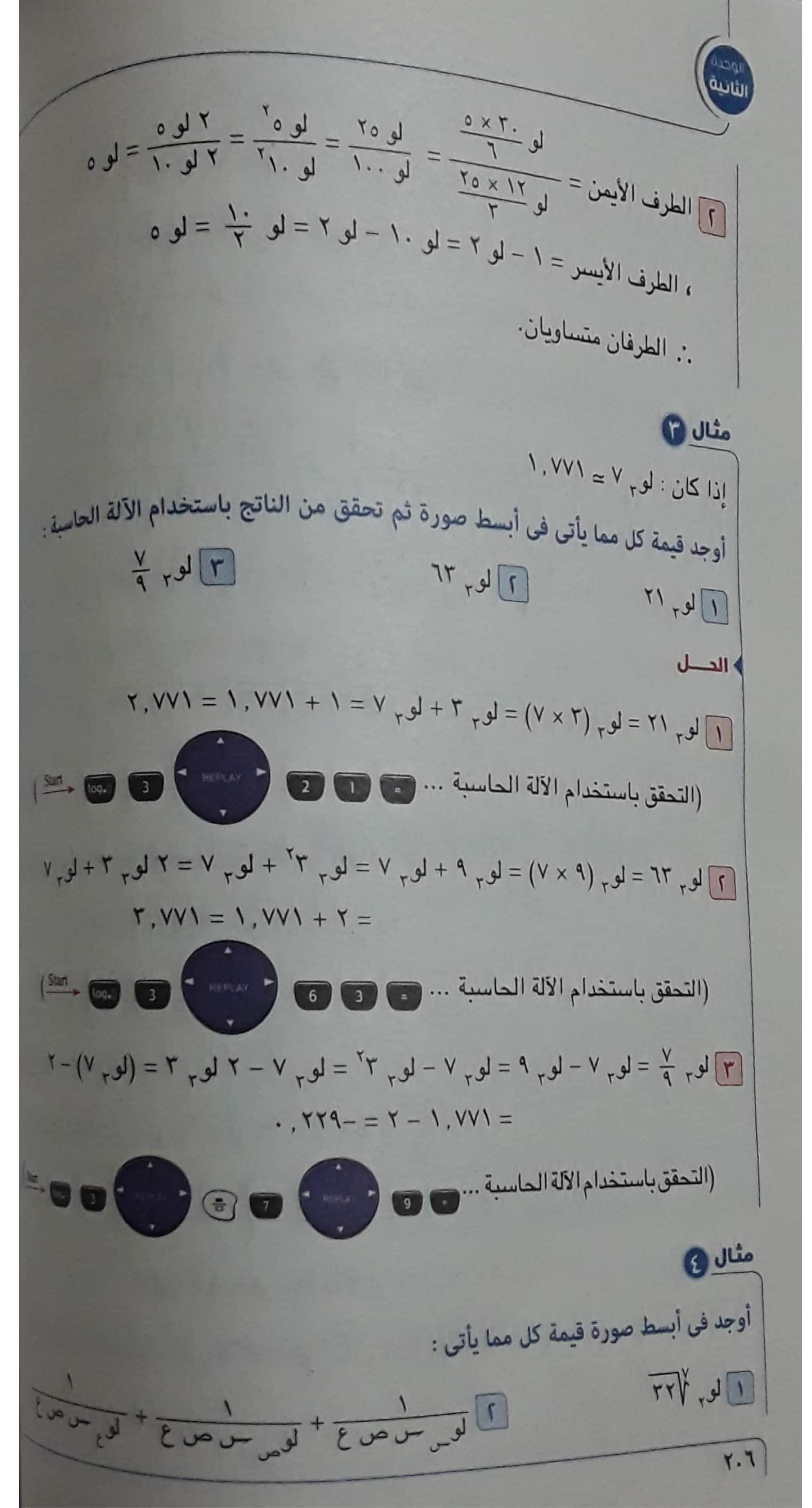
١ الطرف الأيمن = $\text{لو } ٥^{٣} + \text{لو } ٦^{٢} - \text{لو } ٩ + \text{لو } \frac{٢}{١٠}$

$= \text{لو } \frac{٥^{٣} \times ٦^{٢} \times \frac{٢}{١٠}}{٩} = \text{لو } \frac{١٢٥ \times ٣٦ \times ٢}{٩ \times ١٠}$

$= \text{لو } ١٠٠ = \text{لو } ١٠^{٢} = ٢\, \text{لو } ١٠ = ٢$

، الطرف الأيسر = $\text{لو}_{٥}\, ٥^{٢} = ٢\, \text{لو}_{٥}\, ٥ = ٢$

∴ الطرفان متساويان.



٢ الطرف الأيمن = $\dfrac{\text{لو}\ \frac{٣٠ \times ٥}{٦}}{\text{لو}\ \frac{١٢ \times ٢٥}{٣}} = \dfrac{\text{لو}\ ٢٥}{\text{لو}\ ١٠٠} = \dfrac{\text{لو}\ ٥^{٢}}{\text{لو}\ ١٠^{٢}} = \dfrac{٢\ \text{لو}\ ٥}{٢\ \text{لو}\ ١٠} = \text{لو}\ ٥$

، الطرف الأيسر = $١ - \text{لو}\ ٢ = \text{لو}\ ١٠ - \text{لو}\ ٢ = \text{لو}\ \frac{١٠}{٢} = \text{لو}\ ٥$

∴ الطرفان متساويان.

مثال ٣

إذا كان : $\text{لو}_{٣}\ ٧ \simeq ١,٧٧١$

أوجد قيمة كل مما يأتى فى أبسط صورة ثم تحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة :

١ $\text{لو}_{٣}\ ٢١$ ٢ $\text{لو}_{٣}\ ٦٣$ ٣ $\text{لو}_{٣}\ \frac{٧}{٩}$

الحل

١ $\text{لو}_{٣}\ ٢١ = \text{لو}_{٣}\ (٣ \times ٧) = \text{لو}_{٣}\ ٣ + \text{لو}_{٣}\ ٧ = ١ + ١,٧٧١ = ٢,٧٧١$

(التحقق باستخدام الآلة الحاسبة ... Start log 3 REPLAY 2 1 =)

٢ $\text{لو}_{٣}\ ٦٣ = \text{لو}_{٣}\ (٩ \times ٧) = \text{لو}_{٣}\ ٩ + \text{لو}_{٣}\ ٧ = \text{لو}_{٣}\ ٣^{٢} + \text{لو}_{٣}\ ٧ = ٢\ \text{لو}_{٣}\ ٣ + \text{لو}_{٣}\ ٧$

$= ٢ + ١,٧٧١ = ٣,٧٧١$

(التحقق باستخدام الآلة الحاسبة ... Start log 3 REPLAY 6 3 =)

٣ $\text{لو}_{٣}\ \frac{٧}{٩} = \text{لو}_{٣}\ ٧ - \text{لو}_{٣}\ ٩ = \text{لو}_{٣}\ ٧ - \text{لو}_{٣}\ ٣^{٢} = \text{لو}_{٣}\ ٧ - ٢\ \text{لو}_{٣}\ ٣ = (\text{لو}_{٣}\ ٧) - ٢$

$= ١,٧٧١ - ٢ = -٠,٢٢٩$

(التحقق باستخدام الآلة الحاسبة ... Start log 3 REPLAY 7 ÷ REPLAY 9 =)

مثال ٤

أوجد فى أبسط صورة قيمة كل مما يأتى :

١ $\text{لو}_{٢}\ \sqrt[٧]{٣٢}$

٢ $\dfrac{١}{\text{لو}_{س}\ س\ ص\ ع} + \dfrac{١}{\text{لو}_{ص}\ س\ ص\ ع} + \dfrac{١}{\text{لو}_{ع}\ س\ ص\ ع}$

الحل

١) $\text{لو}_{٢} \sqrt[٧]{٣٢} = \text{لو}_{٢} (٢^{٥})^{\frac{١}{٧}} = \text{لو}_{٢} ٢^{\frac{٥}{٧}} = \frac{٥}{٧} \text{لو}_{٢} ٢ = \frac{٥}{٧}$

٢) $\frac{١}{\text{لو}_{س} \text{س ص ع}} + \frac{١}{\text{لو}_{ص} \text{س ص ع}} + \frac{١}{\text{لو}_{ع} \text{س ص ع}}$

$= \text{لو}_{\text{س ص ع}} \text{س} + \text{لو}_{\text{س ص ع}} \text{ص} + \text{لو}_{\text{س ص ع}} \text{ع}$

$= \text{لو}_{\text{س ص ع}} \text{س ص ع} = ١$

مثال ٥

باستخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة س لأقرب رقمين عشريين فى كل مما يأتى :

١) $٥^{س} = ١٧$

٢) $٢^{س - ١} = ٧$

٣) $٥^{س + ١} = ٢^{٤س - ٢}$

٤) $٥^{س - ٢} = ٣ \times ٤^{س + ١}$

٥) $٣^{٢س} - ١٤ \times ٣^{س} + ٤٥ = ٠$

الحل

١) $\because ٥^{س} = ١٧$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

$\therefore \text{لو } ٥^{س} = \text{لو } ١٧$ $\therefore \text{س لو } ٥ = \text{لو } ١٧$

$\therefore س = \frac{\text{لو } ١٧}{\text{لو } ٥}$ وباستخدام حاسبة الجيب $\therefore س \simeq ١,٧٦$

٢) $\because ٢^{س - ١} = ٧$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

$\therefore \text{لو } ٢^{س - ١} = \text{لو } ٧$ $\therefore (س - ١) \text{ لو } ٢ = \text{لو } ٧$

$\therefore \text{س لو } ٢ - \text{لو } ٢ = \text{لو } ٧$

$\therefore س = \frac{\text{لو } ٧ + \text{لو } ٢}{\text{لو } ٢} \simeq ٣,٨١$

٣) $\because ٥^{س + ١} = ٢^{٤س - ٢}$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

$\therefore \text{لو } ٥^{س + ١} = \text{لو } ٢^{٤س - ٢}$



$\therefore$ (س + ١) لو ٥ = (٤ س − ٣) لو ٢

$\therefore$ س لو ٥ + لو ٥ = ٤ س لو ٢ − ٣ لو ٢

$\therefore$ ٤ س لو ٢ − س لو ٥ = ٣ لو ٢ + لو ٥

$\therefore$ س (٤ لو ٢ − لو ٥) = ٣ لو ٢ + لو ٥

$\therefore$ س = $\frac{\text{٣ لو ٢ + لو ٥}}{\text{٤ لو ٢ − لو ٥}}$ ≃ ٣,١٧

٤ $\because$ ٥$^{\text{س} - ٢}$ = ٣ × ٤$^{\text{س} + ١}$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

$\therefore$ (س − ٢) لو ٥ = لو ٣ + (س + ١) لو ٤

$\therefore$ س لو ٥ − ٢ لو ٥ = لو ٣ + س لو ٤ + لو ٤

$\therefore$ س لو ٥ − س لو ٤ = لو ٣ + لو ٤ + ٢ لو ٥

$\therefore$ س (لو ٥ − لو ٤) = لو ٣ + لو ٤ + ٢ لو ٥

$\therefore$ س = $\frac{\text{لو ٣ + لو ٤ + ٢ لو ٥}}{\text{لو ٥ − لو ٤}}$ ≃ ٢٥,٥٦

حل آخر

$\because$ ٥$^{\text{س} - ٢}$ = ٣ × ٤$^{\text{س} + ١}$

$\therefore$ $\frac{\text{٥}^{\text{س}}}{\text{٥}^{٢}}$ = ٣ × ٤$^{\text{س}}$ × ٤

$\therefore$ $\frac{\text{٥}^{\text{س}}}{\text{٤}^{\text{س}}}$ = ٣ × ٤ × ٥^{٢}

$\therefore$ $\left(\frac{٥}{٤}\right)^{\text{س}}$ = ٣٠٠

$\therefore$ س = $\frac{\text{لو ٣٠٠}}{\text{لو} \frac{٥}{٤}}$ ≃ ٢٥,٥٦

٥ $\because$ ٣$^{٢\text{س}}$ − ١٤ × ٣$^{\text{س}}$ + ٤٥ = ٠ وبالتحليل $\therefore$ (٣$^{\text{س}}$ − ٩) (٣$^{\text{س}}$ − ٥) = ٠

$\therefore$ إما ٣$^{\text{س}}$ − ٩ = ٠ ، أو ٣$^{\text{س}}$ − ٥ = ٠

$\therefore$ ٣$^{\text{س}}$ = ٩

$\therefore$ ٣$^{\text{س}}$ = ٣^{٢}

$\therefore$ س = ٢

$\therefore$ ٣$^{\text{س}}$ = ٥ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

$\therefore$ س لو ٣ = لو ٥

$\therefore$ س = $\frac{\text{لو ٥}}{\text{لو ٣}}$ ≃ ١,٤٦

ملاحظة هامة عند حل المعادلة اللوغاريتمية

إذا كانت س $\in$ ح* ، م عددًا زوجيًا لا يساوى الصفر ، أ $\in$ ح$^{+}$ − {١}

فإن : لو$_{\text{أ}}$ س$^{\text{م}}$ = م لو$_{\text{أ}}$ |س|

فمثلًا : لو$_{٣}$ س^{٤} = ٤ لو$_{٣}$ |س|

مثال ٦

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١ ٢ لو س − لو (س + ٢) = ٠

٢ لو $س^٢$ = لو ٤ + لو ٩

٣ $لو_٢$ س + $لو_٢$ (س − ٢) = ٣

٤ لو س + لو (س + ٢) = لو (س + ٦)

٥ لو $\sqrt[٣]{٢س − ١}$ + لو $\sqrt[٣]{س − ٢}$ = لو ٣٠ − ١

٦ $\frac{\text{لو } ٤٩ - (\text{لو } ٧)^٢}{\text{لو } ٠٫٠٧}$ = لو س

الحل

١ ∵ ٢ لو س − لو (س + ٢) = ٠

∴ لو $س^٢$ = لو (س + ٢)

∴ $س^٢$ = س + ٢

∴ $س^٢$ − س − ٢ = ٠

∴ (س − ٢) (س + ١) = ٠

∴ إما س = ٢ (تحقق) أ ، س = −١ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٢}

! تذكر أن

١ الدالة اللوغاريتمية أحادية أى أنه إذا كان $لو_م$ س = $لو_م$ ص فإن س = ص

٢ نعوض بالقيم التى نحصل عليها فى المعادلة الأصلية ويكون الحل هو القيمة التى تحقق هذه المعادلة حيث إنه لا معنى للحديث عن لوغاريتم عدد غير موجب.

٢ ∵ لو $س^٢$ = لو ٤ + لو ٩

∴ لو $س^٢$ = لو (٤ × ٩)

∴ لو $س^٢$ = لو ٣٦

∴ $س^٢$ = ٣٦

∴ س = ± ٦ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {٦ ، −٦}

حل آخر : ∵ لو $س^٢$ = لو ٤ + لو ٩ ∴ لو $س^٢$ = لو (٤ × ٩)

∴ لو $س^٢$ = لو ٣٦ = لو $(٦)^٢$ ∴ ٢ لو |س| = ٢ لو ٦

∴ |س| = ٦ ∴ س = ± ٦ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {٦ ، −٦}

٣ ∵ لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ (س − ٢) = ٣ ∴ لو$_{٢}$ س (س − ٢) = ٣

∴ س^{٢} − ٢ س = ٢^{٣} = ٨ ∴ س^{٢} − ٢ س − ٨ = ٠

∴ (س − ٤) (س + ٢) = ٠

∴ إما س = ٤ (تحقق) أ، س = −٢ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٤}

٤ ∵ لو س + لو (س + ٢) = لو (س + ٦)

∴ لو س (س + ٢) = لو (س + ٦)

∴ س (س + ٢) = س + ٦

∴ س^{٢} + ٢ س − س − ٦ = ٠

∴ س^{٢} + س − ٦ = ٠ ∴ (س + ٣) (س − ٢) = ٠

∴ إما س = −٣ (مرفوض) أ، س = ٢ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {٢}

٥ ∵ لو $\sqrt[3]{\text{٢ س − ١}}$ + لو $\sqrt[3]{\text{س − ٢}}$ = لو ٣٠ − ١

∴ لو $\sqrt[3]{\text{(٢ س − ١) (س − ٢)}}$ = لو ٣٠ − لو ١٠

! تذكر أن لو ١٠ = ١

∴ لو $\sqrt[3]{\text{٢ س}^{٢}\text{ − ٥ س + ٢}}$ = لو ٣

∴ $\sqrt[3]{\text{٢ س}^{٢}\text{ − ٥ س + ٢}}$ = ٣ وبرفع الطرفين للقوة ٣

∴ ٢ س^{٢} − ٥ س + ٢ = ٢٧ ∴ ٢ س^{٢} − ٥ س − ٢٥ = ٠

∴ (٢ س + ٥) (س − ٥) = ٠

∴ إما س = $\frac{-٥}{٢}$ (مرفوض) أ، س = ٥ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {٥}

٦ ∵ $\frac{\text{لو } ٤٩ - (\text{لو } ٧)^٢}{\text{لو } ٠,٠٧}$ = لو س ∴ $\frac{\text{لو } ٧^٢ - (\text{لو } ٧)^٢}{\text{لو } \frac{٧}{١٠٠}}$ = لو س

∴ $\frac{٢ \text{ لو } ٧ - (\text{لو } ٧)^٢}{\text{لو } ٧ - \text{لو } ١٠٠}$ = لو س

∴ $\frac{\text{لو } ٧ \, (٢ - \text{لو } ٧)}{\text{لو } ٧ - ٢}$ = لو س

! تذكر أن لو ١٠٠ = لو $١٠^٢$ = ٢

∴ − لو ٧ = لو س ∴ لو $٧^{-١}$ = لو س

∴ س = $٧^{-١}$ = $\frac{١}{٧}$ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = $\{\frac{١}{٧}\}$

مثال ٧

أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١ لو$_٣$ (س^٢ − ٣ س + ٢) − لو$_٣$ (س − ٢) = لو$_٧$ ٤٩

٢ س$^{\text{لو س}}$ = ١٠

٣ لو$_٢$ س = لو$_٤$ ٢٥

٤ لو$_٣$ س × لو$_٩$ س = ٢

٥ لو$_٤$ س + لو$_س$ ٤ = ٢

الحل

١ ∵ لو$_٣$ (س^٢ − ٣ س + ٢) − لو$_٣$ (س − ٢) = لو$_٧$ ٤٩

∴ لو$_٣$ $\frac{س^٢ - ٣ س + ٢}{س - ٢}$ = لو$_٧$ $٧^٢$ ∴ لو$_٣$ $\frac{(س - ٢)(س - ١)}{س - ٢}$ = ٢ لو$_٧$ ٧

∴ لو$_٣$ (س − ١) = ٢ ∴ س − ١ = $٣^٢$

∴ س = ١ + ٩ = ١٠ ∴ مجموعة الحل = {١٠}

٢ ∵ س$^{\text{لو س}}$ = ١٠ وبأخذ لوغاريتم الطرفين ∴ لو س$^{\text{لو س}}$ = لو ١٠

∴ لو س × لو س = ١ ∴ $(\text{لو س})^٢$ = ١

∴ لو س = ± ١ وعندما لو س = ١ ∴ س = $١٠^١$ = ١٠

وعندما لو س = −١ ∴ س = $١٠^{-١}$ = ٠,١

∴ مجموعة الحل = {١٠ ، ٠,١}



٣ $\because \text{لو}_{٢}\,\text{س} = \text{لو}_{٤}\,٢٥$ $\therefore \dfrac{\text{لو س}}{\text{لو ٢}} = \dfrac{\text{لو ٢٥}}{\text{لو ٤}}$

$\therefore \text{لو س} = \dfrac{\text{لو ٥}^{٢} \times \text{لو ٢}}{\text{لو ٢}^{٢}} = \dfrac{\text{٢ لو ٥} \times \text{لو ٢}}{\text{٢ لو ٢}} = \text{لو ٥}$

$\therefore$ س = ٥ (تحقق) $\therefore$ مجموعة الحل = {٥}

٤ $\because \text{لو}_{٣}\,\text{س} \times \text{لو}_{٩}\,\text{س} = ٢$ $\therefore \text{لو}_{٣}\,\text{س} \times \dfrac{\text{لو}_{٣}\,\text{س}}{\text{لو}_{٣}\,٩} = ٢$

$\therefore (\text{لو}_{٣}\,\text{س})^{٢} = ٢\,\text{لو}_{٣}\,٩ = ٢\,\text{لو}_{٣}\,٣^{٢} = ٤\,\text{لو}_{٣}\,٣ = ٤$ $\therefore \text{لو}_{٣}\,\text{س} = \pm ٢$

$\therefore$ س $= ٣^{٢} = ٩$ (تحقق) أ، س $= ٣^{-٢} = \dfrac{١}{٩}$ (تحقق)

$\therefore$ مجموعة الحل = $\left\{٩ ، \dfrac{١}{٩}\right\}$

٥ $\because \text{لو}_{٤}\,\text{س} + \text{لو}_{\text{س}}\,٤ = ٢$

$\therefore \text{لو}_{٤}\,\text{س} + \dfrac{١}{\text{لو}_{٤}\,\text{س}} = ٢$ (بالضرب × $\text{لو}_{٤}\,\text{س}$)

$\therefore (\text{لو}_{٤}\,\text{س})^{٢} + ١ = ٢\,\text{لو}_{٤}\,\text{س}$ $\therefore (\text{لو}_{٤}\,\text{س})^{٢} - ٢\,\text{لو}_{٤}\,\text{س} + ١ = ٠$

$\therefore \left((\text{لو}_{٤}\,\text{س}) - ١\right)^{٢} = ٠$ $\therefore \text{لو}_{٤}\,\text{س} = ١$

$\therefore$ س = ٤ (تحقق) $\therefore$ مجموعة الحل = {٤}

مثال ٨

أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١ $\text{لو ٤٩} \times \text{لو} \sqrt{٨} = \text{لو ٣٤٣} \times \text{لو س}^{٢}$

٢ $\text{لو س}^{٢} = (\text{لو س})^{٢}$

٣ $(\text{لو س} + ١)\left(\text{لو} \dfrac{\text{س}}{١٠}\right) = ٢$

٤ $\text{لو س} - \text{لو}_{\text{س}}\,١٠٠ = ١$

الحل

١ $\because \text{لو ٤٩} \times \text{لو} \sqrt{٨} = \text{لو ٣٤٣} \times \text{لو س}^{٢}$

$\therefore \text{لو س}^{٢} = \dfrac{\text{لو ٤٩} \times \text{لو} \sqrt{٨}}{\text{لو ٣٤٣}} = \dfrac{\text{لو ٧}^{٢} \times \text{لو} \sqrt{٢^{٣}}}{\text{لو ٧}^{٣}} = \dfrac{\text{٢ لو ٧} \times \text{لو ٢}^{\frac{٣}{٢}}}{\text{٣ لو ٧}}$

∴ لو س^{٣} = $\frac{٢}{٣}$ × $\frac{٣}{٢}$ لو ٢ ∴ لو س^{٣} = لو ٢

∴ س^{٣} = ٢ ∴ س = $\sqrt[٣]{٢}$ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {$\sqrt[٣]{٢}$}

٢ ∵ لو س^{٢} = (لو س)^{٢} ∴ ٢ لو س = (لو س)^{٢} حيث س > ٠

∴ (لو س)^{٢} − ٢ لو س = ٠ ∴ لو س (لو س − ٢) = ٠

∴ إما لو س = ٠ ومنها س = (١٠)^{صفر} = ١ (تحقق)

أ، لو س = ٢ ومنها س = ١٠^{٢} = ١٠٠ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {١ ، ١٠٠}

٣ ∵ (لو س + ١) (لو $\frac{س}{١٠}$) = ٣ ∴ (لو س + ١) (لو س − لو ١٠) = ٣

∴ (لو س + ١) (لو س − ١) = ٣ ∴ (لو س)^{٢} − ١ = ٣

∴ (لو س)^{٢} = ٤ ∴ لو س = ± ٢

∴ إما لو س = ٢ ومنها س = ١٠^{٢} = ١٠٠ (تحقق)

أ، لو س = −٢ ومنها س = ١٠$^{-٢}$ = ٠,٠١ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {١٠٠ ، ٠,٠١}

٤ ∵ لو س − لو$_{س}$ ١٠٠ = ١ ∴ لو س − لو$_{س}$ ١٠^{٢} = ١

∴ لو س − ٢ لو$_{س}$ ١٠ = ١ ∴ لو س − $\frac{٢}{لو س}$ = ١ (بالضرب × لو س)

∴ (لو س)^{٢} − ٢ = لو س ∴ (لو س)^{٢} − لو س − ٢ = ٠

∴ (لو س + ١) (لو س − ٢) = ٠

∴ إما لو س = −١ ومنها س = ١٠$^{-١}$ = ٠,١ (تحقق)

أ، لو س = ٢ ومنها س = ١٠^{٢} = ١٠٠ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {١٠٠ ، ٠,١}



مثال ٩

إذا كان :

١ س ص = ١٦ فأثبت أن : ٣ لو$_{٢}$ س + ٤ لو$_{٢}$ ص − لو$_{٢}$ س ص^{٢} = ٨

٢ س^{٢} + ص^{٢} = ٦ س ص فأثبت أن : ٢ لو (س + ص) = لو س + لو ص + ٣ لو ٢

الحل

١ الطرف الأيمن = لو$_{٢}$ س^{٣} + لو$_{٢}$ ص^{٤} − لو$_{٢}$ س ص^{٢}

= لو$_{٢}$ $\frac{\text{س}^{٣} \times \text{ص}^{٤}}{\text{س ص}^{٢}}$ = لو$_{٢}$ س^{٢} ص^{٢} = لو$_{٢}$ (س ص)^{٢}

= ٢ لو$_{٢}$ س ص = ٢ لو$_{٢}$ ١٦ = ٢ لو$_{٢}$ ٢^{٤} = ٢ × ٤ لو$_{٢}$ ٢

= ٨ = الطرف الأيسر.

٢ ∵ س^{٢} + ص^{٢} = ٦ س ص

∴ س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س ص = ٦ س ص + ٢ س ص

∴ س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢} = ٨ س ص

∴ (س + ص)^{٢} = ٨ س ص وبأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ لو (س + ص)^{٢} = لو ٨ س ص

∴ ٢ لو (س + ص) = لو ٨ + لو س + لو ص = لو ٢^{٣} + لو س + لو ص

= لو س + لو ص + ٣ لو ٢

مثال ١٠

إذا كانت درجة قوة الزلزال (د) على مقياس ريختر تحسب بالعلاقة د = لو $\frac{\text{ش}}{\text{ش}_{.}}$

حيث ش هى شدة الزلزال ، ش. هى الشدة الابتدائية وتعرف بالمقياس الصفرى لشدة الزلزال وهى أقل شدة لحركة الأرض بحيث لا يسجلها المقياس.

١ أوجد على مقياس ريختر درجة الزلزال الذى شدته تعادل $١,٦ \times ١٠^{٨}$ مرة قدر الشدة الابتدائية.

٢ إذا كانت درجة الزلزال = ٧ درجات بمقياس ريختر أوجد كم مرة تعادل شدة هذا الزلزال من الشدة الابتدائية.

الحل

١ ∵ د = لو $\frac{ش}{ش_.}$ ، ش = $١,٦ \times ١٠^{٨}$ ش.

∴ د = لو $\frac{١,٦ \times ١٠^{٨} ش_.}{ش_.}$ = لو $(١,٦ \times ١٠^{٨}) \simeq ٨,٢$

أى أن درجة الزلزال على مقياس ريختر = ٨,٢

٢ ∵ درجة الزلزال (د) = ٧ ∴ ٧ = لو $\frac{ش}{ش_.}$

∴ $\frac{ش}{ش_.} = ١٠^{٧}$ ∴ ش = $١٠^{٧} \times$ ش.

أى أن شدة الزلزال تعادل ١٠ ٠٠٠ ٠٠٠ مرة قدر الشدة الابتدائية.

معلومة إثرائية

لأى عدد س ∈ $ص_+$ إذا كان : ن ≤ لو س < ن + ١

فإن عدد أرقام العدد س = ن + ١ حيث ن ∈ ط

فمثلًا : * لإيجاد عدد أرقام العدد $٥^{٣}$

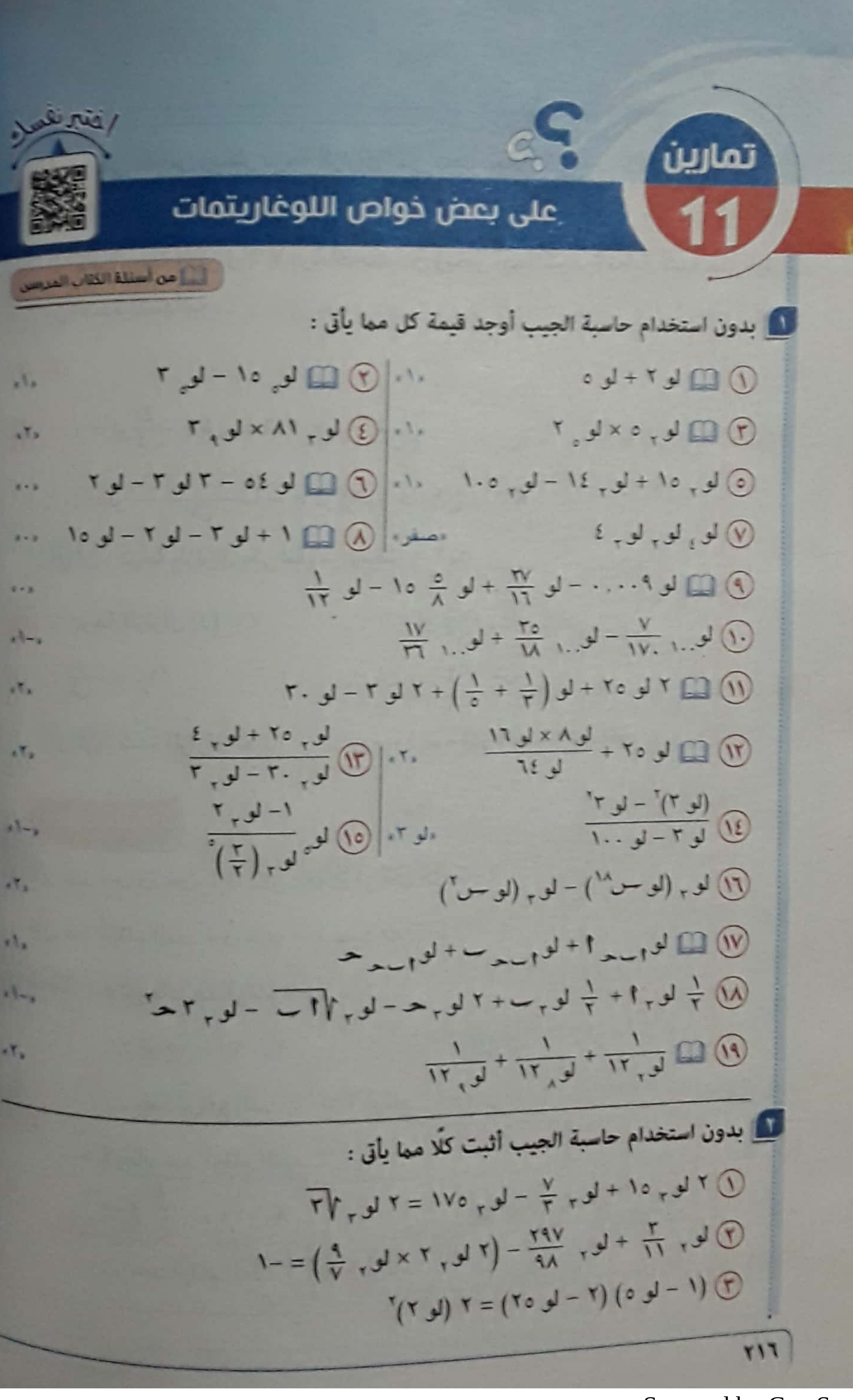
∵ لو $٥^{٣} \simeq ٢,٠٩٧$ **أى أن** ٢ ≤ لو $٥^{٣}$ < ٣

∴ عدد أرقام العدد $٥^{٣}$ = ٣ أرقام

* لإيجاد عدد أرقام العدد $٣^{١٧}$

∵ لو $٣^{١٧} \simeq ٨,١١١$ **أى أن** ٨ ≤ لو $٣^{١٧}$ < ٩

∴ عدد أرقام العدد $٣^{١٧}$ = ٩ أرقام



تمارين 11
على بعض خواص اللوغاريتمات

📖 من أسئلة الكتاب المدرسي

١ بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة كل مما يأتي :

① 📖 لو ٢ + لو ٥ «١»

② 📖 لو$_{٥}$ ١٥ − لو$_{٥}$ ٣ «١»

③ 📖 لو$_{٢}$ ٥ × لو$_{٥}$ ٢ «١»

④ لو$_{٣}$ ٨١ × لو$_{٩}$ ٣ «٢»

⑤ لو$_{٢}$ ١٥ + لو$_{٢}$ ١٤ − لو$_{٢}$ ١٠٥ «١»

⑥ 📖 لو ٥٤ − ٣ لو ٣ − لو ٢ «٠»

⑦ لو$_{٤}$ لو$_{٢}$ لو$_{٢}$ ٤ «صفر»

⑧ 📖 ١ + لو ٣ − لو ٢ − لو ١٥ «٠»

⑨ 📖 لو ٩٠٠, ٠ − لو $\frac{٣٧}{١٦}$ + لو $\frac{٥}{٨}$ ١٥ − لو $\frac{١}{١٢}$ «٠»

⑩ لو$_{١٠٠}$ $\frac{٧}{١٧٠}$ − لو$_{١٠٠}$ $\frac{٣٥}{١٨}$ + لو$_{١٠٠}$ $\frac{١٧}{٣٦}$ «−١»

⑪ 📖 ٢ لو ٢٥ + لو $\left(\frac{١}{٣} + \frac{١}{٥}\right)$ + ٢ لو ٣ − لو ٣٠ «٢»

⑫ 📖 لو ٢٥ + $\frac{\text{لو ٨ × لو ١٦}}{\text{لو ٦٤}}$ «٢»

⑬ $\frac{\text{لو}_{٢}\text{ ٢٥ + لو}_{٢}\text{ ٤}}{\text{لو}_{٢}\text{ ٣٠ − لو}_{٢}\text{ ٣}}$ «٢»

⑭ $\frac{(\text{لو ٣})^{٢} - \text{لو ٣}^{٢}}{\text{لو ٣ − لو ١٠٠}}$ «لو ٣»

⑮ لو$_{٥}$ $\frac{\text{١ − لو}_{٣}\text{ ٢}}{\text{لو}_{٣}\left(\frac{٣}{٢}\right)^{٥}}$ «−١»

⑯ لو$_{٣}$ (لو س^{١٨}) − لو$_{٣}$ (لو س^{٢}) «٢»

⑰ 📖 لو$_{\text{ا ب ح}}$ ا + لو$_{\text{ا ب ح}}$ ب + لو$_{\text{ا ب ح}}$ ح «١»

⑱ $\frac{١}{٢}$ لو$_{٢}$ ا + $\frac{١}{٢}$ لو$_{٢}$ ب + ٢ لو$_{٢}$ ح − لو$_{٢}$ $\sqrt{\text{ا ب}}$ − لو$_{٢}$ ٢ ح^{٢} «−١»

⑲ 📖 $\frac{١}{\text{لو}_{٢}\text{ ١٢}}$ + $\frac{١}{\text{لو}_{٨}\text{ ١٢}}$ + $\frac{١}{\text{لو}_{٩}\text{ ١٢}}$ «٢»

٢ بدون استخدام حاسبة الجيب أثبت كلًّا مما يأتي :

① ٢ لو$_{٣}$ ١٥ + لو$_{٣}$ $\frac{٧}{٣}$ − لو$_{٣}$ ١٧٥ = ٢ لو$_{٣}$ $\sqrt{٣}$

② لو$_{٢}$ $\frac{٣}{١١}$ + لو$_{٢}$ $\frac{٢٩٧}{٩٨}$ − (٢ لو$_{٢}$ ٢ × لو$_{٢}$ $\frac{٩}{٧}$) = −١

③ (١ − لو ٥) (٢ − لو ٢٥) = ٢ (لو ٢)^{٢}

④ $\frac{\text{لو } ٧٢٩ - \text{لو } ٦٤}{\text{لو } ٩ - \text{لو } ٤} = ٣$ | ⑤ $\frac{(\text{لو } ٥)^{٢} - \text{لو } ٥^{٢}}{\text{لو } ٥ - \text{لو } ١٠٠} = ١ - \text{لو } ٢$

⑥ $\frac{\text{لو}_{٢}\ \text{لو}_{٥}\ \text{لو}_{٣}\ ٢٤٣}{\text{لو}_{٧}\ \text{لو}_{٣}\ \text{لو}_{٢}\ ٥١٢} =$ صفر

٣ باستخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة س لأقرب رقمين عشريين فى كل مما يأتى :

① $٥^{س} = ١٣$ «١,٥٩»

② $٣^{س + ٢} = ٦$ «-٠,٣٧»

③ $٣^{٧ - ٢س} = ١٣,٤$ «٢,٣٢»

④ $٧^{س + ١} = ٣^{س - ٢}$ «-٤,٨٩»

⑤ $٣^{٢س - ٢} = ١١^{١ - س}$ «١,٢٤»

⑥ $س^{١,٦} = ٩٤,٥$ «±١٧,١٧»

⑦ $\frac{٥}{(١٠)^{٢س}} = ٧$ «-٠,٠٧»

⑧ $٧^{س + ١} + ٧^{س - ١} = ٣٠٠$ «١,٩٢»

⑨ $٢^{س} \times ٣ = ٢ \times ٣^{س + ٢}$ «-٤,٤٢»

⑩ $٣ \times ٢^{س - ١١} = ٨ \times ٦^{٥س - ١}$ «-٠,٨٢»

⑪ $٢٥^{س} - ٢٧ \times ٥^{س} + ٥٠ = ٠$ «٢ أ ، ٠,٤٣»

⑫ $٨^{٣ - ٥س} \div ٧^{٤ + س} = ٢$ «-٠,١٨»

⑬ $\text{لو}_{٥} (٤^{س + ١}) = س - ٢$ «٢٠,٦٤»

٤ إذا كان : $\text{لو}_{٣}\ ٥ \simeq ١,٤٦٥$ فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة :

① $\text{لو}_{٣}\ ١٥$ ② $\text{لو}_{٣}\ ١٣٥$ ③ $\text{لو}_{٣}\ \frac{٥}{٩}$

٥ إذا كان : لو ٢ = س ، لو ٣ = ص أوجد بدلالة س ، ص كلًا من :

① لو ٦ ② $\text{لو}_{١٨}\ ١٢$

٦ ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة ، وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ ، [حيث س ، ص ∈ $ع^{+}$ ، أ ، ب ∈ $ع^{+}$ - {١} فى المسائل ③ إلى ⑦] مع تصحيح الخطأ :

① $\text{لو}_{س}\ س^{س} = س$ لكل س ∈ ع ( )

② $\text{لو } س^{ن} = ن\ \text{لو } س$ لكل س ∈ ع ( )

③ لو$_{أ}$ (س + ص) = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص ( )

④ لو$_{أ}$ (س + ص) = لو$_{أ}$ س × لو$_{أ}$ ص ( )

⑤ لو$_{أ}$ (س ص) = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص ( )

⑥ لو$_{أ}$ $\left(\frac{س}{ص}\right)$ = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص$^{-١}$ ( )

⑦ $\frac{لو_{أ} س}{لو_{أ} ص} = \frac{لو_{ب} س}{لو_{ب} ص}$ ( )

⑧ إذا كان : س < صفر فإن : لو$_{أ}$ س^{٤} = ٤ لو$_{أ}$ س ، أ ∈ ح$^{+}$ − {١} ( )

٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① أى العبارات الآتية صحيحة ؟

(أ) لو ٢ − لو $\sqrt{٢}$ = لو $\sqrt{٢}$ (ب) لو$_{١}$ ١ = صفر

(جـ) لو $\frac{٧}{٥}$ = $\frac{لو ٧}{لو ٥}$ (د) لو ٧ ÷ لو ٢ = لو ٥

② إذا كان : لو س − لو ٢ = لو ٤ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٦

③ إذا كان : لو س + لو ٥ = ٢ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٨ (جـ) ١٧ (د) ٢٠

④ ٢ لو$_{هـ}$ ٣ + ٣ لو$_{هـ}$ ٢ = ...

(أ) لو$_{هـ}$ ٦ (ب) ٦ لو$_{هـ}$ ٦ (جـ) لو$_{هـ}$ ٧٢ (د) لو$_{هـ}$ ٣٦

⑤ لو$_{ب}$ أ × لو$_{جـ}$ ب × لو$_{د}$ جـ × لو$_{أ}$ د = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) أ ب جـ د (د) أ د

⑥ لو$_{أب}$ $\frac{١}{أ}$ + لو$_{أب}$ $\frac{١}{ب}$ = ...

(أ) $\frac{أ}{ب}$ (ب) $\frac{ب}{أ}$ (جـ) −١ (د) ١

⑦ المقدار $\frac{\text{٣ لو ٢}}{\text{لو ٤ + لو ٣}}$ يكافئ المقدار ....

(أ) $\text{لو}_{٣}$ ٢ (ب) $\text{لو}_{٧}$ ٢ (جـ) $\text{لو}_{١٢}$ ٨ (د) $\text{لو}_{٧}$ ٨

⑧ إذا كان: $٣^{س} = ٥$ فإن: س = ...

(أ) ٣ (ب) $\text{لو}_{٣}$ ٥ (جـ) $\text{لو}_{٥}$ ٣ (د) $\frac{٥}{٣}$

⑨ إذا كان: $\text{لو}_{٢}$ ٥ = أ فإن: $\text{لو}_{١٠}$ ٥ = ...

(أ) $أ^{٢}$ (ب) ٣ أ (جـ) $\frac{١}{أ + ٣}$ (د) $\frac{أ}{أ + ١}$

٨ أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

① $\text{لو}_{٣}$ (س + ٦) = ٢ $\text{لو}_{٣}$ س «{٣}»

② $\text{لو}_{٤}$ س + $\text{لو}_{٤}$ (س + ٦) = ٣ «{-٣ + $\sqrt{٧٣}$}»

③ $\text{لو}_{٣}$ س + $\text{لو}_{٣}$ $س^{٢}$ = ٣ «{٣}»

④ $\text{لو}_{٣}$ (س − ١) + $\text{لو}_{٣}$ (س + ١) = $\text{لو}_{٣}$ ٨ «{٣}»

⑤ لو (س + ٨) − لو (س − ١) = ١ «{٢}»

⑥ $\text{لو}_{٤}$ س = ١ − $\text{لو}_{٤}$ (س − ٣) «{٤}»

⑦ $\text{لو}_{٥}$ $س^{٢}$ + $\text{لو}_{٥}$ ٢ = $\text{لو}_{٥}$ ١٨ «{٣ ، -٣}»

⑧ $\text{لو}_{٣}$ (٧ $س^{٢}$ − ٤) = ٢ $\text{لو}_{٣}$ س + $\frac{١}{٢}$ $\text{لو}_{٣}$ ٩ «{١}»

⑨ ٥ $\text{لو}_{٣}$ (س + ٢) − $\text{لو}_{٣}$ $(س − ١)^{٥}$ = $\text{لو}_{٣}$ ٣٢ «{٤}»

⑩ لو (٨ − س) + ٢ لو $\sqrt{س - ٦}$ = ٠ «{٧}»

⑪ لو (س + ٢) + لو (س − ٢) = ١ − لو ٢ «{٣}»

⑫ لو ٧ × لو ٧٢٩ = لو ٤٩ × لو $س^{٣}$ «{٣}»

⑬ $\text{لو}_{٢}$ ($س^{٢}$ + ٦ س + ٩) − $\text{لو}_{٢}$ (س − ١) = $\text{لو}_{٥}$ ٦٢٥ «{٥}»

⑭ لو س = $\frac{\text{(لو ٣)}^{٢} - \text{لو ٢٧}}{\text{لو ٠,٠٠٣}}$ «{٣}»

(١٥) (لو س)^٢ − لو س^٢ = ٣ «{٠,١ ، ١٠٠٠}»

(١٦) (لو س)^٢ + لو س^٢ + ١ = (لو ٥)^٢ «{$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٥٠}$}»

(١٧) ٢ لو$_س$ ٢ + لو$_س$ ١٤ − ٣ لو$_س$ ٣ = ٣ + لو$_س$ ٧ «{$\frac{٢}{٣}$}»

(١٨) لو $\sqrt[٣]{٣س − ١}$ + لو $\sqrt[٣]{س − ٢}$ = لو ٢٠ − ١ «{٣}»

٩ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) لو$_٢$ س = لو$_٤$ ٩ «{٣}»

(٢) ٣$^{لو س}$ = ٢$^{لو ٣}$ «{٢}»

(٣) س$^{لو س}$ = ١٠ «{١٠ ، ٠,١}»

(٤) لو$_٢$ س = لو$_س$ ٣ «{٢ ، $\frac{١}{٣}$}»

(٥) س$^{لو_س س^٢}$ = لو ١٠^٩ «{٣}»

(٦) ٢$^{٢ لو س}$ × ٥$^{لو س}$ = ٨٠٠٠ «{١٠٠٠}»

(٧) ٢$^{(لو س)^٢}$ × ٦٤ = ٢$^{لو س^٥}$ «{١٠٠ ، ١٠٠٠}»

(٨) لو س − $\frac{١}{لو س}$ = $\frac{٣}{٢}$ «{$\frac{١}{\sqrt{١٠}}$ ، ١٠٠}»

(٩) لو$_٢$ س + لو$_س$ ٢ = ٢ «{٢}»

(١٠) لو س − لو$_س$ ١٠٠ = ١ «{$\frac{١}{١٠}$ ، ١٠٠}»

(١١) لو $\frac{س}{٢}$ × لو $\frac{٢}{س}$ = −١ «{٢٠ ، ٠,٢}»

(١٢) (لو س)^٣ = لو س^٩ «{١ ، ١٠٠٠ ، ٠,٠٠١}»

(١٣) س$^{لو س}$ = ١٠٠ س «{١٠٠ ، $\frac{١}{١٠}$}»

(١٤) (لو س + ٢) (لو $\frac{س}{١٠٠}$) = ٥ «{١٠٠٠ ، ٠,٠٠٠١}»

(١٥) لو$_٣$ س + لو$_٩$ س^٢ + ٣ = صفر «{$\frac{١}{٣\sqrt{٣}}$}»

(١٦) لو$_٢$ س = لو$_٤$ (س + ٦) «{٣}»

(١٧) لو$_٢$ س + لو$_٤$ س = $\frac{-٣}{٢}$ «{$\frac{١}{٢}$}»

Scanned by CamScanner

⑱ 📖 $\sqrt{\text{لو}_٢ \text{ س}} = \text{لو}_٢ \sqrt{\text{س}}$ ٠{١ ، ١٦}٠

⑲ $\sqrt{\text{س}^{\text{لو} \sqrt{\text{س}}}} = ١٠$ ٠{١٠٠ ، $\frac{١}{١٠٠}$}٠

⑳ $\sqrt{\text{لو} \left(٩١ + ٣^{\frac{\text{س}}{٢}}\right)} = \text{لو } ١٠^{\frac{\text{س}}{٢}}$ ٠{٨}٠

㉑ $\text{لو } \frac{١}{٢^{\text{س}} + \text{س} - ١} = \text{س} (\text{لو } ٥ - ١)$ ٠{١}٠

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① أى العبارات الآتية صحيحة ؟

(أ) لو ٣ + لو ٣ = لو ٦ (ب) ١ − لو ٥ = ٢

(جـ) لو ٢ × لو ٢ = لو ٤ (د) لو (١ + ٢ + ٣) = لو ١ + لو ٢ + لو ٣

② إذا كان : لو ٣ = س ، لو ٤ = ص فإن : لو ١٢ = ...

(أ) س + ص (ب) س ص (جـ) س − ص (د) لو س + لو ص

③ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى أ فيه : أ ب = $\text{لو}_٢$ ٣ سم ، أ جـ = $\text{لو}_٣$ ٦٤ سم

فإن مساحة Δ أ ب جـ = ... $\text{سم}^٢$

(أ) ١,٥ (ب) ٣ (جـ) لو ١٦ (د) $\text{لو}_٣$ ١٦

④ إذا كان : $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٥}} = \frac{\text{لو ٣٦}}{\text{لو ٦}} = \frac{\text{لو ٦٤}}{\text{لو ص}}$ فإن : س + ص = ...

(أ) ٢٥ (ب) ٨ (جـ) ١٧ (د) ٣٣

⑤ إذا كان : ل ، م هما جذرا المعادلة : $٣ \text{س}^٢ - ١٦ \text{ س} + ١٢ = ٠$

فإن قيمة : $\text{لو}_٣$ ل + $\text{لو}_٣$ م = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١٢ (د) ١٦

⑥ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $\text{س}^٢ + \text{س لو}_٣ \text{ أ} = ٩$

وكان : $\frac{\text{ل} + \text{م}}{\text{ل م}} = \frac{١}{٣}$ فإن : أ = ...

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ٢٧ (د) ٧٢٩

⑦ مجموعة حل المعادلة : $لو_ب (س + ٥) = لو_ب س + لو_ب ٥$ هي ....

(أ) $\{٥\}$ (ب) $\{٤\}$ (جـ) $\{\frac{٤}{٥}\}$ (د) $\{\frac{٥}{٤}\}$

⑧ في الشكل المقابل :

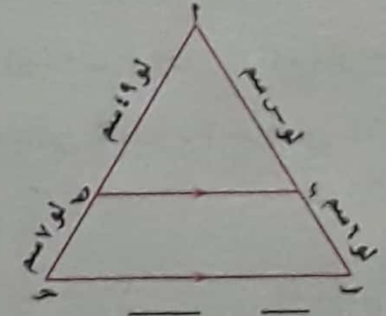
محيط الشكل = ... سم

(أ) ٢ $لو_٦$ ٣٥ (ب) $لو_٦$ ٧٠ (جـ) ٣ (د) ٦

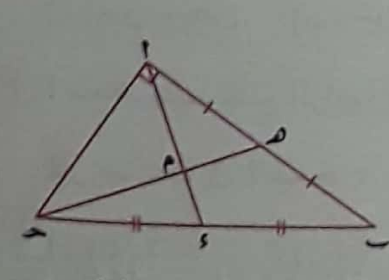
⑨ لو (حا θ) + لو (قا θ) = ... حيث $θ \in [٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) −١

١١ في كل من الأشكال الآتية أوجد ما هو مطلوب أسفل كل شكل في أبسط صورة :



① إذا كان $\overline{ءهـ} // \overline{ب جـ}$ أوجد قيمة س



② إذا كان م ء = $لو_{٨١}$ ٢٤٣ سم ، أوجد طول $\overline{ب جـ}$

③ إذا كان $\overline{أب} \perp \overline{أجـ}$ ، $\overline{أء} \perp \overline{ب جـ}$ أوجد قيمة س

④ إذا كان $\overrightarrow{أء}$ ينصف ∠ أ أوجد قيمة س

١٢ أوجد مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية آنيًا فى ح × ح :

(١) لو س ص = ١ − لو ٥ ، لو $ص^٣$ = ٣ − لو ١٢٥ «{(١ ، ٢)}»

(٢) $لو_٢$ س + $لو_٢$ ص + $لو_٢$ ٤ = ٢ + $لو_٢$ ٩ ، س + ص = ١٠ «{(١ ، ٩) ، (٩ ، ١)}»

(٣) لو $س^٣$ + لو $ص^٢$ = ١١ ، لو $س^٢$ − لو $ص^٣$ = ٣ «{(١٠٠٠ ، ١٠)}»

١٣ أجب عما يأتى :

(١) إذا كان : س ص = ٩ $\sqrt{٣}$

فأثبت أن : ٥ $لو_٣$ س + ٤ $لو_٣$ ص − $لو_٣$ $س^٣$ $ص^٢$ = ٥

(٢) إذا كان : $\frac{١}{٣}$ لو أ = $\frac{١}{٥}$ لو ب = لو حـ فأثبت أن : $حـ^٨$ = أ ب

(٣) إذا كان : لو $\frac{س + ص}{٣}$ = $\frac{١}{٢}$ (لو س + لو ص) فأثبت أن : $\frac{س}{ص}$ + $\frac{ص}{س}$ = ٧

(٤) إذا كان : $٣^{لو_أ س}$ = أ فأثبت أن : $لو_أ$ س معكوس ضربى للعدد $لو_أ$ ٣

ثم أوجد قيمة : $لو_٩$ س «٢»

(٥) أثبت أن : $لو_{أ^٢}$ $ب^٢$ = $لو_أ$ ب ثم أثبت أن : $لو_أ$ $ب^٢$ + $لو_{أ^٢}$ $ب^٤$ = ٤ $لو_أ$ ب

(٦) إذا كان : ٣ لو س + ٤ لو ص − لو س $ص^٢$ = ٢ (لو ٢ + لو ٣)

فأثبت أن : س = $\frac{٦}{ص}$

(٧) إذا كان : $س^٢$ + $ص^٢$ = ٨ س ص

أثبت أن : ٢ لو (س + ص) = ١ + لو س + لو ص

(٨) إذا كان : لو (س + ص) = $\frac{١}{٢}$ (لو س + لو ص) + لو٢ أثبت أن : س = ص

(٩) إذا كان : لو س $ص^٣$ = ١ ، لو $س^٢$ ص = ١ أوجد قيمة : لو س ص «$\frac{٢}{٥}$»

(١٠) أثبت أن : $لو_ص$ س = $\frac{١}{لو_س ص}$

ثم أوجد مجموعة حل المعادلة : $لو_٣$ س + ٣ $لو_س$ ٣ = ٤ «{٣ ، ٢٧}»

(١١) إذا كانت : س ، ص ، ع أعدادًا صحيحة موجبة

وكان $\frac{٤}{لو_س ص}$ + $\frac{٧}{لو_ع ص}$ = ٣ $لو_ص$ ع أوجد قيمة : س ع «١»

(١٢) إذا كان : $ص = أ^{لو_{أ} س}$ فأثبت أن : $ص = س$ ومن ذلك أوجد قيمة : $٣^{\frac{١}{٢} لو_{٣} ٤٩}$ «٧»

(١٣) أثبت أن : $لو_{أ^{ص}} أ^{س} = \frac{س}{ص}$ ومن ذلك أوجد قيمة : $لو_{\sqrt{٥}} ١٢٥ \times لو_{٨} \sqrt{٢}$ «$\frac{٣}{٢}$»

(١٤) أثبت أن : $لو_{ب} أ = \frac{لو أ}{لو ب}$

ومن ثم استخدم العلاقة فى إثبات أن : $(لو_{أ} أ ب)^{-١} + (لو_{ب} أ ب)^{-١} = ١$

(١٥) إذا كان : $لو_{ح} أ + لو_{ح} ب - ٢ لو_{ح} \frac{أ + ب}{٢} = ٠$ فأثبت أن : $أ - ب = ٠$

(١٦) إذا كان : $(س^{لو س})^{٢} \times س^{٢} = ١٠^{٥}$ فأوجد قيمة : $س$ «$\frac{١}{١٠٠\sqrt{١٠}}$ ، ١٠»

(١٧) بوضع $أ^{س} = ص$ فى المعادلة : $أ^{س} - أ^{-س} = ١$

أوجد قيمة ص ومن ذلك أثبت أن : $س = لو_{أ} \frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$ «$\frac{١ \pm \sqrt{٥}}{٢}$»

(١٨) إذا كانت : $د(س) = لو س^{٢}$

أوجد مجموعة حل المعادلة : $د(س + ١) + د(س - ١) = د(٣)$ «$\{٢ ، -٢\}$»

(١٩) ابحث نوع الدالة د : $د(س) = لو (\sqrt{س^{٢} + ١} - س)$

من حيث كونها زوجية أم فردية.

(٢٠) استخدم الآلة الحاسبة فى إيجاد عدد أرقام العدد $٤^{٤٧}$

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

١٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $لو س = ع + لو ص$ فإن : $س =$ ....

(أ) $ص \times ١٠^{ع}$ (ب) $\frac{ع}{ص}$ (جـ) $ع - (١٠)^{ص}$ (د) $\frac{١}{ص} \times (١٠)^{ع}$

(٢) $\frac{١}{١ + لو_{ب} أ + لو_{ب} ح} + \frac{١}{١ + لو_{ح} أ + لو_{ح} ب} + \frac{١}{١ + لو_{أ} ب + لو_{أ} ح} =$ ....

(أ) $لو_{أ} ب ح$ (ب) $لو_{ب} أ ح$ (جـ) $لو_{ح} أ ب$ (د) ١

(٣) مجموع جذرى المعادلة : $(٢٥)^{س} - ١٢ \times ٥^{س} + ٢٧ = ٠$ يساوى ....

(أ) $لو_{٥} ١٢$ (ب) ١٢ (جـ) $لو_{٥} ٢٧$ (د) ٢٧

④ $٣^{لو\ س}$ = ...

(أ) ٣ لو س　　(ب) س لو ٣　　(جـ) لو ٣ س　　(د) $س^{لو\ ٣}$

⑤ إذا كان : أ > ب > جـ > ١　فإن : $لو_{جـ}\ لو_{ب}\ لو_{أ}\ أ^{ب^{جـ}}$ = ...

(أ) صفر　　(ب) ١　　(جـ) ٢　　(د) أ ب جـ

⑥ إذا كان : $ب^{س} - ٢\ ب^{-س} = ١$ حيث ب > ١　فإن : س = ...

(أ) ٢　　(ب) لو ٢　　(جـ) $لو_{ب}\ ٢$　　(د) $لو_{٢}\ ب$

⑦ إذا كان : $\frac{١}{لو_{٢}\ س} + \frac{١}{لو_{٤}\ س} + \frac{١}{لو_{٨}\ س} + \frac{١}{لو_{١٦}\ س} = ٥$

فإن : س = ...

(أ) ١　　(ب) ٢　　(جـ) ٤　　(د) ٨

⑧ إذا كان : لو أ ∈]٠ ، ١[　فإن : أ ∈ ....

(أ)]٠ ، ١[　　(ب)]١ ، ٢[　　(جـ)]١ ، ١٠[　　(د)]١ ، ∞[

⑨ إذا كان : أ ∈]٠ ، ٩]　فإن : $لو_{٣}$ أ ∈ ....

(أ)]-∞ ، ٢]　　(ب)]٢ ، ٨١]　　(جـ) [٢ ، ∞[　　(د)]-∞ ، ٠]

⑩ مجموعة حل المعادلة : $٢^{لو_{٢}(س + ٤)} + ٣^{لو_{٣}(س + ٥)} = (٢٥)^{لو_{٥}\ ٧}$

هي ....

(أ) {٢ ، ٣}　　(ب) {-٤ ، -٥}　　(جـ) {±٢}　　(د) {٢٠}

⑪ إذا كانت : س ، ص ∈ $ح^{+}$ - {١} وكان : $لو_{ص}\ س = لو_{س}\ ص$

فإن : ....

(أ) س = ص　　(ب) س = $\frac{١}{ص}$　　(جـ) س = ± ١　　(د) أ ، ب معًا.

⑫ إذا كان : $٣^{أ} = ٥^{ب} = ٧^{جـ}$　فإن : $\frac{أ}{ب} + \frac{أ}{جـ}$ = ...

(أ) ٣٥　　(ب) ٧　　(جـ) $لو_{٣}\ ٧$　　(د) $لو_{٣}\ ٣٥$

⑬ إذا كان : $لو_{٢}\ س + لو_{٤}\ س + لو_{٨}\ س = ١١$　فإن : س = ...

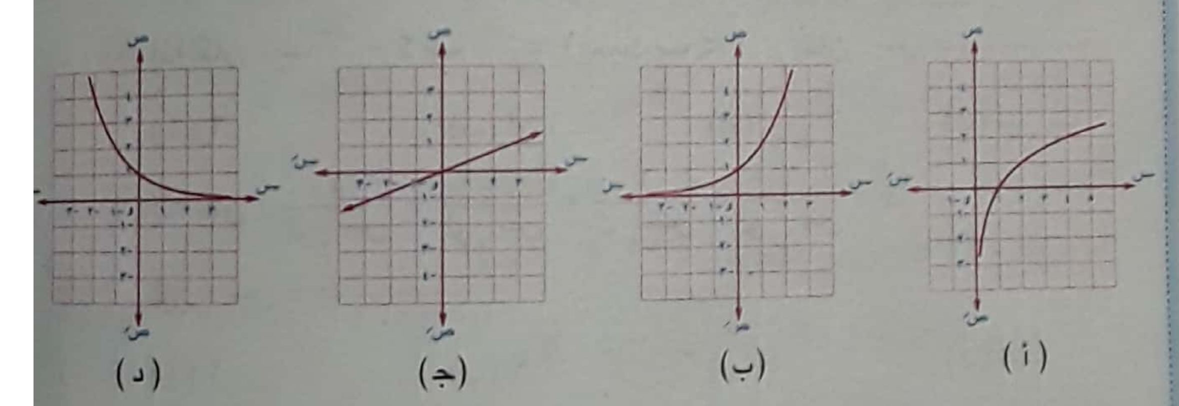
(أ) ٣٢　　(ب) ٣٦　　(جـ) ٦٤　　(د) ١٢١

(١٤) إذا كان : لو$_{٢}$ ٣ × لو$_{٣}$ ٤ × لو$_{٤}$ ٥ × ... × لو$_{ن}$ (ن + ١) = ١٠

فإن : ن = ...

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١٠٢٣ (د) ١٠٢٤

(١٥) الشكل البيانى الذى يمثل الدالة د : د (س) = لو ٢^{س} هو ....



(أ) (ب) (جـ) (د)

١٥ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتى :

① لو$_{٣}$ $\frac{١}{٢}$ + لو$_{٣}$ $\frac{٢}{٣}$ + لو$_{٣}$ $\frac{٣}{٤}$ + ... + لو$_{٣}$ $\frac{٨٠}{٨١}$ «-٤»

② لو (ظا ١°) + لو (ظا ٢°) + لو (ظا ٣°) + ... + لو (ظا ٨٩°) «صفر»

③ لو ظا ١° × لو ظا ٢° × لو ظا ٣° × ... × لو ظا ٧٣° «صفر»

١٦ أثبت أن :

لو$_{ب}$ س + لو$_{ب^{٢}}$ س^{٢} + لو$_{ب^{٣}}$ س^{٣} + ... + لو$_{ب^{ن}}$ س^{ن} = لو$_{ب}$ س^{ن}



تطبيقات حياتية على الوحدة الثانية

من أسئلة الكتاب المدرسى

تطبيق حياتى على الدرس الأول

الربط بالهندسة :

إذا كان طول نصف قطر كرة نق يعطى بدلالة الحجم ح من العلاقة نق = $\left(\frac{٣ ح}{٤ \pi}\right)^{\frac{١}{٣}}$

أوجد الزيادة فى طول نصف القطر عندما يتغير الحجم من $\frac{٣٢}{٣}$ π إلى ٣٦ π وحدة مكعبة.

«١ وحدة طولية»

تطبيق حياتى على الدرس الثالث

الربط بالأعداد : إذا كان مجموع الأعداد ٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ... + $٢^{ن}$ يعطى بالعلاقة $ح_{ن}$ = ٢ ($٢^{ن}$ − ١)

(١) أوجد مجموع العشرة أعداد الأولى فى النمط. «٢٠٤٦»

(٢) أوجد عدد الحدود فى النمط ابتداء من الحد الأول ليكون مجموعها ١٣١٠٧٠ «١٦»

تطبيقات حياتية على الدرس الخامس

١ **الربط بالتعليم :**

إذا كانت العلاقة بين درجات تذكر أحد الطلاب بالمعلومات التى درسها فى الصف الأول الثانوى وعدد الأشهر (ن) التى تبدأ من نهاية تدريس الصف هى :

د (ن) = ٧٠ − ٤ $لو_{٢}$ (ن + ١) فأوجد درجات هذا الطالب :

(١) فى نهاية تدريس الصف الأول الثانوى (ن = ٠) «٧٠ درجة»

(٢) بعد مرور ٧ أشهر من تدريس الصف الأول الثانوى. «٥٨ درجة»

---

٢ فى دراسة لقياس مدى احتفاظ الطلبة لما تم دراسته فى إحدى المواد يعاد امتحانهم من فترة إلى أخرى فى نفس المادة. فإذا كانت درجات أحد الطلبة تتبع العلاقة

د (ن) = ٨٥ − ٢٥ لو (ن + ١)



حيث ن عدد الأشهر بعد اكتمال الدراسة، د (ن) درجة الطالب (نسبة مئوية). **أوجد :**

① درجة الطالب فى أول امتحان لهذه المادة. «٨٥٪»

② درجة الطالب بعد مرور ٣ أشهر من دراسته لهذه المادة. «٦٩,٩٥٪»

③ درجة الطالب بعد مرور عام كامل من دراسته لهذه المادة. «٥٧,١٥٪»

---

٣ تطبق إحدى الدول نظامًا ضريبيًا بحيث يدفع الممول الضريبة المستحقة سنويًا وفقًا للدالة :

د (س) = { ١٠٪ س عندما س ≤ ٥٠٠٠
١٠٪ س + ١٠٠ لو (س − ٤٩٩٩) عندما س > ٥٠٠٠ }

حيث س هى صافى الربح السنوى. **أوجد :**

① الضريبة المستحقة على أحد المولين الذين يبلغ صافى ربحهم السنوى ٣٦٠٠ جنيه.

② الضريبة المستحقة على أحد المولين الذين يبلغ صافى ربحهم السنوى ٨٠٠٠ جنيه.

«٣٦٠ جنيهًا ، ١١٤٧,٧٢٦٦ جنيهًا»

تطبيقات حياتية على الدرس السادس

١ **الربط بالكيمياء :** يعرف الرقم الهيدروچينى للمحلول (PH) على أنه سالب لوغاريتم تركيز الهيدروچين فى المحلول (H^+) **أى أن** $PH = -\log(H^+)$

① احسب الرقم الهيدروچينى لمحلول تركيز الهيدروچين فيه 10^{-3}

② احسب تركيز الهيدروچين فى محلول رقمه الهيدروچينى 9 «٣ ، $١٠^{-٩}$»

---

٢ **الربط بالسكان :** إذا كان عدد سكان إحدى المدن يتزايد بمعدل سنوى قدره ٧ ٪

① أوجد العلاقة التى توضح عدد السكان بعد عام.

② بعد كم سنة يتضاعف عدد السكان إذا استمرت الزيادة بهذا المعدل ؟ «١٠ سنوات»

---

٣ إذا كان عدد سكان إحدى المدن ابتداءً من عام ٢٠١٠ يُعطى بالعلاقة

ع = ١٠^٥ $(١,٣)^{ن - ٢٠١٠}$ ، حيث ع عدد السكان ، ن السنة.

① احسب عدد سكان هذه المدينة عام ٢٠١٥

② فى أى سنة يصبح عدد سكان هذه المدينة ١,٤ مليون نسمة ؟ «٣٧١٢٩٣ نسمة ، ٢٠٢٠»

٤ إذا كانت درجة قوة الزلزال (د) على مقياس ريختر تحسب بالعلاقة د = لو $\frac{ش}{ش_٠}$

حيث ش هى شدة الزلزال ، ش٠ هى الشدة الابتدائية.

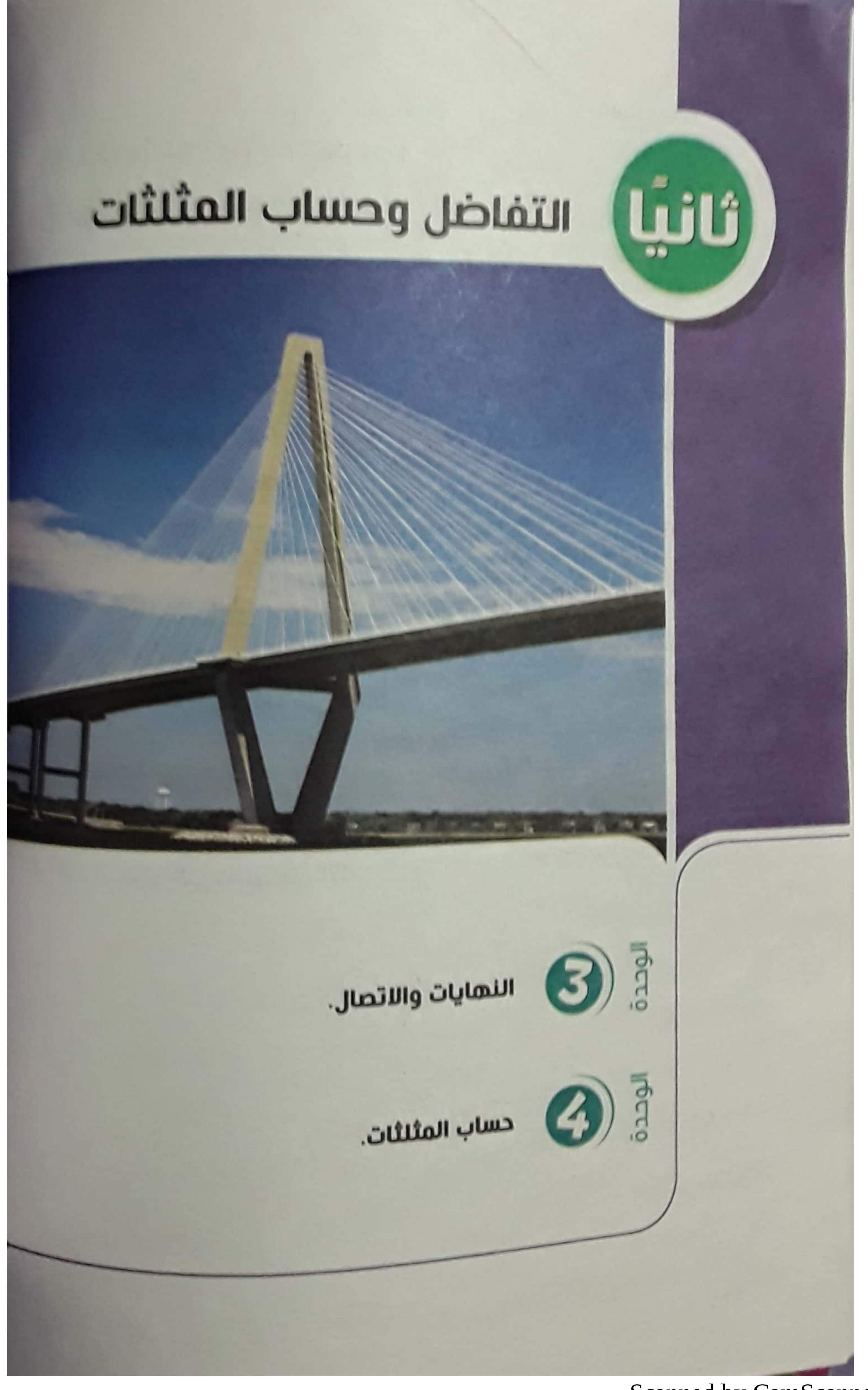
① أوجد بمقياس ريختر درجة الزلزال الذى شدته تعادل ١,٥ × ١٠^٦ مرة قدر الشدة الابتدائية.

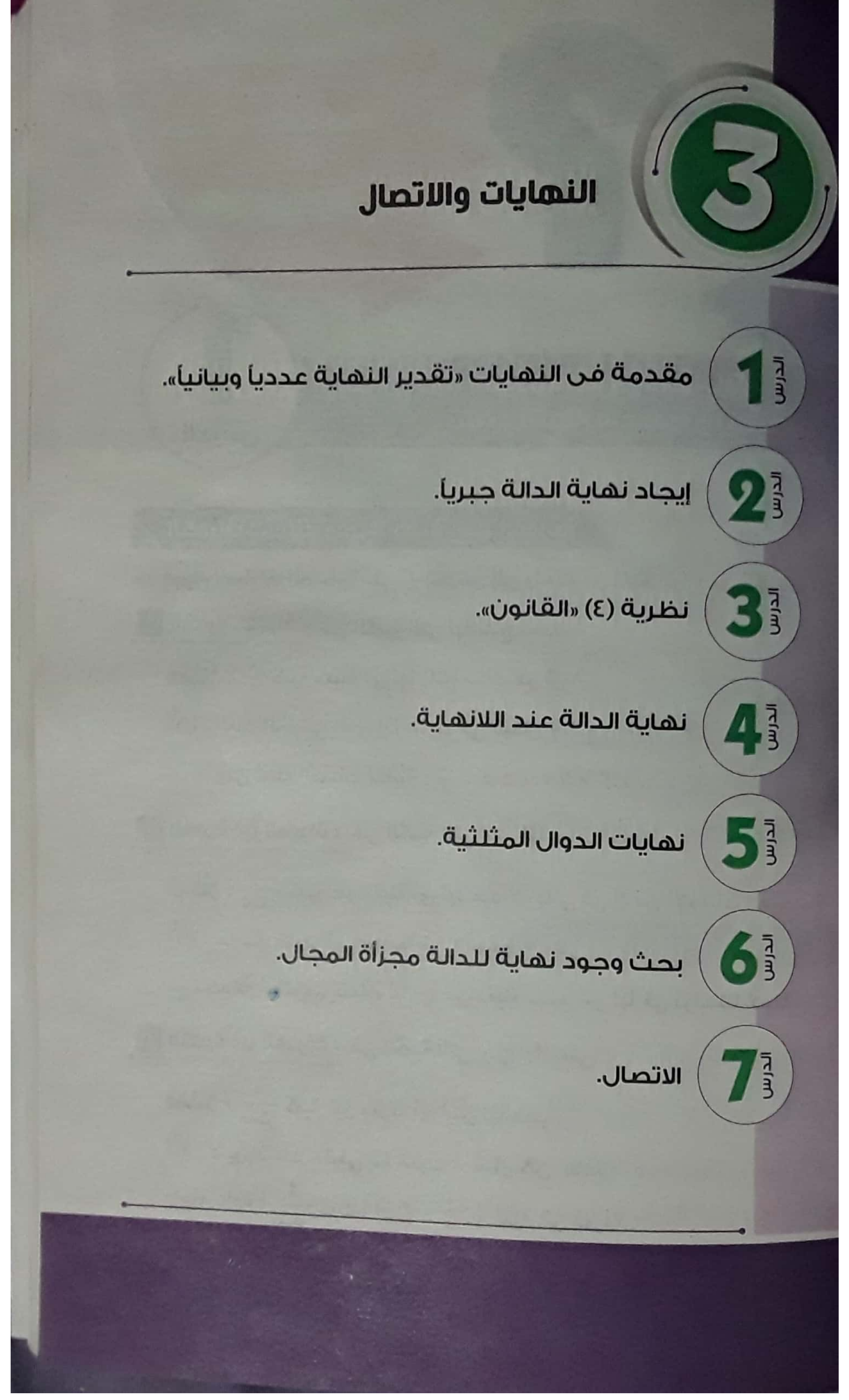
② إذا كانت درجة قوة الزلزال = ٨ درجات بمقياس ريختر أوجد كم مرة تعادل شدة هذا الزلزال من الشدة الابتدائية. «٦,٢ ، ١٠^٨»

٥ إذا كانت كفاءة عمل إحدى الآلات تتناقص سنويًا طبقًا للعلاقة ك = ك٠ (٠,٩)^ن حيث ك كفاءة الآلة، ك٠ الكفاءة الابتدائية للآلة، ن عدد سنوات عمل الآلة. فإذا عُلِمَ أنَّ الآلة تتوقف عن العمل إذا بلغت كفاءتها ٤٠٪ من كفاءتها الابتدائية فما عدد السنوات التى تعملها هذه الآلة قبل أنْ تتوقف عن العمل ؟ «٩ سنوات»

٦ **الربط بالصناعة :** إذا كانت كفاءة آلة تتناقص سنويًا بمعدل ٥ ٪ فإذا علم أن الآلة تتوقف عن التشغيل إذا بلغت كفاءتها ٦٠ ٪ من كفاءتها الابتدائية.

فما عدد السنوات التى تعملها هذه الآلة ؟ «١٠ سنوات»


ثانيًا
التفاضل وحساب المثلثات
الوحدة 3
النهايات والاتصال.
الوحدة 4
حساب المثلثات.



3 النهايات والاتصال

الدرس 1 مقدمة فى النهايات «تقدير النهاية عددياً وبيانياً».

الدرس 2 إيجاد نهاية الدالة جبرياً.

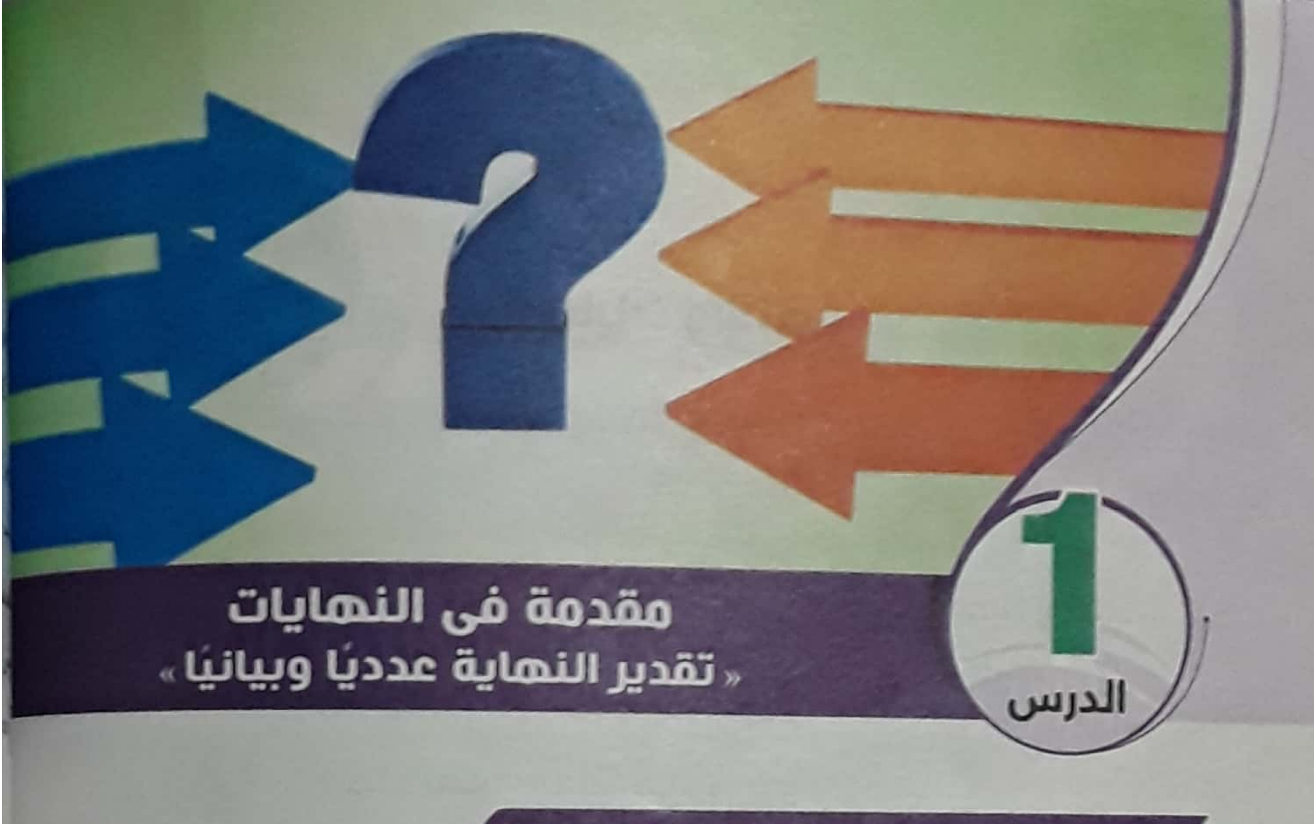
الدرس 3 نظرية (٤) «القانون».

الدرس 4 نهاية الدالة عند اللانهاية.

الدرس 5 نهايات الدوال المثلثية.

الدرس 6 بحث وجود نهاية للدالة مجزأة المجال.

الدرس 7 الاتصال.



الدرس 1

مقدمة فى النهايات
« تقدير النهاية عدديًا وبيانيًا »

الكميات المعينة وغير المعينة وغير المعرفة

عند إجراء العمليات الحسابية على ح نتعرض إلى واحدة من ثلاثة أنواع من الكميات وهى :

١ الكمية المعينة : هى الكمية التى لها ناتج محدد :

فمثلًا : $\frac{٨}{٥}$ كمية معينة أى لها ناتج محدد هو ١,٦

لأن : العدد الحقيقى الذى إذا ضرب فى ٥ كان الناتج ٨ هو ١,٦

ومن أمثلة الكميات المعينة : $\frac{٠}{٢}$ ، ٥ ± ٠ ، ٧ × ٣ ، .....

٢ الكمية غير المعينة : هى الكمية التى ليس لها جواب محدد :

فمثلًا : $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة أى لها عدد لا نهائى فى ح من الإجابات الصحيحة

لأن : حاصل ضرب أى عدد حقيقى × صفر = صفر

مع ملاحظة أنه توجد كميات أخرى غير معينة سنتعرض لها فى دراستنا لاحقًا.

٣ الكمية غير المعرفة : هى الكمية التى ليس لها معنى :

فمثلًا : $\frac{٥}{\text{صفر}}$ كمية غير معرفة أى ليس لها معنى.

لأنه : لا يوجد عدد حقيقى إذا ضرب × صفر كان الناتج = ٥

وبصفة عامة : $\frac{أ}{\text{صفر}}$ حيث أ ∈ ح − {٠} كمية غير معرفة.

الرمزان ∞ ، − ∞

- الرمز ∞ (لا نهاية) ليس عددًا حقيقيًا ولكنه يعبر عن كمية أكبر من أى عدد حقيقى موجب يمكن إدراكه.
- الرمز − ∞ (سالب لا نهاية) ليس عددًا حقيقيًا ولكنه يعبر عن كمية أصغر من أى عدد حقيقى سالب يمكن إدراكه.
- والتعامل بالرمزين ∞ ، − ∞ عند إجراء العمليات الحسابية يخضع للخواص الآتية :

بفرض أن أ عدد حقيقى فإن :

1) ∞ ± أ = ∞ ، − ∞ ± أ = − ∞

2) ∞ × أ = ∞ عندما أ > ٠ ، − ∞ عندما أ < ٠ ، كمية غير معينة عندما أ = ٠ .

، − ∞ × أ = − ∞ عندما أ > ٠ ، ∞ عندما أ < ٠ ، كمية غير معينة عندما أ = ٠ .

معلومة إثرائية

الصور غير المعينة سبع هى :

$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، ∞ − ∞ ، ∞ × صفر ، (صفر)$^{\text{صفر}}$ ، (∞)$^{\text{صفر}}$ ، (١)$^{\infty}$

فمثلًا : ∞ ± ٧ = ∞ ، − ∞ ± ٢ = − ∞

، ∞ × ١٥ = ∞ ، − ∞ × ٧ = − ∞

، ∞ + ∞ = ∞ ، − ∞ × −٢ = ∞

مفهوم نهاية الدالة عند نقطة

مثال توضيحى

إذا أردنا إيجاد قيمة الدالة د : د (س) = $\frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س} - 1}$ عند س = ١

فإننا نجد أن : د (١) = $\frac{1^2 - 1}{1 - 1}$ = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وهى كمية غير معينة

أى أننا لم نستطع تعيين قيمة للدالة عند س = ١

ولذلك نلجأ إلى دراسة اقتراب د (س) من قيمة معينة كلما اقتربت س من العدد ١

وذلك بإحدى الطريقتين التاليتين :



١ تقدير النهاية عدديًا

أعطى قيمًا للمتغير س تقترب شيئًا فشيئًا من العدد ١ من خلال قيم أكبر من ١ وقيم أصغر من ١ دون أن تأخذ س القيمة ١ وملاحظة ما يحدث لقيم د (س) المناظرة كما بالجدول التالى :

س تقترب من ١ (من اليمين) ⟵ ⟶ س تقترب من ١ (من اليسار)

س	١,٥	١,٤	١,٣	١,٢	١,١		٠,٩	٠,٨	٠,٧	٠,٦	٠,٥
د (س)	٢,٥	٢,٤	٢,٣	٢,٢	٢,١		١,٩	١,٨	١,٧	١,٦	١,٥

د (س) تقترب من ٢ (من اليمين) ⟵ ⟶ د (س) تقترب من ٢ (من اليسار)

نجد أنه :

* كلما اقتربت س من العدد ١ من جهة اليمين أى (من خلال قيم للمتغير س أكبر من ١) وتكتب رياضيًا (س ⟵ ١^+) وتقرأ «س تؤول إلى ١ من اليمين»

فإن : د (س) تقترب من العدد ٢ ويسمى العدد ٢ بالنهاية اليمنى للدالة

وتكتب رياضيًا : نهـا د (س) = ٢ (س ⟵ ١^+) ، أ د (١^+) = ٢

وتقرأ نهاية الدالة عندما (س ⟵ ١^+) تساوى ٢

* وكلما اقتربت س من العدد ١ من جهة اليسار أى (من خلال قيم للمتغير س أصغر من ١)

وتكتب رياضيًا : (س ⟵ ١^-) وتقرأ «س تؤول إلى ١ من اليسار»

فإن : د (س) تقترب من العدد ٢ ويسمى العدد ٢ بالنهاية اليسرى للدالة.

وتكتب رياضيًا : نهـا د (س) = ٢ (س ⟵ ١^-) ، أ د (١^-) = ٢

وتقرأ نهاية الدالة عندما (س ⟵ ١^-) تساوى ٢

تعريف

إذا كانت قيمة الدالة د تقترب من قيمة وحيدة ل عندما تقترب س من أ من جهتى اليمين واليسار فإن نهاية د (س) تساوى ل وتكتب رمزيًا نهـا د (س) = ل (س ⟵ أ)

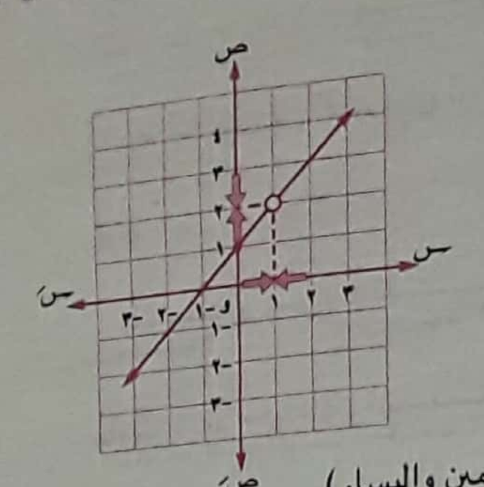
أى أنه إذا كان : د ($أ^+$) = د ($أ^-$) = ل فإن : نهـا د (س) = ل (س ⟵ أ)

ففى المثال السابق : ∵ د (١^+) = د (١^-) = ٢ ∴ نهـا د (س) = ٢ (س ⟵ ١)

٢ تقدير النهاية بيانيًا

∵ د (س) = $\frac{س^2 - ١}{س - ١}$ دالة غير معرفة عند س = ١

∴ د (س) = $\frac{(س - ١)(س + ١)}{(س - ١)}$ = س + ١



أى أنها تمثل بخط مستقيم به ثقب عند النقطة التى إحداثيها السينى = ١ كما بالشكل المقابل

ومن الرسم نلاحظ أنه : عند س $\xrightarrow{\text{تؤول إلى}}$ ١ (من اليمين واليسار)

فإن : د (س) $\xrightarrow{\text{تؤول إلى}}$ ٢ أى أن $\lim_{س \to ١}$ د (س) = ٢

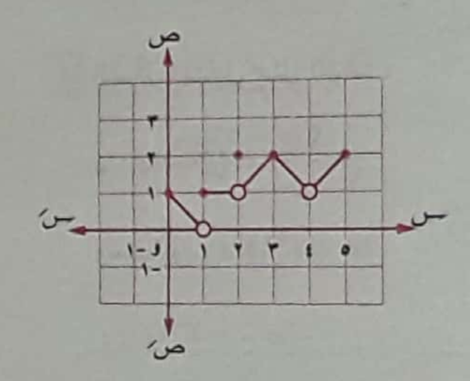
ملاحظـات

١ عند إيجاد $\lim_{س \to أ}$ د (س) ليس من الضرورى أن تكون الدالة معرفة عند س = أ ، فقط يجب أن تكون معرفة فى فترة على يسار أ وفترة أخرى على يمين أ

٢ إذا كان د ($أ^+$) ≠ د ($أ^-$) فإن : $\lim_{س \to أ}$ د (س) غير موجودة

ملاحظات هامة عند إيجاد نهاية الدالة بيانيًا :

١ فى الشكل المقابل نجد أن :



أولًا : عند س = صفر :

$\lim_{س \to ٠^+}$ د (س) = ١ ، $\lim_{س \to ٠^-}$ د (س)

، $\lim_{س \to ٠}$ د (س) غير موجودة

[لأن الدالة غير معرفة على يسار س = صفر]

ثانيًا : عند س = ١ : $\lim_{س \to ١^+}$ د (س) = ٠ ، $\lim_{س \to ١^-}$ د (س) = ١

∴ $\lim_{س \to ١}$ د (س) غير موجودة

[لأن النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى]

لاحظ أنه : بالرغم من أن د معرفة عند س = ١ «د (١) = ١» إلا أن النهاية غير موجودة



ثالثًا : عند س = ٢ : $\underset{س \leftarrow ٢^-}{\text{نهــا}}$ د (س) = $\underset{س \leftarrow ٢^+}{\text{نهــا}}$ د (س) = $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ د (س) = ١

[لاحظ أنه ليس من الضرورى أن قيمة الدالة تساوى قيمة النهاية حيث د (٢) = ٢]

رابعًا : عند س = ٣ :

$\underset{س \leftarrow ٣^-}{\text{نهــا}}$ د (س) = $\underset{س \leftarrow ٣^+}{\text{نهــا}}$ د (س) = $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهــا}}$ د (س) = د (٣) = ٢

خامسًا : عند س = ٤ : $\underset{س \leftarrow ٤^-}{\text{نهــا}}$ د (س) = $\underset{س \leftarrow ٤^+}{\text{نهــا}}$ د (س) = $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهــا}}$ د (س) = ١

[لاحظ أن د (٤) غير معرفة أى أن النهاية موجودة على الرغم من أن الدالة غير معرفة]

سادسًا : عند س = ٥ : $\underset{س \leftarrow ٥^-}{\text{نهــا}}$ د (س) = ٢

، $\underset{س \leftarrow ٥^+}{\text{نهــا}}$ د (س) ، $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهــا}}$ د (س) غير موجودتين

[لأن الدالة غير معرفة على يمين س = ٥]

ملاحظة

من الرسم البيانى للدالة فى الشكل السابق نجد أن :

* النقطة التى تمثل بفجوة لا تؤثر فى وجود نهاية عندها كما فى **ثالثًا** و**خامسًا**.
* النقطة التى عندها قفزة تؤدى إلى عدم وجود نهاية كما فى **ثانيًا**.

٢ الشكل المقابل يمثل الدالة :

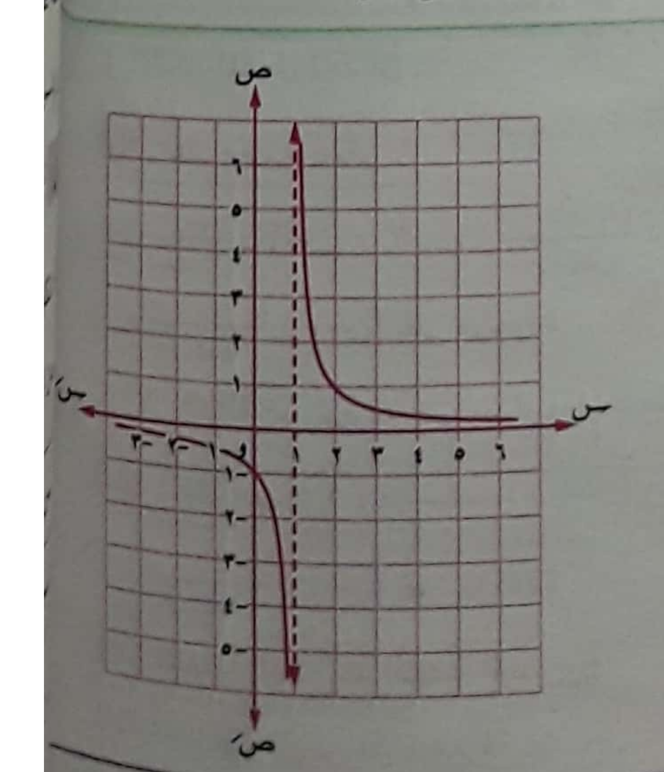
د : د (س) = $\frac{١}{س - ١}$

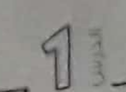
ونجد أن : د (١^+) = ∞

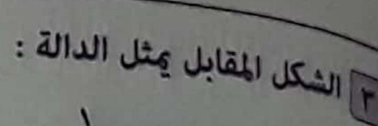
، د (١^-) = − ∞

∴ د (١^+) ≠ د (١^-)

∴ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}}$ د (س) غير موجودة







٣ الشكل المقابل يمثل الدالة :

د : د (س) = $\frac{١}{(س - ١)^{٢}}$

ونجد أن : د (١^{+}) = ∞

، د (١^{-}) = ∞

، $\lim_{س \to ١}$ د (س) = ∞



مثال ١

قدّر : $\lim_{س \to ٤}$ (٥ - ٢ س) بيانيًا وعدديًا

الحـل

* **بيانيًا :** نمثل الدالة الخطية د : د (س) = ٥ - ٢ س

كما بالشكل المقابل :

نلاحظ أنه عندما س ← ٤

فإن : د (س) ← -٣

أى أن $\lim_{س \to ٤}$ (٥ - ٢ س) = -٣

* **عدديًا :** نكون جدولاً لقيم د (س) وذلك باختيار قيم س

تقترب من العدد ٤ من اليمين واليسار كما يلى :

س	٤,١	٤,٠١	٤,٠٠١	....	٤	....	٣,٩٩٩	٣,٩٩	٣,٩
د (س)	-٣,٢	-٣,٠٢	-٣,٠٠٢	....	-٣	....	-٢,٩٩٨	-٢,٩٨	-٢,٨

نلاحظ من الجدول أنه كلما تقترب س من العدد ٤ من اليمين أو اليسار

فإن : قيم د (س) تقترب من العدد -٣ ∴ $\lim_{س \to ٤}$ (٥ - ٢ س) = -٣

مثال ٢

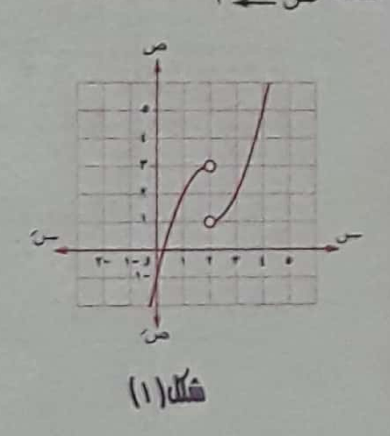
ادرس كلًا من الأشكال الآتية ثم أوجد قيمة :

١ د (٢)

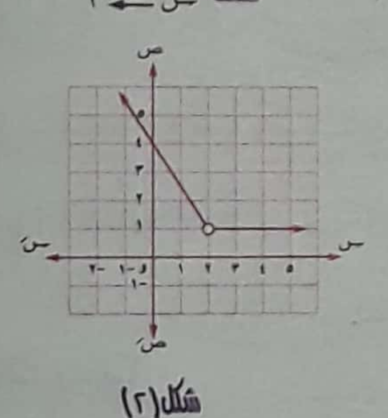
٢ نهـــا $_{س \leftarrow ٢^{+}}$ د (س)

٣ نهـــا $_{س \leftarrow ٢^{-}}$ د (س)

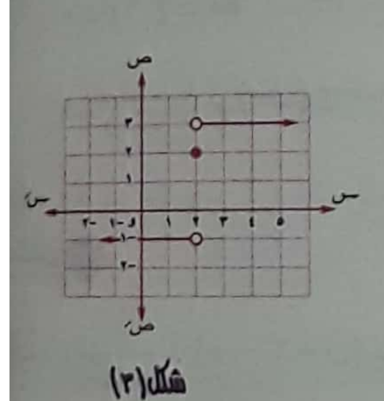
٤ نهـــا $_{س \leftarrow ٢}$ د (س)



شكل(١)



شكل(٢)



شكل(٣)

الحـــل

في شكل(١) : د (٢) غير معرفة

، نهـــا $_{س \leftarrow ٢^{+}}$ د (س) = ١

، نهـــا $_{س \leftarrow ٢^{-}}$ د (س) = ٣

، نهـــا $_{س \leftarrow ٢}$ د (س) غير موجودة

في شكل(٢) : د (٢) غير معرفة

، نهـــا $_{س \leftarrow ٢^{+}}$ د (س) = ١

، نهـــا $_{س \leftarrow ٢^{-}}$ د (س) = ١

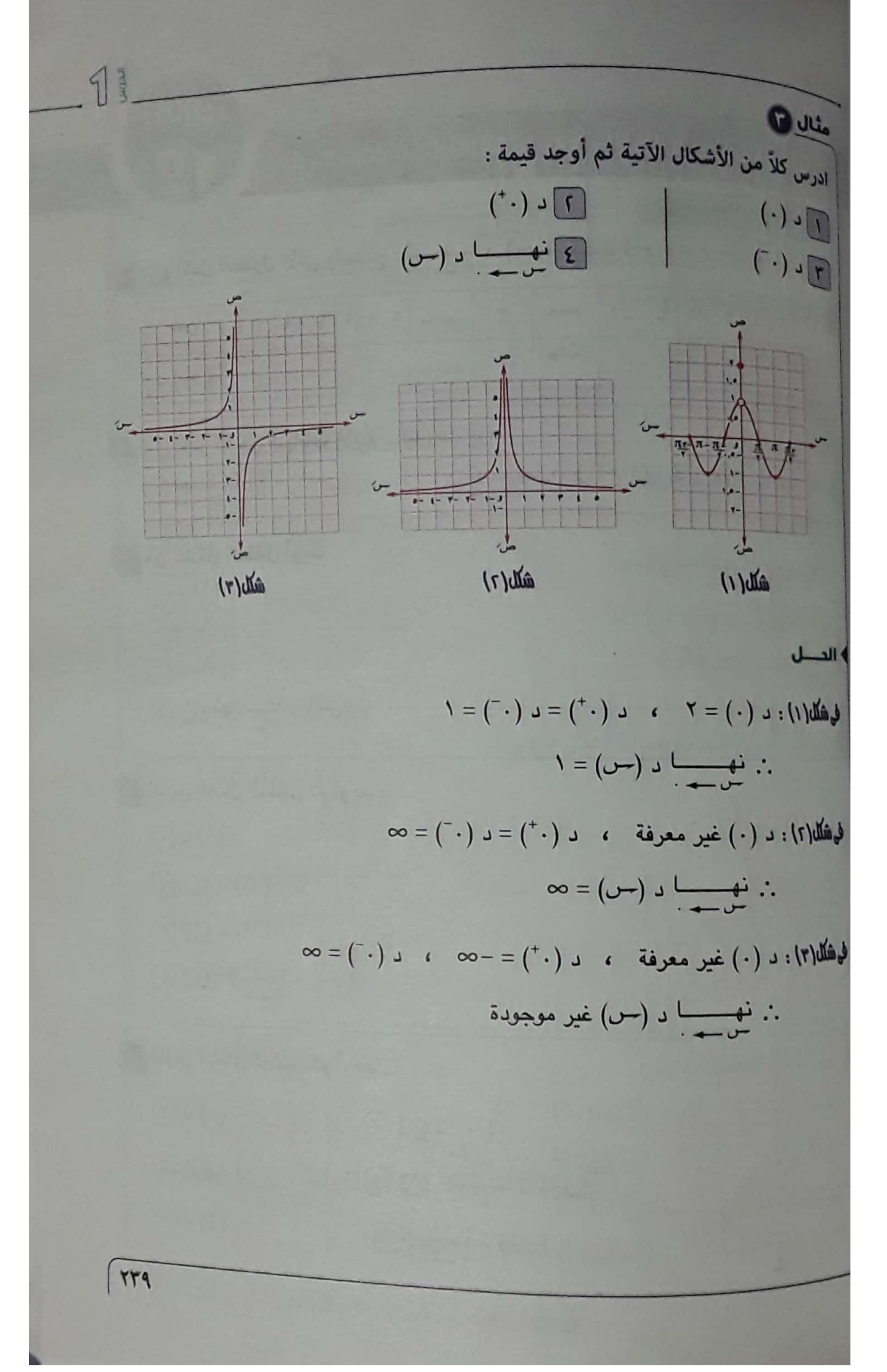
، نهـــا $_{س \leftarrow ٢}$ د (س) = ١

في شكل(٣) : د (٢) = ٢

، نهـــا $_{س \leftarrow ٢^{+}}$ د (س) = ٣

، نهـــا $_{س \leftarrow ٢^{-}}$ د (س) = −١

، نهـــا $_{س \leftarrow ٢}$ د (س) غير موجودة



مثال ٣

ادرس كلاً من الأشكال الآتية ثم أوجد قيمة :

١ د (٠) | ٢ د (٠^+)

٣ د (٠^-) | ٤ نهــــا$_{س \to ٠}$ د (س)

شكل(١) شكل(٢) شكل(٣)

الحــل

في شكل(١) : د (٠) = ٢ ، د (٠^+) = د (٠^-) = ١

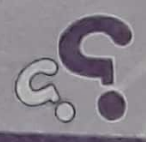
∴ نهــــا$_{س \to ٠}$ د (س) = ١

في شكل(٢) : د (٠) غير معرفة ، د (٠^+) = د (٠^-) = ∞

∴ نهــــا$_{س \to ٠}$ د (س) = ∞

في شكل(٣) : د (٠) غير معرفة ، د (٠^+) = −∞ ، د (٠^-) = ∞

∴ نهــــا$_{س \to ٠}$ د (س) غير موجودة



تمارين 12

على مقدمة فى النهايات «تقدير النهاية عدديًا وبيانيًا»

من أسئلة الكتاب المدرس

١ أكمل الجدول الآتى واستنتج : نهــــا (س ← ٢) د (س) حيث د (س) = ٥ س + ٤

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د (س)	....	....	....	←	؟	→	....	....	....

٢ قدِّر كلًا من النهايات الآتية بيانيًا وعدديًا :

① نهــــا (س ← ٢) (١ – ٣ س) | ② نهــــا (س ← ٠) (س^{٢} – ٢)

٣ من الشكل المقابل أوجد :

① د (١)

② د (١^{+})

③ د (١^{-})

④ نهــــا (س ← ١) د (س)

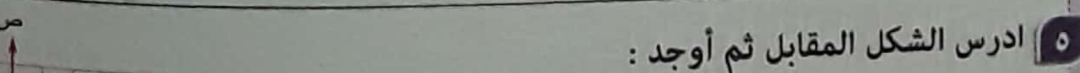
٤ ادرس الشكل المقابل ثم أوجد :

① د (١)

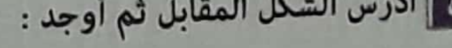
② د (١^{-})

③ د (١^{+})

④ نهــــا (س ← ١) د (س)

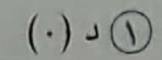


٥ ادرس الشكل المقابل ثم أوجد :



① د (٠)

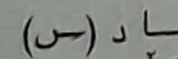
② د (٠^{-})



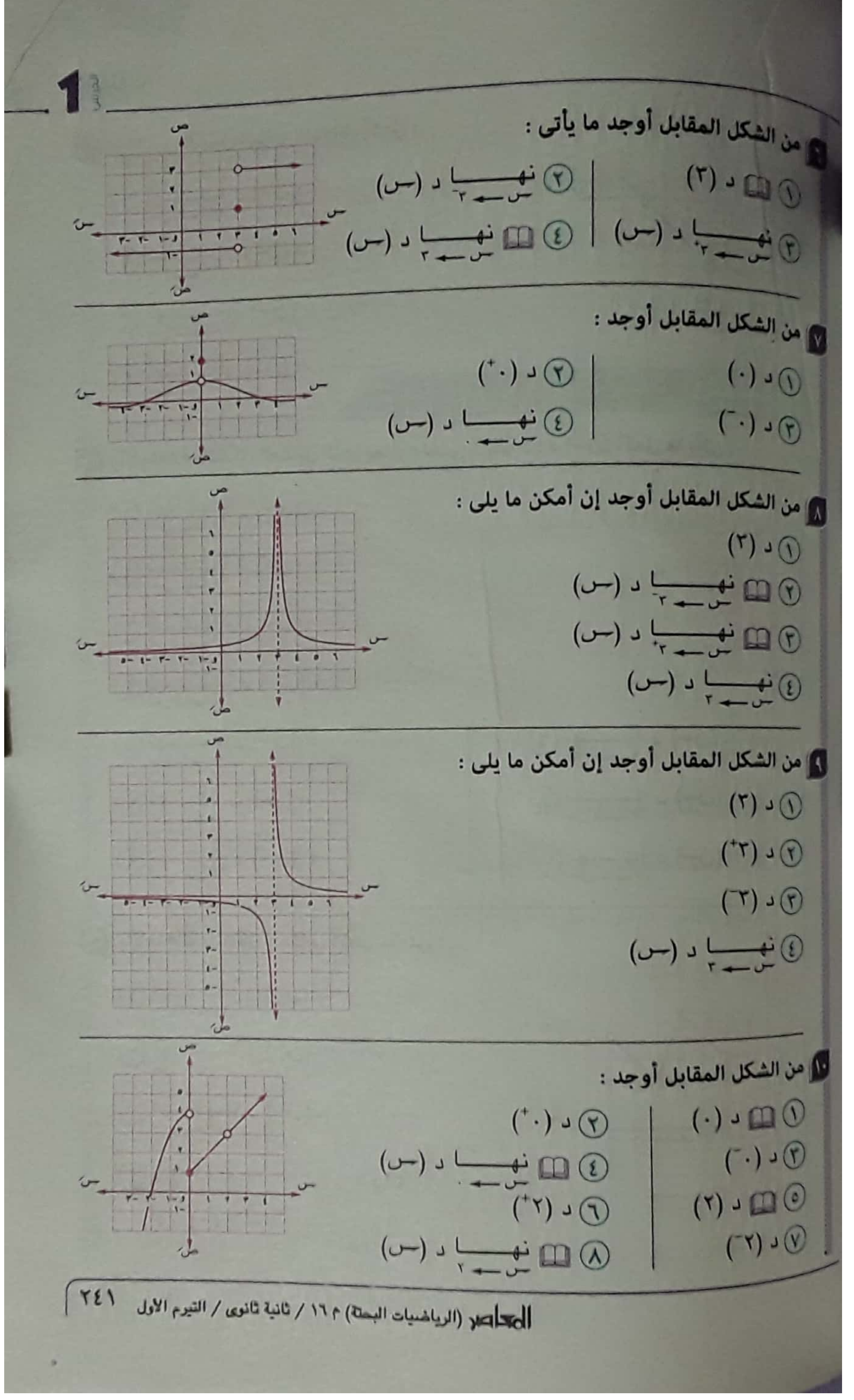
③ د (٠^{+})

④ نهــــا (س ← ٠) د (س)

⑤ د (٢)



⑥ نهــــا (س ← ٢) د (س)



٦ من الشكل المقابل أوجد ما يأتى :

① د(٣) ② نهـــا$_{س \to ٣^-}$ د(س)

③ نهـــا$_{س \to ٣^+}$ د(س) ④ نهـــا$_{س \to ٣}$ د(س)

٧ من الشكل المقابل أوجد :

① د(٠) ② د(٠^+)

③ د(٠^-) ④ نهـــا$_{س \to ٠}$ د(س)

٨ من الشكل المقابل أوجد إن أمكن ما يلى :

① د(٣)

② نهـــا$_{س \to ٣^-}$ د(س)

③ نهـــا$_{س \to ٣^+}$ د(س)

④ نهـــا$_{س \to ٣}$ د(س)

٩ من الشكل المقابل أوجد إن أمكن ما يلى :

① د(٣)

② د(٣^+)

③ د(٣^-)

④ نهـــا$_{س \to ٣}$ د(س)

١٠ من الشكل المقابل أوجد :

① د(٠) ② د(٠^+)

③ د(٠^-) ④ نهـــا$_{س \to ٠}$ د(س)

⑤ د(٢) ⑥ د(٢^+)

⑦ د(٢^-) ⑧ نهـــا$_{س \to ٢}$ د(س)

١١ من الشكل البيانى المقابل أكمل :

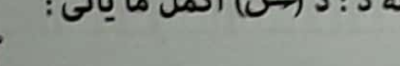
① $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهــا}}$ د (س) = ...

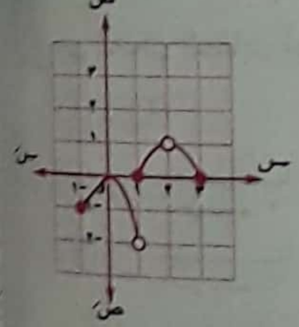
② $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}}$ د (س) = ...

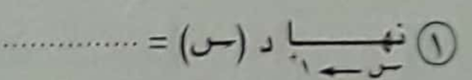
③ $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهــا}}$ د (س) = ...

④ $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهــا}}$ د (س) = ...

١٢ بالاستعانة بالشكل المقابل الذى يمثل منحنى الدالة د : د (س) أكمل ما يأتى :







① $\underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نهــا}}$ د (س) = ...

② $\underset{س \leftarrow ١^{-}}{\text{نهــا}}$ د (س) = ...

③ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}}$ د (س) = ...

④ $\underset{س \leftarrow -١^{+}}{\text{نهــا}}$ د (س) = ...

⑤ $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهــا}}$ د (س) = ...

⑥ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ د (س) = ...

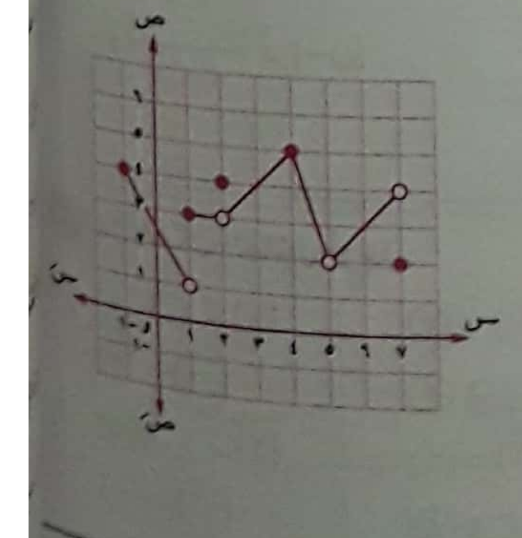
⑦ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}}$ د (س) = ...

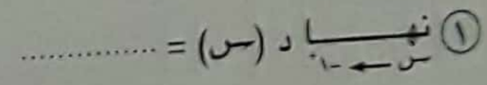
⑧ $\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهــا}}$ د (س) = ...

⑨ $\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهــا}}$ د (س) = ...

⑩ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ د (س) = ...

١٣ بالاستعانة بالشكل المقابل أكمل ما يلى :



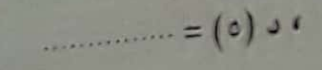


① $\underset{س \leftarrow -١^{+}}{\text{نهــا}}$ د (س) = ...

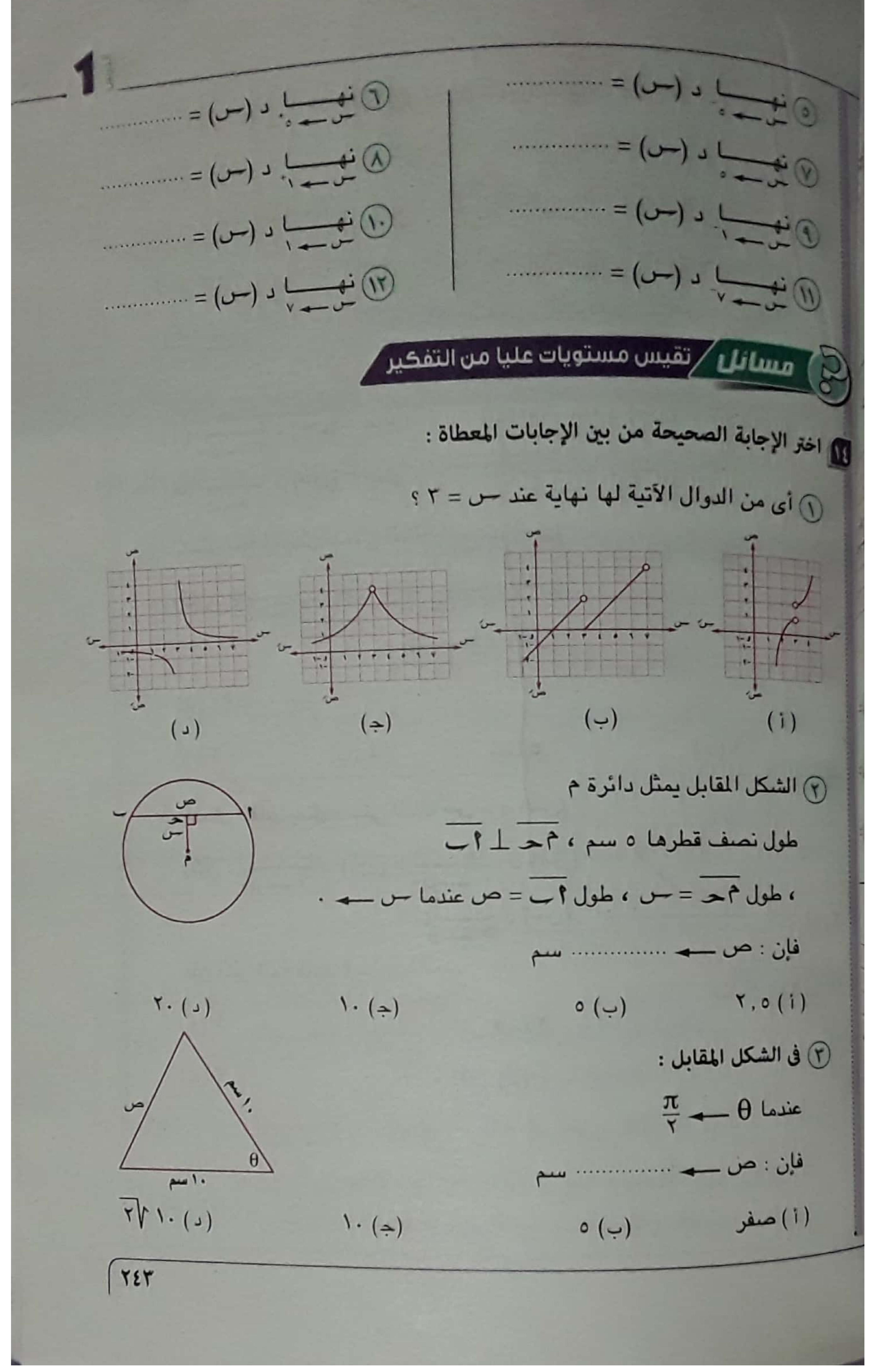
② $\underset{س \leftarrow -١^{-}}{\text{نهــا}}$ د (س) = ...

③ $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهــا}}$ د (س) = ...

④ د (-١) = ... ، د (٢) = ...



، د (٥) = ...



⑤ $\underset{س \leftarrow ٠^{-}}{\text{نهـا}}$ د(س) = ...

⑥ $\underset{س \leftarrow ٠^{+}}{\text{نهـا}}$ د(س) = ...

⑦ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ د(س) = ...

⑧ $\underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}}$ د(س) = ...

⑨ $\underset{س \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}}$ د(س) = ...

⑩ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ د(س) = ...

⑪ $\underset{س \leftarrow ٧^{-}}{\text{نهـا}}$ د(س) = ...

⑫ $\underset{س \leftarrow ٧}{\text{نهـا}}$ د(س) = ...

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

١٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① أى من الدوال الآتية لها نهاية عند س = ٣ ؟

(أ) (ب) (جـ) (د)

② الشكل المقابل يمثل دائرة م

طول نصف قطرها ٥ سم ، $\overline{مجـ} \perp \overline{أب}$

، طول $\overline{مجـ}$ = س ، طول $\overline{أب}$ = ص عندما س ← ٠

فإن : ص ← .... سم

(أ) ٢,٥ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

③ فى الشكل المقابل :

عندما $\theta \leftarrow \frac{\pi}{٢}$

فإن : ص ← .... سم

(أ) صفر (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) $١٠\sqrt{٢}$

④ إذا قطع منحنى الدالة د الكثيرة الحدود محور السينات عند س = ٣

فإن : ....

(أ) $\lim\limits_{س \to ٢}$ د (س) = صفر (ب) $\lim\limits_{س \to ٠}$ د (س) = ٣

(جـ) $\lim\limits_{س \to ٠}$ د (س) = صفر (د) $\lim\limits_{س \to ٢}$ د (س) = ٣

⑤ إذا قطع منحنى الدالة د الكثيرة الحدود محور الصادات عند ص = ٣

فإن : ....

(أ) $\lim\limits_{س \to ٢}$ د (س) = صفر (ب) $\lim\limits_{س \to ٢}$ د (س) = ٣

(جـ) $\lim\limits_{س \to ٠}$ د (س) = صفر (د) $\lim\limits_{س \to ٠}$ د (س) = ٣

⑥ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة ص = د (س)

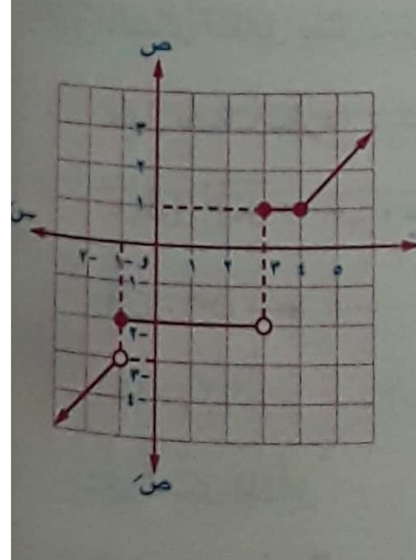
وكان : $\lim\limits_{س \to ٠}$ د (س) = $\lim\limits_{س \to -١^{+}}$ د (س)

+ $\lim\limits_{س \to ٢^{-}}$ د (س)

فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

⑦ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة ص = د (س)



وكان : $\lim\limits_{س \to أ^{-}}$ د (س) = $\lim\limits_{س \to -١^{-}}$ د (س)

+ $\lim\limits_{س \to ٢^{+}}$ د (س)

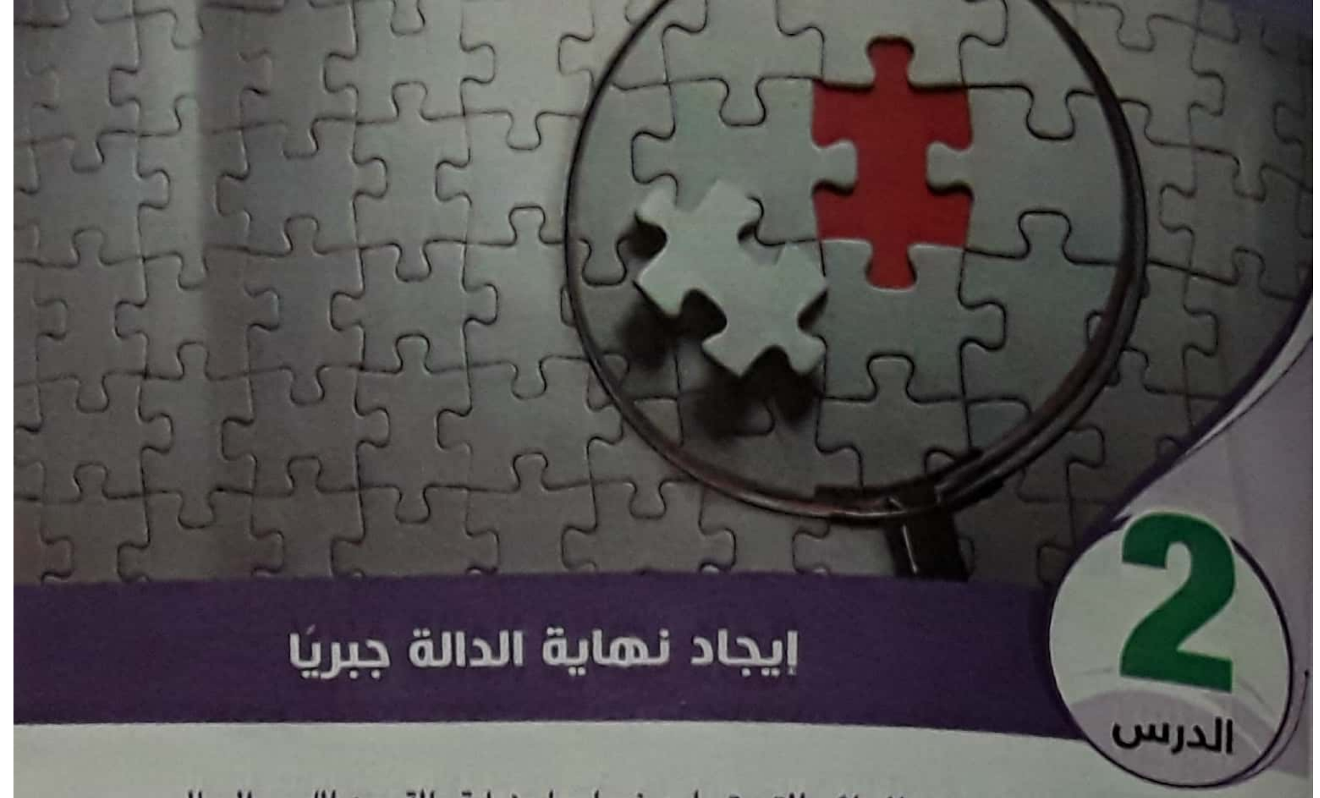
فإن أكبر قيمة للعدد أ = ...

(أ) ١

(ب) ٢

(جـ) ٣

(د) ٤



الدرس 2

إيجاد نهاية الدالة جبريًا

سنعرض الآن بعض النظريات والنتائج التى تساعد فى إيجاد نهاية دالة دون اللجوء إلى الرسم البيانى أو دراسة قيم الدالة.

نظرية 1 نهاية الدالة كثيرة الحدود

إذا كانت : د (س) كثيرة حدود فى المتغير س فإن : $\lim_{س \to أ}$ د (س) = د (أ)

فمثلًا : $\lim_{س \to ٢}$ (٢ س + ٥) = د (٢) = ٢ × ٢ + ٥ = ٩

، $\lim_{س \to ١}$ (س^{٢} − ٣ س + ٢) = د (١) = ١ − ٣ + ٢ = ٠

نتيجة

نهاية الدالة الثابتة

إذا كانت : د (س) = ك حيث ك ثابت فإن : $\lim_{س \to أ}$ د (س) = $\lim_{س \to أ}$ ك = ك

فمثلًا : $\lim_{س \to ٣}$ ٤ = ٤ ، $\lim_{س \to -١}$ −٥ = −٥

نظرية 2

إذا كانت د ، ر دالتين فى المتغير س وكانت : $\lim_{س \to أ}$ د (س) = ل

، $\lim_{س \to أ}$ ر (س) = م حيث ل ، م ∈ ح فإن :

1. $\lim_{س \to أ}$ [د (س) ± ر (س)] = $\lim_{س \to أ}$ د (س) ± $\lim_{س \to أ}$ ر (س) = ل ± م

اى ان نهاية المجموع الجبرى لدالتين = المجموع الجبرى لنهايتيهما

ويمكن تعميم ذلك بالنسبة للمجموع الجبرى لعدد منته من الدوال.

٢ $\lim_{س \to ا} [د(س) \times ر(س)] = \lim_{س \to ا} د(س) \times \lim_{س \to ا} ر(س) = ل \times م$

أى أن نهاية حاصل ضرب دالتين = حاصل ضرب نهايتيهما

ويمكن تعميم ذلك بالنسبة لحاصل ضرب عدد منته من الدوال.

٣ $\lim_{س \to ا} ك \times د(س) = ك \times \lim_{س \to ا} د(س) = ك \times ل$ حيث ك مقدار ثابت.

أى أن نهاية حاصل ضرب ثابت × دالة = الثابت × نهاية هذه الدالة.

٤ $\lim_{س \to ا} \frac{د(س)}{ر(س)} = \frac{ل}{م}$ بشرط أن $م \neq ٠$

أى أن

نهاية خارج قسمة دالتين = خارج قسمة نهايتيهما بشرط ألا تكون نهاية المقسوم عليه = ٠

ويمكن تعميم ذلك بالنسبة لحاصل ضرب عدد منته من الدوال مقسومًا على حاصل ضرب عدد منته من الدوال بشرط أن أيًا من نهايات المقسوم عليه لا يساوى الصفر.

٥ $\lim_{س \to ا} [د(س)]^{ن} = [\lim_{س \to ا} د(س)]^{ن} = ل^{ن}$ ، $ن \in ص^{+}$

مثال ١

أوجد كلاً من النهايات الآتية :

١ $\lim_{س \to ٠} س^٢ + ٣س - ٢ + \frac{٢س}{س - ١}$

٢ $\lim_{س \to -٢} (س^٢ + ٣)(س^٣ - ٢س^٢ + ٤س - ١)$

٣ $\lim_{س \to ١} \frac{(٢س^٢ - ٥س + ٦)(س + ١)}{(س^٢ + ٢)(٣س - ١)}$

الحل

١ $\lim_{س \to ٠} س^٢ + ٣س - ٢ + \frac{٢س}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ٠} (س^٢ + ٣س - ٢) + \lim_{س \to ٠} \frac{٢س}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ٠} (س^٢ + ٣س - ٢) + \frac{\lim_{س \to ٠} ٢س}{\lim_{س \to ٠} س - ١} = -٢ + \frac{٠}{-١} = -٢$

$\underset{س \to -١}{\text{نهـــا}}$ (س^٢ + ٣) (س^٣ − ٢ س^٢ + ٤ س − ١)

= $\underset{س \to -١}{\text{نهـــا}}$ (س^٢ + ٣) × $\underset{س \to -١}{\text{نهـــا}}$ (س^٣ − ٢ س^٢ + ٤ س − ١)

= (٤ + ٣) (−٨ − ٨ − ٨ − ١) = ٧ × −٢٥ = −١٧٥

$\underset{س \to ١}{\text{نهـــا}}$ $\frac{(٢ س^٢ - ٥ س + ٦) (س + ١)}{(س^٢ + ٢) (٣ س - ١)}$

= $\frac{\underset{س \to ١}{\text{نهـــا}} (٢ س^٢ - ٥ س + ٦) \times \underset{س \to ١}{\text{نهـــا}} (س + ١)}{\underset{س \to ١}{\text{نهـــا}} (س^٢ + ٢) \times \underset{س \to ١}{\text{نهـــا}} (٣ س - ١)}$ = $\frac{(٢ - ٥ + ٦) (١ + ١)}{(١ + ٢) (٣ - ١)}$

= $\frac{٣ \times ٢}{٣ \times ٢}$ = ١

يمكنك حل المثال السابق مباشرة باستخدام التعويض المباشر دون تقسيم النهايات.

ملاحظـة

يمكن استخدام التعويض المباشر وتكون $\underset{س \to أ}{\text{نهـــا}}$ د (س) = د (أ)

إذا كانت الدالة د كثيرة حدود أو دالة كسرية مقامها ≠ صفر عند التعويض عن س = أ

نظرية / ٣

إذا كانت : د ، ق دالتين فى المتغير س وكانت :

د (س) = ق (س) لجميع قيم س ∈ ح − {أ}

وكانت : $\underset{س \to أ}{\text{نهـــا}}$ ق (س) = ل فإن : $\underset{س \to أ}{\text{نهـــا}}$ د (س) = ل

استخدام النظرية السابقة :

تستخدم هذه النظرية لإيجاد نهاية دالة كسرية جبرية

(أى نهاية كسر كل من بسطه ومقامه عبارة عن دالة كثيرة حدود)

ولكن د (س) عندما س ← أ وذلك عندما تكون

د (أ) = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وهذا معناه أن (س − أ)

يكون عاملًا مشتركًا بين البسط والمقام.

لاحـظ أن

س ← أ تعنى أن

(س − أ) ← صفر

أى أن (س − أ) ≠ صفر

ولهذا السبب تم الاختصار



ولإيجاد $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ د (س) فى هذه الحالة فإننا نختصر العامل (س − أ) وذلك عن طريق التحليل أو القسمة المطولة فنحصل على دالة جديدة ولتكن ى (س) تكون مساوية للدالة د (س) عندما س ≠ أ فتكون $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ د (س) = $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ ى (س) والمثال التالى يوضح ذلك.

مثال ٢

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $\underset{س \leftarrow ٤}{نهـا} \frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤}$

٢ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٥ س + ٦}$

٣ $\underset{س \leftarrow -١}{نهـا} \frac{(٢ س + ٣)^٢ - ١}{س^٢ + س}$

الحل

١ بفرض د (س) = $\frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤}$ ∴ د (٤) = $\frac{٤^٢ - ١٦}{٤ - ٤} = \frac{صفر}{صفر}$

∴ $\underset{س \leftarrow ٤}{نهـا} \frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤} = \underset{س \leftarrow ٤}{نهـا} \frac{(س - ٤)(س + ٤)}{س - ٤}$

$= \underset{س \leftarrow ٤}{نهـا} (س + ٤) = ٤ + ٤ = ٨$

٢ بفرض د (س) = $\frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٥ س + ٦}$ ∴ د (٢) = $\frac{٢^٣ - ٨}{٢^٢ - ٥ (٢) + ٦} = \frac{صفر}{صفر}$

∴ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٥ س + ٦} = \underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢ س + ٤)}{(س - ٢)(س - ٣)}$

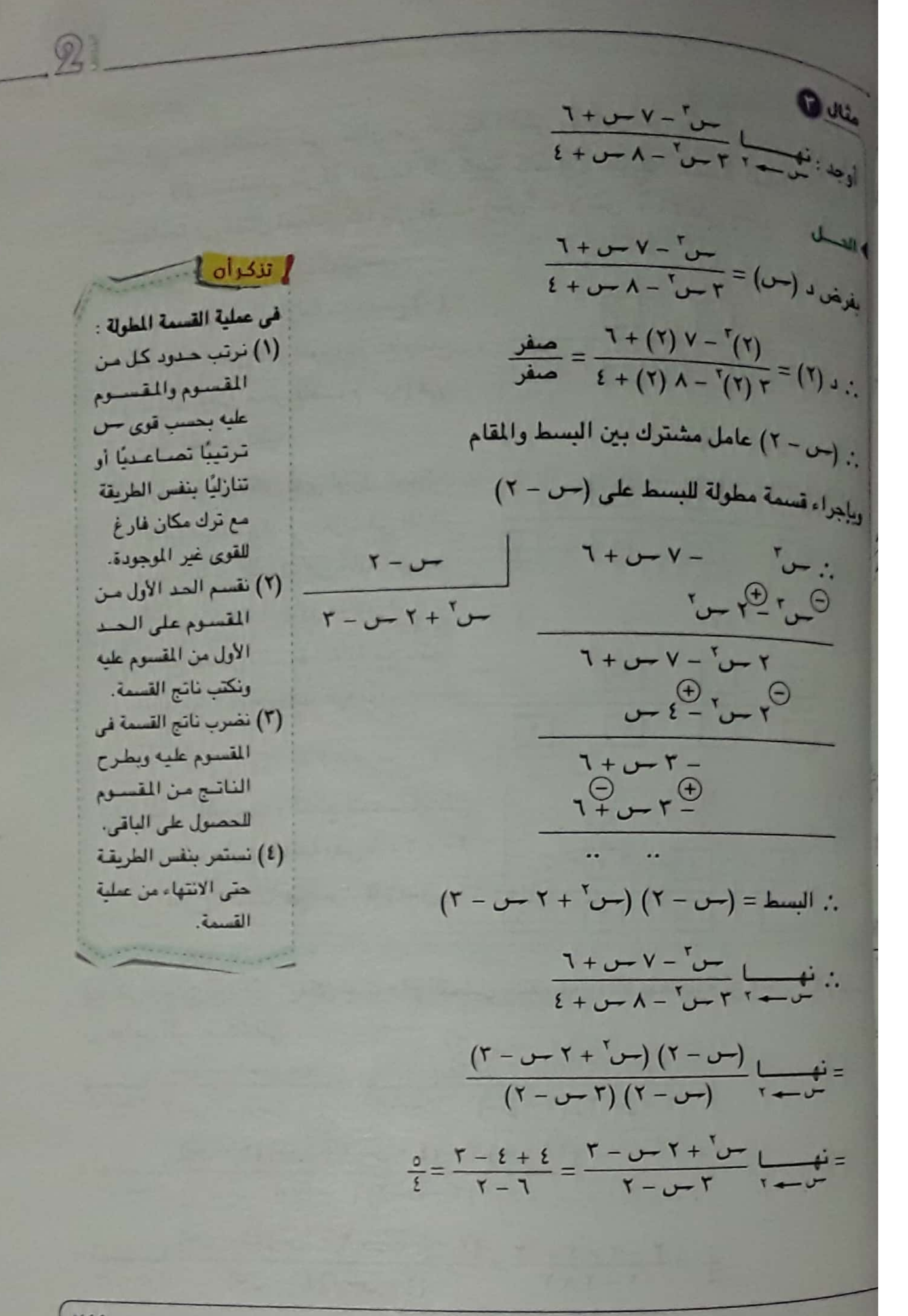
$= \underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{س^٢ + ٢ س + ٤}{س - ٣} = \frac{٢^٢ + ٢ (٢) + ٤}{٢ - ٣} = -١٢$

٣ بفرض د (س) = $\frac{(٢ س + ٣)^٢ - ١}{س^٢ + س}$ ∴ د (−١) = $\frac{(-٢ + ٣)^٢ - ١}{(-١)^٢ - ١} = \frac{صفر}{صفر}$

∴ $\underset{س \leftarrow -١}{نهـا} \frac{(٢ س + ٣)^٢ - ١}{س^٢ + س} = \underset{س \leftarrow -١}{نهـا} \frac{(٢ س + ٣ - ١)(٢ س + ٣ + ١)}{س (س + ١)}$

$= \underset{س \leftarrow -١}{نهـا} \frac{(٢ س + ٢)(٢ س + ٤)}{س (س + ١)} = \underset{س \leftarrow -١}{نهـا} \frac{٢ (س + ١) \times ٢ (س + ٢)}{س (س + ١)}$

$= \underset{س \leftarrow -١}{نهـا} \frac{٤ (س + ٢)}{س} = \frac{٤ (-١ + ٢)}{-١} = -٤$



مثال ٣

أوجد : $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣} - ٧\,\text{س} + ٦}{٣\,\text{س}^{٢} - ٨\,\text{س} + ٤}$

الحل

بفرض $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٣} - ٧\,\text{س} + ٦}{٣\,\text{س}^{٢} - ٨\,\text{س} + ٤}$

$\therefore \text{د}(٢) = \dfrac{(٢)^{٣} - ٧\,(٢) + ٦}{٣\,(٢)^{٢} - ٨\,(٢) + ٤} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

∴ (س − ٢) عامل مشترك بين البسط والمقام

وبإجراء قسمة مطولة للبسط على (س − ٢)

المقسوم	المقسوم عليه / الناتج
$\text{س}^{٣} \quad - ٧\,\text{س} + ٦$	$\text{س} - ٢$
$\ominus\text{س}^{٣} \oplus ٢\,\text{س}^{٢}$	$\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} - ٣$
$٢\,\text{س}^{٢} - ٧\,\text{س} + ٦$	
$\ominus ٢\,\text{س}^{٢} \oplus ٤\,\text{س}$	
$- ٣\,\text{س} + ٦$	
$\oplus ٣\,\text{س} \ominus ٦$	
.. ..	

∴ البسط = $(\text{س} - ٢)\,(\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} - ٣)$

$\therefore \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣} - ٧\,\text{س} + ٦}{٣\,\text{س}^{٢} - ٨\,\text{س} + ٤}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} - ٢)\,(\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} - ٣)}{(\text{س} - ٢)\,(٣\,\text{س} - ٢)}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} - ٣}{٣\,\text{س} - ٢} = \dfrac{٤ + ٤ - ٣}{٦ - ٢} = \dfrac{٥}{٤}$

تذكر أن

في عملية القسمة المطولة :

(١) نرتب حدود كل من المقسوم والمقسوم عليه بحسب قوى س ترتيبًا تصاعديًا أو تنازليًا بنفس الطريقة مع ترك مكان فارغ للقوى غير الموجودة.

(٢) نقسم الحد الأول من المقسوم على الحد الأول من المقسوم عليه ونكتب ناتج القسمة.

(٣) نضرب ناتج القسمة في المقسوم عليه ونطرح الناتج من المقسوم للحصول على الباقي.

(٤) نستمر بنفس الطريقة حتى الانتهاء من عملية القسمة.

ملاحظة

يمكن فى حالة القسمة على مقدار من الدرجة الأولى ومعامل س = ١ أى على الصورة (س − أ) استخدام طريقة القسمة التركيبية كتسهيل لطريقة القسمة المطولة ويمكن استخدامها فى المثال السابق كما يلى لقسمة (س٣ − ٧ س + ٦) على (س − ٢)

١ نرتب المعاملات حسب قوى س التصاعدية أو التنازلية مع وضع (٠) كمعامل للقوى غير الموجودة مع وضع الـ ٢ (وهى صفر المقسوم عليه) فى خانة المقسوم عليه.

٢	٦	−٧	٠	١
	☐	☐	☐	
	☐	☐	☐	☐

٢ يترك معامل أكبر قوى لينزل للصف الثالث مباشـــرة ثم يضرب فى الـ ٢ ونضع ناتج الضرب فى خانة الصف الثانى بالعمود المجاور مباشرة.

٢	٦	−٧	٠	١
	☐	☐	٢	
	☐	☐	☐	١

٣ اجمع معامل القـــوة التالية مع ناتج الضرب الذى حصلت عليه توًا.

٢	٦	−٧	٠	١
	☐	☐	٢	
	☐	☐	٢	١

٤ كـــرر الضـــرب والجمع لتحصـــل على معاملات خارج القسمة وهى ١ ، ٢ ، −٣

٢	٦	−٧	٠	١
	−٦	٤	٢	
	٠	−٣	٢	١

∴ خارج القسمة هو $س^{٢} + ٢ س − ٣$

حل آخر للمثال السابق : يمكن استخدام التحليل بالتقسيم وذلك بمعلومية أن (س − ٢) عامل من عوامل البسط كالتالى.

$$نهـا_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٣} − ٧ س + ٦}{٣ س^{٢} − ٨ س + ٤} = نهـا_{س \leftarrow ٢} \frac{(س^{٣} − ٨) + (−٧ س + ١٤)}{(س − ٢)(٣ س − ٢)}$$

$$= نهـا_{س \leftarrow ٢} \frac{(س − ٢)(س^{٢} + ٢ س + ٤) − ٧ (س − ٢)}{(س − ٢)(٣ س − ٢)}$$

$$= نهـا_{س \leftarrow ٢} \frac{\cancel{(س − ٢)}(س^{٢} + ٢ س + ٤ − ٧)}{\cancel{(س − ٢)}(٣ س − ٢)} = \frac{٢^{٢} + ٢ \times ٢ − ٣}{٣ \times ٢ − ٢} = \frac{٥}{٤}$$

ملاحظـــة هامة

فى حالة وجود فرق بين جذرين تربيعيين لمقدارين جبريين (فى البسط أ، فى المقام أ، فى كليهما) فإننا نضرب كلاً من البسط والمقام فى مرافق (البسط أ، المقام أ، كليهما) وذلك عندما تكون نتيجة التعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ والمثال التالى يوضح ذلك.

مثال ٤

أوجد كلاً مما يأتى : ١ $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س}}{\sqrt{\text{س} + ٩} - ٣}$ ٢ $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\sqrt{٤ + \text{س}} - ٢}{\sqrt{٩ + \text{س}} - \sqrt{٩ - \text{س}}}$

الحــل

بالتعويض عن س = ٠ فى كل من الدالتين السابقتين سنجد أن قيمة كل منهما = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

١ $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س}}{\sqrt{\text{س} + ٩} - ٣} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س}}{\sqrt{\text{س} + ٩} - ٣} \times \frac{\sqrt{\text{س} + ٩} + ٣}{\sqrt{\text{س} + ٩} + ٣}$

(وذلك بالضرب بسطًا ومقامًا فى مرافق المقام)

$$= \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{س}(\text{س} + ٢)\left(\sqrt{\text{س} + ٩} + ٣\right)}{(\text{س} + ٩) - ٩}$$

$$= \lim\limits_{\text{س} \to ٠} (\text{س} + ٢)\left(\sqrt{\text{س} + ٩} + ٣\right) = (٠ + ٢)\left(\sqrt{٠ + ٩} + ٣\right) = ١٢$$

٢ $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\sqrt{٤ + \text{س}} - ٢}{\sqrt{٩ + \text{س}} - \sqrt{٩ - \text{س}}}$

$$= \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\left(\sqrt{٤ + \text{س}} - ٢\right)\left(\sqrt{٤ + \text{س}} + ٢\right)\left(\sqrt{٩ + \text{س}} + \sqrt{٩ - \text{س}}\right)}{\left(\sqrt{٩ + \text{س}} - \sqrt{٩ - \text{س}}\right)\left(\sqrt{٩ + \text{س}} + \sqrt{٩ - \text{س}}\right)\left(\sqrt{٤ + \text{س}} + ٢\right)}$$

(وذلك بالضرب بسطًا ومقامًا فى مرافق البسط ومرافق المقام)

$$= \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{(٤ + \text{س} - ٤)\left(\sqrt{٩ + \text{س}} + \sqrt{٩ - \text{س}}\right)}{(٩ + \text{س} - ٩ + \text{س})\left(\sqrt{٤ + \text{س}} + ٢\right)}$$

$$= \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{س}\left(\sqrt{٩ + \text{س}} + \sqrt{٩ - \text{س}}\right)}{٢\text{س}\left(\sqrt{٤ + \text{س}} + ٢\right)} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\sqrt{٩ + \text{س}} + \sqrt{٩ - \text{س}}}{٢\left(\sqrt{٤ + \text{س}} + ٢\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{٩ + ٠} + \sqrt{٩ - ٠}}{٢\left(\sqrt{٤ + ٠} + ٢\right)} = \frac{٣}{٤}$$

مما سبق نستنتج أن

لإيجاد $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}$ د (س) نوجد د (أ) بالتعويض المباشر عن س = أ فى الدالة فإذا كان الناتج :

١ عدد حقيقى ب فإن : $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}$ د (س) = ب

٢ $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ «كمية غير معينة» نقوم بقسمة كل من البسط والمقام على (س − أ)

مثال ٥

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} + ١}$

٢ $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{س}^{٢} - \text{س}}{\text{س} - ٢} - \frac{٢}{\text{س} - ٢} \right)$

الحل

١ ∵ د (−٢) = $\frac{-٢ - ٣}{(-٢)^{٢} + ١} = -١$ ∴ $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} + ١} = -١$

التعويض المباشر يعطى عدد حقيقى

٢ بفرض د (س) = $\frac{\text{س}^{٢} - \text{س}}{\text{س} - ٢} - \frac{٢}{\text{س} - ٢}$ ∴ د (س) = $\frac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}{\text{س} - ٢}$

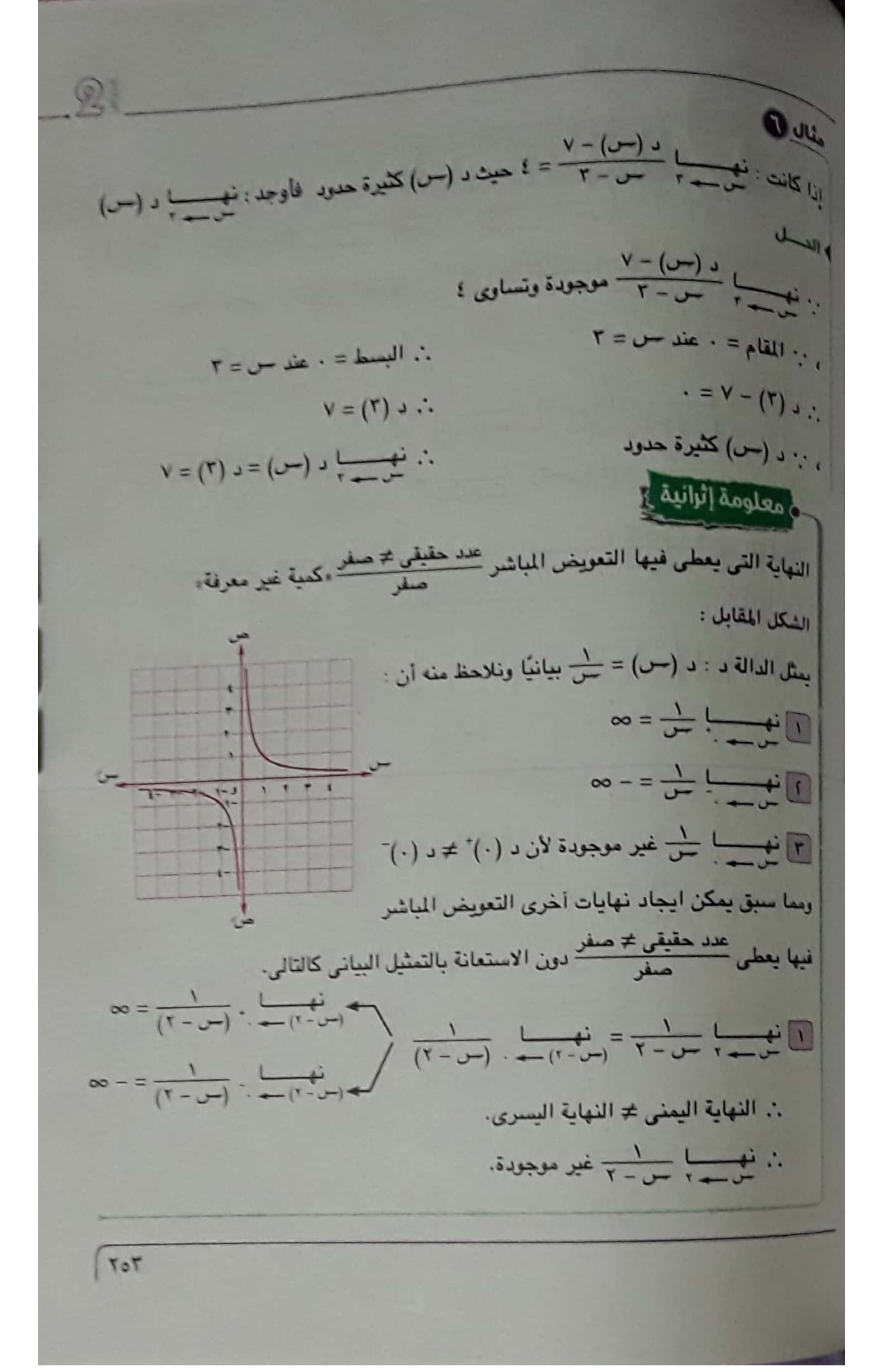
∴ د (٢) = $\frac{٤ - ٢ - ٢}{٢ - ٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

التعويض المباشر يعطى $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ «كمية غير معينة»

∴ $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{س}^{٢} - \text{س}}{\text{س} - ٢} - \frac{٢}{\text{س} - ٢} \right) = \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}{\text{س} - ٢}$

$= \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ١)}{\text{س} - ٢}$

$= \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} (\text{س} + ١) = ٢ + ١ = ٣$



مثال ٦

إذا كانت : $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{د (س)} - ٧}{\text{س} - ٣} = ٤$ حيث د (س) كثيرة حدود فأوجد : $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ د (س)

الحل

∵ $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{د (س)} - ٧}{\text{س} - ٣}$ موجودة وتساوى ٤

، ∵ المقام = ٠ عند س = ٣ ∴ البسط = ٠ عند س = ٣

∴ د (٣) − ٧ = ٠ ∴ د (٣) = ٧

، ∵ د (س) كثيرة حدود ∴ $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ د (س) = د (٣) = ٧

معلومة إثرائية

النهاية التى يعطى فيها التعويض المباشر $\frac{\text{عدد حقيقى} \neq \text{صفر}}{\text{صفر}}$ «كمية غير معرفة»

الشكل المقابل :

يمثل الدالة د : د (س) = $\frac{١}{\text{س}}$ بيانيًا ونلاحظ منه أن :

١ $\underset{\text{س} \leftarrow ^{+}٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{س}} = \infty$

٢ $\underset{\text{س} \leftarrow ^{-}٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{س}} = -\infty$

٣ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{س}}$ غير موجودة لأن د $(٠)^{+} \neq$ د $(٠)^{-}$

ومما سبق يمكن ايجاد نهايات أخرى التعويض المباشر فيها يعطى $\frac{\text{عدد حقيقى} \neq \text{صفر}}{\text{صفر}}$ دون الاستعانة بالتمثيل البيانى كالتالى.

١ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{س} - ٢} = \underset{(\text{س} - ٢) \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{(\text{س} - ٢)}$

$\underset{(\text{س} - ٢) \leftarrow ^{+}٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{(\text{س} - ٢)} = \infty$

$\underset{(\text{س} - ٢) \leftarrow ^{-}٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{(\text{س} - ٢)} = -\infty$

∴ النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى.

∴ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{س} - ٢}$ غير موجودة.



٢ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{س^{٢}}$

$\underset{س \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{س}\right)^{٢} = \left(\underset{س \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{١}{س}\right)^{٢} = (\infty)^{٢} = \infty$

$\underset{س \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{س}\right)^{٢} = \left(\underset{س \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{١}{س}\right)^{٢} = (-\infty)^{٢} = \infty$

∴ النهاية اليمنى = النهاية اليسرى. ∴ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{س^{٢}} = \infty$

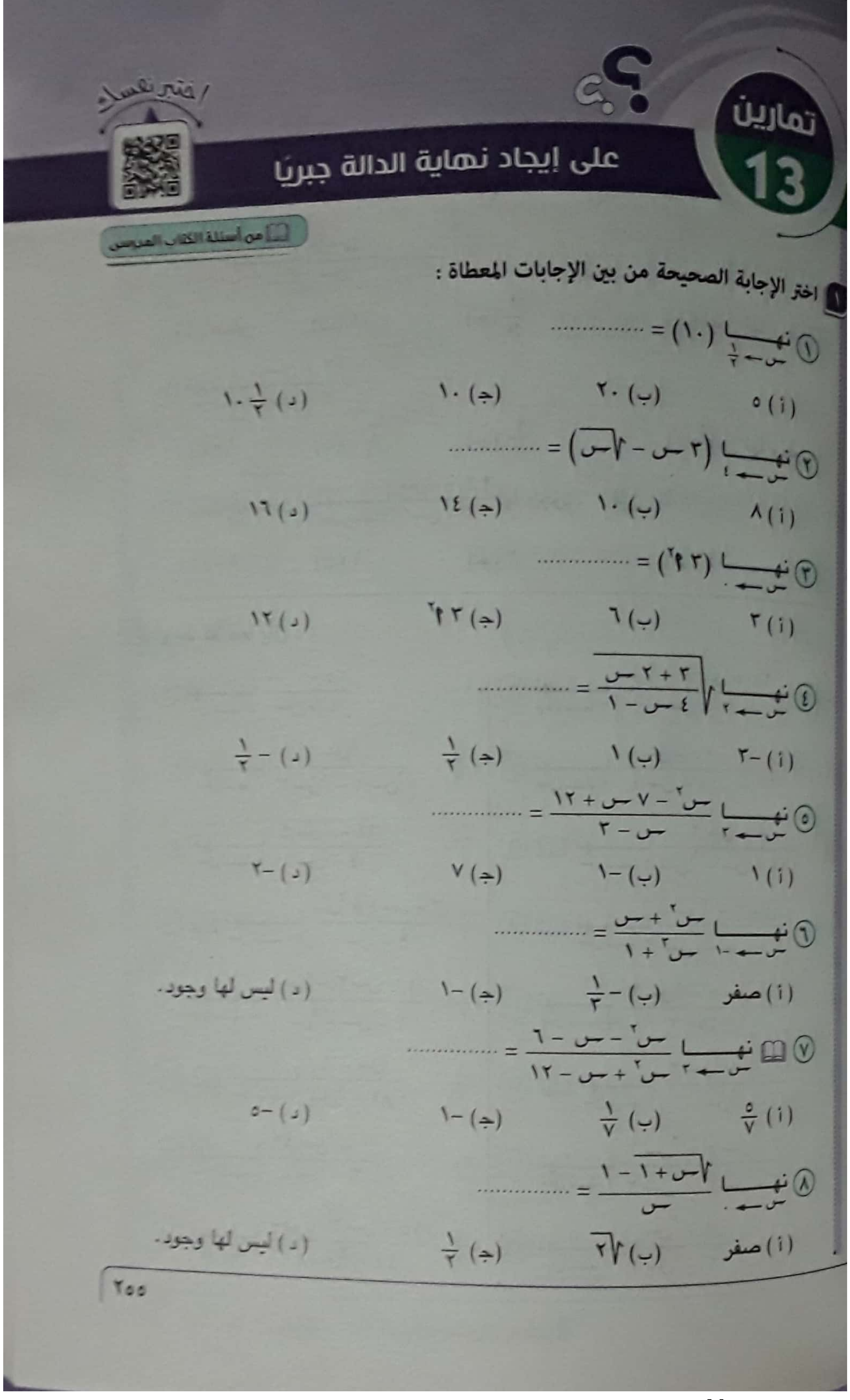
٣ $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{٣س + ٤}{س + ١}$

$= \underset{س + ١ \to ٠}{\text{نهـا}} (٣س + ٤) \times \frac{١}{(س + ١)}$

$\underset{(س + ١) \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} (٣س + ٤) \times \frac{١}{(س + ١)} = ١ \times \infty = \infty$

$\underset{(س + ١) \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} (٣س + ٤) \times \frac{١}{(س + ١)} = ١ \times -\infty = -\infty$

∴ النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى. ∴ $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{٣س + ٤}{س + ١}$ غير موجودة



📖 من أسئلة الكتاب المدرسي

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\underset{س \to \frac{1}{2}}{\text{نهـا}} (10) = $ ....

(أ) ٥ (ب) ٢٠ (جـ) ١٠ (د) ١٠ ١/٢

② $\underset{س \to 4}{\text{نهـا}} (3س - \sqrt{س}) = $ ....

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٤ (د) ١٦

③ $\underset{س \to 0}{\text{نهـا}} (3أ^2) = $ ....

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) $3أ^2$ (د) ١٢

④ $\underset{س \to 2}{\text{نهـا}} \sqrt{\frac{3 + 2س}{4س - 1}} = $ ....

(أ) −٣ (ب) ١ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) $-\frac{1}{2}$

⑤ $\underset{س \to 2}{\text{نهـا}} \frac{س^2 - 7س + 12}{س - 3} = $ ....

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٧ (د) −٢

⑥ $\underset{س \to -1}{\text{نهـا}} \frac{س^2 + س}{س^2 + 1} = $ ....

(أ) صفر (ب) $-\frac{1}{2}$ (جـ) −١ (د) ليس لها وجود.

⑦ 📖 $\underset{س \to 2}{\text{نهـا}} \frac{س^2 - س - 6}{س^2 + س - 12} = $ ....

(أ) $\frac{5}{7}$ (ب) $\frac{1}{7}$ (جـ) −١ (د) −٥

⑧ $\underset{س \to 0}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س + 1} - 1}{س} = $ ....

(أ) صفر (ب) $\sqrt{2}$ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) ليس لها وجود.

٩) $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{7 + 2\text{س}}{\text{حتا س}} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١

١٠) 📖 $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{4}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{طا س}}{\text{س}} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{4}{\pi}$ (د) ليس لها وجود.

١١) $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س} - 3}{\text{س} - 2} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) -1 (ب) $\frac{-3}{2}$ (جـ) $\frac{3}{2}$ (د) ليس لها وجود.

١٢) 📖 إذا كانت : $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^2 - 4\text{أ}}{\text{س} - 2}$ لها وجود فإن : أ = ...

(أ) -1 (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

---

٢ أوجد كلاً مما يأتي :

١) $\underset{\text{س} \to 5}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^2 - 25}{\text{س} - 5}$ «١٠»

٢) $\underset{\text{س} \to 3}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^2 - 8\text{س} + 15}{\text{س} - 3}$ «-٢»

٣) $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^2}{3\text{س}^3 - 2\text{س}^2}$ «$\frac{-1}{2}$»

٤) $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهــا}} \dfrac{5\text{س} - 10}{4\text{س} - 8}$ «$\frac{5}{4}$»

٥) $\underset{\text{س} \to 4}{\text{نهــا}} \dfrac{4\text{س}^2 - 64}{\text{س} - 4}$ «٣٢»

٦) 📖 $\underset{\text{س} \to 4}{\text{نهــا}} \dfrac{2\text{س} - 8}{\text{س}^2 - \text{س} - 12}$ «$\frac{2}{7}$»

٧) 📖 $\underset{\text{س} \to -3}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^2 + 4\text{س} + 3}{\text{س}^2 - 9}$ «$\frac{1}{3}$»

٨) 📖 $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^2 - 2\text{س}}{\text{س}^2 - \text{س} - 2}$ «$\frac{2}{3}$»

٩) $\underset{\text{س} \to -1}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^2 - 3\text{س} - 4}{\text{س}^2 - \text{س} - 2}$ «$\frac{5}{3}$»

١٠) $\underset{\text{س} \to \frac{1}{2}}{\text{نهــا}} \dfrac{2\text{س}^2 - 5\text{س} + 2}{2\text{س} - 1}$ «$\frac{-3}{2}$»

١١) 📖 $\underset{\text{س} \to 9}{\text{نهــا}} \dfrac{9 - \text{س}}{\text{س}^2 - 81}$ «$-\frac{1}{18}$»

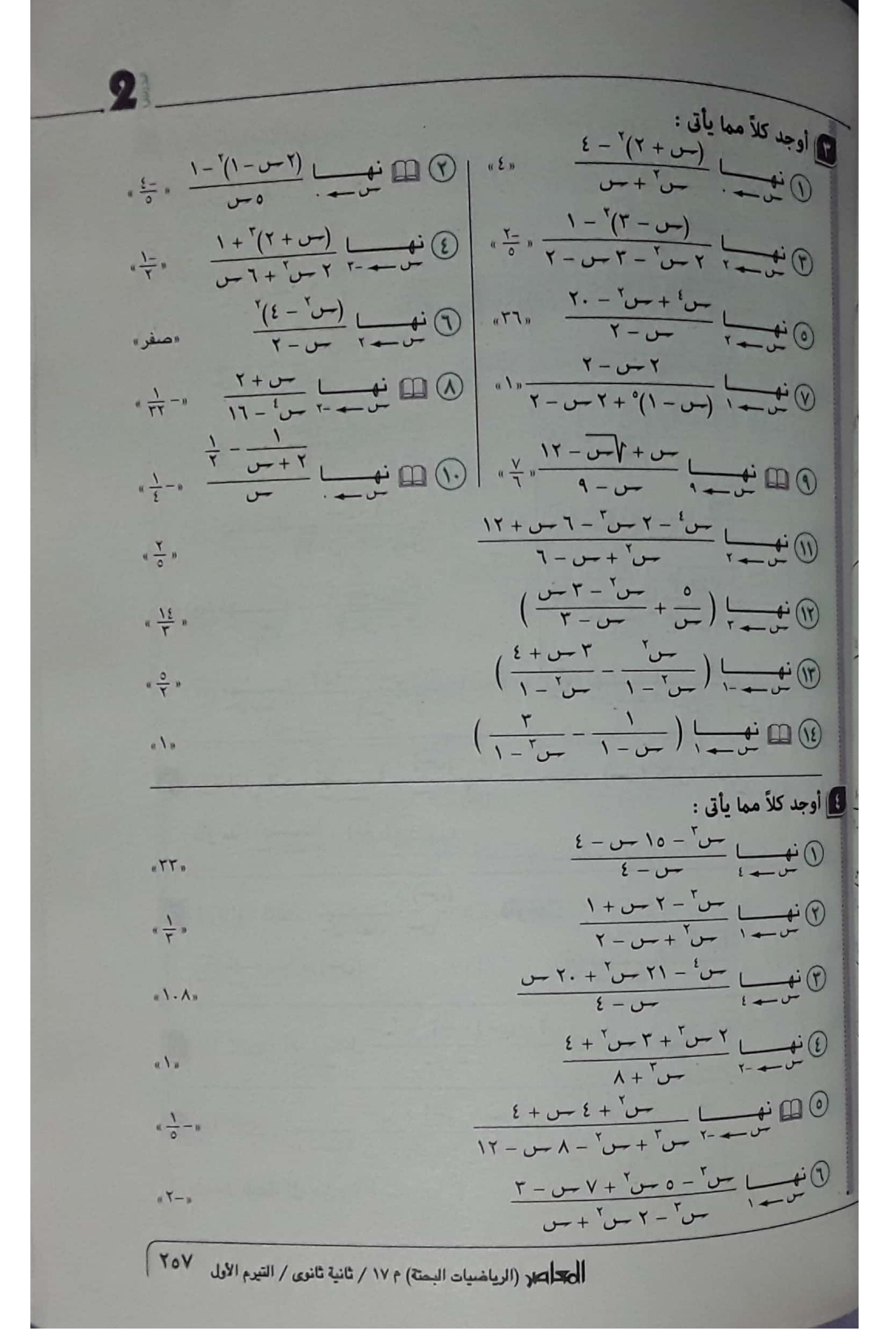
١٢) 📖 $\underset{\text{س} \to 1}{\text{نهــا}} \dfrac{3\text{س}^2 + \text{س} - 4}{\text{س}^2 - 1}$ «$\frac{7}{2}$»

١٣) $\underset{\text{س} \to \frac{3}{4}}{\text{نهــا}} \dfrac{16\text{س}^2 - 9}{8\text{س} - 6}$ «٣»

١٤) $\underset{\text{س} \to 3}{\text{نهــا}} \dfrac{2\text{س}^2 - 5\text{س} - 3}{2\text{س}^2 - 3\text{س} - 9}$ «$\frac{7}{9}$»

١٥) $\underset{\text{س} \to 3}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^2 + 2\text{س} - 15}{5\text{س}^2 - 45}$ «$\frac{4}{15}$»

١٦) $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^3 - 8}{3\text{س}^2 - 12}$ «١»



٣ أوجد كلاً مما يأتى :

① $نهــا_{س \to ٠} \frac{(س + ٢)^٢ - ٤}{س^٢ + س}$ «٤»

② $نهــا_{س \to ٠} \frac{(٢س - ١)^٢ - ١}{٥س}$ «$\frac{-٤}{٥}$»

③ $نهــا_{س \to ٢} \frac{(س - ٣)^٢ - ١}{٢س^٢ - ٣س - ٢}$ «$\frac{-٢}{٥}$»

④ $نهــا_{س \to -٢} \frac{(س + ٢)^٣ + ١}{٢س^٢ + ٦س}$ «$\frac{-١}{٢}$»

⑤ $نهــا_{س \to ٢} \frac{س^٤ + س^٢ - ٢٠}{س - ٢}$ «٣٦»

⑥ $نهــا_{س \to ٢} \frac{(س^٢ - ٤)^٢}{س - ٢}$ «صفر»

⑦ $نهــا_{س \to ١} \frac{٢س - ٢}{(س - ١)^٥ + ٢س - ٢}$ «١»

⑧ $نهــا_{س \to -٢} \frac{س + ٢}{س^٤ - ١٦}$ «$-\frac{١}{٣٢}$»

⑨ $نهــا_{س \to ٩} \frac{س + \sqrt{س} - ١٢}{س - ٩}$ «$\frac{٧}{٦}$»

⑩ $نهــا_{س \to ٠} \frac{\frac{١}{س + ٢} - \frac{١}{٢}}{س}$ «$-\frac{١}{٤}$»

⑪ $نهــا_{س \to ٢} \frac{س^٤ - ٢س^٣ - ٦س + ١٢}{س^٢ + س - ٦}$ «$\frac{٢}{٥}$»

⑫ $نهــا_{س \to ٢} \left(\frac{٥}{س} + \frac{س^٢ - ٣س}{س - ٣} \right)$ «$\frac{١٤}{٣}$»

⑬ $نهــا_{س \to -١} \left(\frac{س^٢}{س^٢ - ١} - \frac{٣س + ٤}{س^٢ - ١} \right)$ «$\frac{٥}{٢}$»

⑭ $نهــا_{س \to ١} \left(\frac{١}{س - ١} - \frac{٣}{س^٣ - ١} \right)$ «١»

٤ أوجد كلاً مما يأتى :

① $نهــا_{س \to ٤} \frac{س^٣ - ١٥س - ٤}{س - ٤}$ «٣٣»

② $نهــا_{س \to ١} \frac{س^٣ - ٢س + ١}{س^٢ + س - ٢}$ «$\frac{١}{٣}$»

③ $نهــا_{س \to ٤} \frac{س^٤ - ٢١س^٢ + ٢٠س}{س - ٤}$ «١٠٨»

④ $نهــا_{س \to -٢} \frac{٢س^٣ + ٣س^٢ + ٤}{س^٣ + ٨}$ «١»

⑤ $نهــا_{س \to -٢} \frac{س^٢ + ٤س + ٤}{س^٣ + س^٢ - ٨س - ١٢}$ «$-\frac{١}{٥}$»

⑥ $نهــا_{س \to ١} \frac{س^٣ - ٥س^٢ + ٧س - ٣}{س^٣ - ٢س^٢ + س}$ «-٢»

٥ أوجد كلاً مما يأتي :

(١) $\lim_{س \to ٩} \frac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩}$ «$\frac{١}{٦}$»

(٢) $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س - ١} - ٢}{س - ٥}$ «$\frac{١}{٤}$»

(٣) $\lim_{س \to -١} \frac{س + ١}{\sqrt{س + ٥} - ٢}$ «٤»

(٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٣ - ٢س} - \sqrt{٣}}{س}$ «$-\frac{١}{\sqrt{٣}}$»

(٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٢س + ٩} - ٣}{س^{٢} + س}$ «$\frac{١}{٣}$»

(٦) $\lim_{س \to ٥} \frac{س^{٢} - ٥س}{\sqrt{س + ٤} - ٣}$ «٣٠»

(٧) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - س - ٦}{\sqrt{٥س - ٦} - ٣}$ «٦»

(٨) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{١ + س} - \sqrt{١ - س}}{٢س}$ «$\frac{١}{٢}$»

(٩) $\lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{\sqrt{٣س - ٢} - \sqrt{س}}$ «١»

(١٠) $\lim_{س \to -١} \frac{\sqrt{س^{٢} + ٨} - ٣}{س + ١}$ «$-\frac{١}{٣}$»

(١١) $\lim_{س \to ١} \frac{١ - س}{٢ - \sqrt{س^{٢} + ٣}}$ «٢»

(١٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{\sqrt{س - ٢} - ١}$ «$\frac{١}{٢}$»

(١٣) $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{٢٤ - ٥س} - ٢}{٣ - \sqrt{س + ٥}}$ «٧,٥»

(١٤) $\lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{س - \sqrt{س + ٦}}$ «$\frac{٦}{٥}$»

٦ إذا كانت : $\lim_{س \to ٢} \frac{د(س) - ٥}{س - ٢} = ١$ حيث د (س) كثيرة حدود

فأوجد : $\lim_{س \to ٢} د(س)$ «٥»

٧ إذا كانت : $\lim_{س \to ٠} \frac{د(س)}{س^{٢}} = ٥$ **فأوجد :**

(١) $\lim_{س \to ٠} د(س)$

(٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{د(س)}{س}$ «صفر ، صفر»

٨ إذا كانت : $\lim_{س \to -١} \frac{س^{٢} - (أ - ١)س - أ}{س + ١} = ٤$ **أوجد : قيمة أ** «−٥»

٩ إذا كانت : $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} + أس + ب}{س - ١} = ٥$

أوجد قيمة كل من : أ ، ب «٣ ، −٤»

١٠ الربط بالتجارة : وجدت شركة أنها لو أنفقت س من الجنيهات للدعاية لمنتجها ، فإن ربحها يعطى بالعلاقة د (س) = ٠,٠٢ س^{٢} + ٤٠ س + ١٥٠ ، أوجد مقدار ربح الشركة عندما يقترب إنفاقها على الدعاية من ١٠٠ جنيه. «٦١٥٠ جنيهًا»

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

١١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت د دالة تحقق أن : س (د (س) + ١) = د (س) + س^{٢}

فإن : نهــا$_{س ← ١}$ د (س) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

② إذا كان : نهــا$_{س ← ٠}$ $\frac{\sqrt{م س + ك} - ٣}{س}$ = ٢ فإن : $\frac{م}{ك}$ = ...

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) $\frac{٤}{٣}$

③ إذا كانت : نهــا$_{س ← م}$ (٢ د (س) − ٥ هـ (س)) = ١٠

، نهــا$_{س ← م}$ (د (س) + هـ (س)) = ٦ فإن : نهــا$_{س ← م}$ $\frac{د (س)}{هـ (س)}$ = ...

(أ) $\frac{٤٠}{٧}$ (ب) $\frac{٢}{٧}$ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

④ إذا كانت : ن (س) دالة وكانت نهــا$_{س ← ٢}$ $\frac{ن (س) - ٨}{س - ٢}$ = ٧

فإن : نهــا$_{س ← ٢}$ $\frac{٢ س^{٢} - ن (س)}{س - ٢}$ = ...

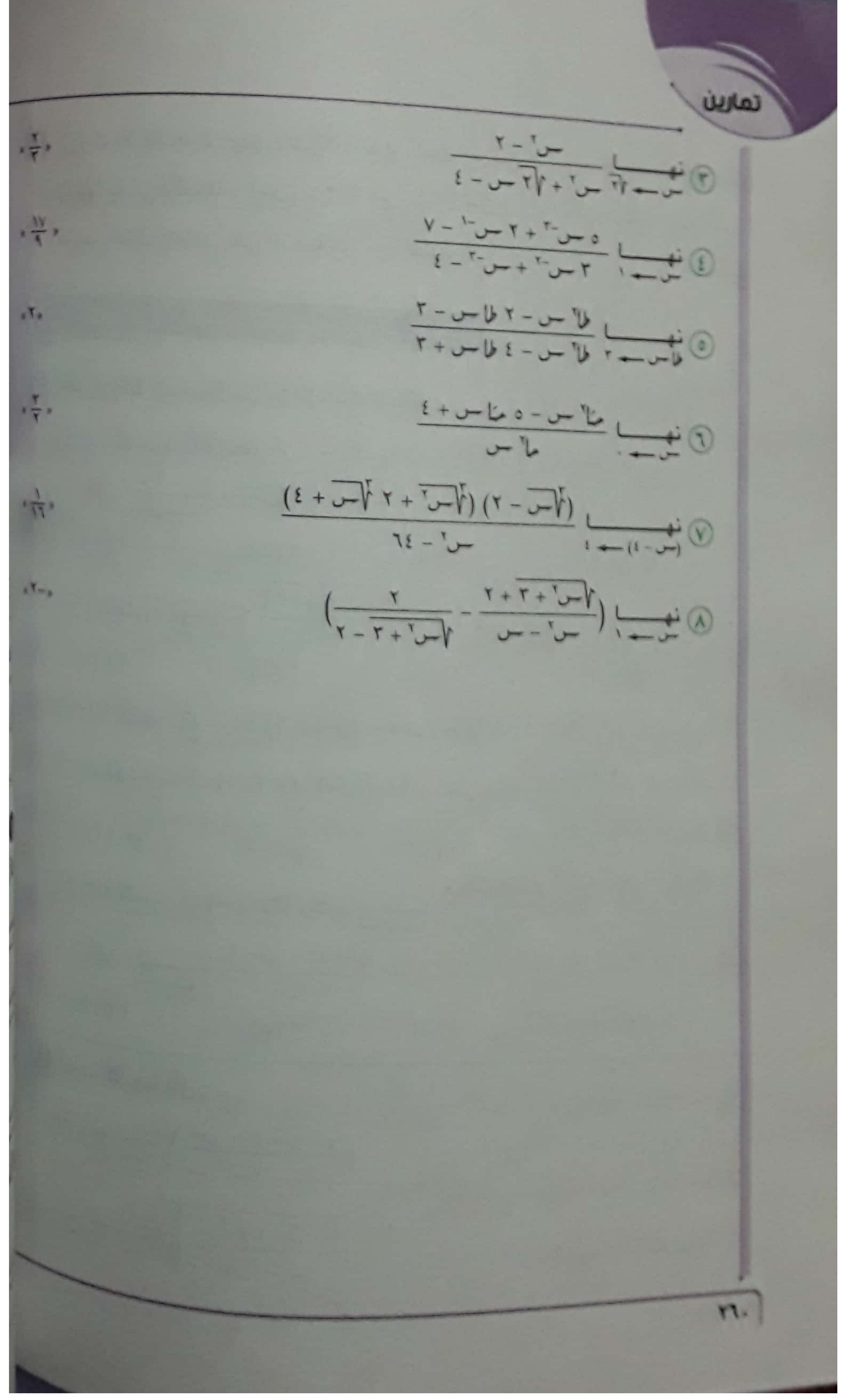
(أ) ١ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ١٥

---

١٢ أوجد كلاً مما يأتي :

① نهــا$_{س ← ٥}$ $\left(\frac{س^{٢} - ٤ س - ٥}{س^{٢} - ٦ س + ٥}\right)^{٢}$ «$\frac{٩}{٤}$»

② نهــا$_{س ← ١}$ $\sqrt{\frac{س^{٢} + ٢ س - ٣}{س^{٢} - س}}$ «٢»



تمارين

③ $\underset{\text{س} \leftarrow \sqrt{2}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{2} - 2}{\text{س}^{2} + \sqrt{2}\,\text{س} - 4}$ «$\frac{2}{3}$»

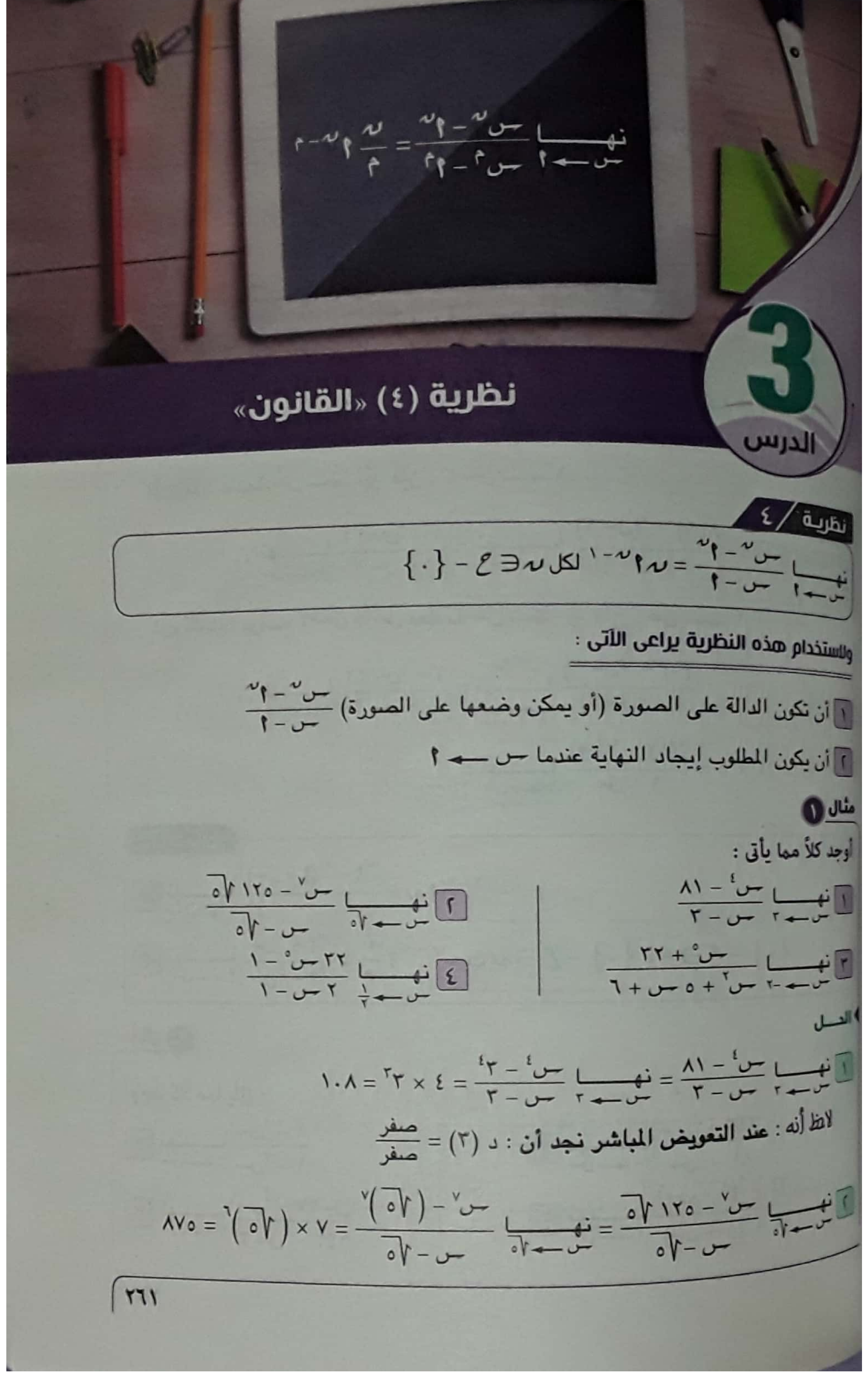
④ $\underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{نهـا}} \dfrac{5\,\text{س}^{-2} + 2\,\text{س}^{-1} - 7}{3\,\text{س}^{-2} + \text{س}^{-3} - 4}$ «$\frac{17}{9}$»

⑤ $\underset{\text{طا س} \leftarrow 3}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{طا}^{2}\,\text{س} - 2\,\text{طا س} - 3}{\text{طا}^{2}\,\text{س} - 4\,\text{طا س} + 3}$ «٢»

⑥ $\underset{\text{س} \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا}^{2}\,\text{س} - 5\,\text{جتا س} + 4}{\text{جا}^{2}\,\text{س}}$ «$\frac{3}{2}$»

⑦ $\underset{(\text{س} - 1) \leftarrow 4}{\text{نهـا}} \dfrac{(\sqrt[3]{\text{س}} - 2)(\sqrt[3]{\text{س}^{2}} + 2\sqrt[3]{\text{س}} + 4)}{\text{س}^{2} - 64}$ «$\frac{1}{16}$»

⑧ $\underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\sqrt{\text{س}^{2} + 3} + 2}{\text{س}^{2} - \text{س}} - \dfrac{2}{\sqrt{\text{س}^{2} + 3} - 2} \right)$ «-٢»



الدرس 3

نظرية (٤) «القانون»

نظرية ٤

$$\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}} = \text{ن}\,\text{أ}^{\text{ن} - ١} \quad \text{لكل ن} \in \text{ح} - \{٠\}$$

ولاستخدام هذه النظرية يراعى الآتي :

١ أن تكون الدالة على الصورة (أو يمكن وضعها على الصورة) $\frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}}$

٢ أن يكون المطلوب إيجاد النهاية عندما $\text{س} \to \text{أ}$

مثال ١

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٤} - ٨١}{\text{س} - ٣}$

٢ $\underset{\text{س} \to \sqrt{٥}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٧} - ١٢٥\sqrt{٥}}{\text{س} - \sqrt{٥}}$

٣ $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٥} + ٣٢}{\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٦}$

٤ $\underset{\text{س} \to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{٣٢\text{س}^{٥} - ١}{٢\text{س} - ١}$

الحل

١ $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٤} - ٨١}{\text{س} - ٣} = \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٤} - ٣^{٤}}{\text{س} - ٣} = ٤ \times ٣^{٣} = ١٠٨$

لاحظ أنه : **عند التعويض المباشر نجد أن :** $\text{د}(٣) = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

٢ $\underset{\text{س} \to \sqrt{٥}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٧} - ١٢٥\sqrt{٥}}{\text{س} - \sqrt{٥}} = \underset{\text{س} \to \sqrt{٥}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٧} - (\sqrt{٥})^{٧}}{\text{س} - \sqrt{٥}} = ٧ \times (\sqrt{٥})^{٦} = ٨٧٥$

3 $\displaystyle \lim_{\text{س} \to -2} \frac{\text{س}^5 - 32}{(\text{س} + 2)(\text{س} + 3)} = \lim_{\text{س} \to -2} \frac{\text{س}^5 - (-32)}{\text{س} - (-2)} \times \lim_{\text{س} \to -2} \frac{1}{\text{س} + 3}$

$\displaystyle = \lim_{\text{س} \to -2} \frac{\text{س}^5 - (-2)^5}{\text{س} - (-2)} \times 1 = 5 \times (-2)^4 = 80$

4 $\displaystyle \lim_{\text{س} \to \frac{1}{2}} \frac{32\text{س}^5 - 1}{2\text{س} - 1} = \lim_{\text{س} \to \frac{1}{2}} \frac{32\left[\text{س}^5 - \frac{1}{32}\right]}{2\left[\text{س} - \frac{1}{2}\right]} = 16 \times \lim_{\text{س} \to \frac{1}{2}} \frac{\text{س}^5 - \left(\frac{1}{2}\right)^5}{\text{س} - \frac{1}{2}}$

$\displaystyle = 16 \lim_{\text{س} \to \frac{1}{2}} \frac{\text{س}^5 - \left(\frac{1}{2}\right)^5}{\text{س} - \frac{1}{2}} = 16 \times 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 5$

حل آخر : عندما $\text{س} \to \frac{1}{2}$ فإن : $2\text{س} \to 1$

$\displaystyle \therefore \lim_{\text{س} \to \frac{1}{2}} \frac{32\text{س}^5 - 1}{2\text{س} - 1} = \lim_{2\text{س} \to 1} \frac{(2\text{س})^5 - (1)^5}{2\text{س} - 1} = 5 \times 1^4 = 5$

حل ثالث : بوضع $2\text{س} = \text{ص}$ فعندما $\text{س} \to \frac{1}{2}$ فإن : $\text{ص} \to 1$

$\displaystyle \therefore \lim_{\text{س} \to \frac{1}{2}} \frac{32\text{س}^5 - 1}{2\text{س} - 1} = \lim_{\text{س} \to \frac{1}{2}} \frac{(2\text{س})^5 - (1)^5}{(2\text{س}) - 1}$

$\displaystyle = \lim_{\text{ص} \to 1} \frac{(\text{ص})^5 - (1)^5}{\text{ص} - 1} = 5 \times 1^4 = 5$

نتيجتان

1 $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 0} \frac{(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}} = \text{ن}\,\text{أ}^{\text{ن}-1}$

2 $\displaystyle \lim_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}} - \text{أ}^{\text{م}}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}}\,\text{أ}^{\text{ن}-\text{م}}$ ، حيث $\text{ن} \in \text{ح} - \{0\}$ ، $\text{م} \in \text{ح} - \{0\}$ ، $\text{أ} \in \text{ح} - \{0\}$

مثال 2

أوجد كلاً مما يأتى :

1 $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س}^5 - 1}{\text{س}^2 - 1}$

2 $\displaystyle \lim_{\text{س} \to -2} \frac{\text{س}^5 + 243}{\text{س}^4 - 81}$

3 $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^4 - 27\text{س}}{2\text{س}^4 - 243}$

4 $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 1} \frac{(\text{س} + 1)^6 - 64}{(\text{س} + 1)^3 - 8}$

الحــل

(1) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^5 - 1}{\text{س}^3 - 1} = \underset{\text{س}\to 1}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^5 - 1^5}{\text{س}^3 - 1^3} = \dfrac{5}{3} \times 1^{5-3} = \dfrac{5}{3}$

(2) $\underset{\text{س}\to -3}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^5 + 243}{\text{س}^4 - 81} = \underset{\text{س}\to -3}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^5 - (-3)^5}{\text{س}^4 - (-3)^4} = \dfrac{5}{4} \times (-3)^{5-4} = -\dfrac{15}{4}$

(3) $\underset{\text{س}\to 3}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^4 - 27\text{س}}{3\text{س}^4 - 243} = \underset{\text{س}\to 3}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}(\text{س}^3 - 27)}{3(\text{س}^4 - 81)}$

$= \underset{\text{س}\to 3}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}}{3} \times \underset{\text{س}\to 3}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^3 - 3^3}{\text{س}^4 - 3^4}$

$= \dfrac{3}{3} \times \dfrac{3}{4} \times 3^{3-4} = \dfrac{1}{4}$

(4) $\because$ س $\to 1$ $\quad \therefore$ س $+ 1 \to 2$

$\therefore \underset{\text{س}\to 1}{\text{نهــا}} \dfrac{(\text{س}+1)^6 - 64}{(\text{س}+1)^3 - 8} = \underset{\text{س}+1\to 2}{\text{نهــا}} \dfrac{(\text{س}+1)^6 - 2^6}{(\text{س}+1)^3 - 2^3} = \dfrac{6}{3} \times 2^{6-3} = 16$

حل آخر : بتحليل البسط كفرق بين مربعين :

$\therefore \underset{\text{س}\to 1}{\text{نهــا}} \dfrac{(\text{س}+1)^6 - 64}{(\text{س}+1)^3 - 8} = \underset{\text{س}\to 1}{\text{نهــا}} \dfrac{[(\text{س}+1)^3 - 8]\,[(\text{س}+1)^3 + 8]}{(\text{س}+1)^3 - 8}$

$= \underset{\text{س}\to 1}{\text{نهــا}} \left((\text{س}+1)^3 + 8\right) = (1+1)^3 + 8 = 16$

مثال (3)

أوجد كلاً مما يأتي : (1) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{(\text{س}+5)^4 - 625}{\text{س}}$ (2) $\underset{\text{س}\to 6}{\text{نهــا}} \dfrac{(\text{س}-5)^7 - 1}{\text{س} - 6}$

(3) $\underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{(\text{أ} + 2\text{هـ})^6 - \text{أ}^6}{5\text{هـ}}$

الحــل

(1) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{(\text{س}+5)^4 - 625}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهــا}} \dfrac{(\text{س}+5)^4 - 5^4}{\text{س}} = 4 \times 5^3 = 500$

(2) $\underset{\text{س}\to 6}{\text{نهــا}} \dfrac{(\text{س}-5)^7 - 1}{\text{س} - 6} = \underset{\text{س}-5\to 1}{\text{نهــا}} \dfrac{(\text{س}-5)^7 - 1^7}{(\text{س}-5) - 1} = 7 \times 1^6 = 7$



٣ $\underset{هـ \to 0}{\text{نها}} \frac{(أ + 2هـ)^6 - أ^6}{5هـ} = \underset{هـ \to 0}{\text{نها}} \frac{\frac{2}{5}[(أ + 2هـ)^6 - أ^6]}{\frac{2}{5} \times 5هـ}$

$= \underset{2هـ \to 0}{\text{نها}} \frac{\frac{2}{5}[(أ + 2هـ)^6 - أ^6]}{2هـ}$

$= \frac{2}{5} \times 6 \times أ^5 = \frac{12}{5} أ^5$

ملاحظتان

• $\sqrt[ن]{أ} = أ^{\frac{1}{ن}}$ حيث ن ∈ ص⁺ - {١} ، أ ∈ ح⁺

فمثلاً : $\sqrt{س} = س^{\frac{1}{2}}$ ، $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$

• $\sqrt[ن]{أ^م} = أ^{\frac{م}{ن}}$ حيث ن ∈ ص⁺ - {١} ، أ ∈ ح⁺ ، م ∈ ص

فمثلاً : $\sqrt[4]{س^5} = س^{\frac{5}{4}}$ ، $\sqrt[5]{64} = \sqrt[5]{2^6} = 2^{\frac{6}{5}}$

مثال ٤

أوجد كلاً مما يأتي :

١ $\underset{س \to 9}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س} - 3}{س - 9}$

٢ $\underset{س \to 1}{\text{نها}} \frac{\sqrt[5]{س} - 1}{\sqrt[3]{س} - 1}$

٣ $\underset{س \to 16}{\text{نها}} \frac{\sqrt[4]{س^5} - 32}{\sqrt{س^3} - 64}$

الحل

١ $\underset{س \to 9}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س} - 3}{س - 9} = \underset{س \to 9}{\text{نها}} \frac{س^{\frac{1}{2}} - 9^{\frac{1}{2}}}{س - 9} = \frac{1}{2} \times 9^{\frac{1}{2} - 1}$

$= \frac{1}{2} \times 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$

حل آخر : بتحليل المقام كفرق بين مربعين :

$\therefore \underset{س \to 9}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س} - 3}{س - 9} = \underset{س \to 9}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س} - 3}{(\sqrt{س} - 3)(\sqrt{س} + 3)} = \underset{س \to 9}{\text{نها}} \frac{1}{(\sqrt{س} + 3)}$

$= \frac{1}{\sqrt{9} + 3} = \frac{1}{6}$

٢ $\displaystyle \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٥]{س} - ١}{\sqrt[٣]{س} - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{س^{\frac{١}{٥}} - ١^{\frac{١}{٥}}}{س^{\frac{١}{٣}} - ١^{\frac{١}{٣}}} = \frac{\frac{١}{٥}}{\frac{١}{٣}} \times ١^{\frac{١}{٥} - \frac{١}{٣}} = \frac{٣}{٥}$

٣ $\displaystyle \lim_{س \to ١٦} \frac{\sqrt[٤]{س^{٥}} - ٣٢}{\sqrt{س^{٣}} - ٦٤} = \lim_{س \to ١٦} \frac{س^{\frac{٥}{٤}} - (١٦)^{\frac{٥}{٤}}}{س^{\frac{٣}{٢}} - (١٦)^{\frac{٣}{٢}}}$

$\displaystyle = \frac{\frac{٥}{٤}}{\frac{٣}{٢}} \times ١٦^{(\frac{٥}{٤} - \frac{٣}{٢})}$

$\displaystyle = \frac{٥}{٦} \times ١٦^{-\frac{١}{٤}} = \frac{٥}{١٢}$

لاحظ أن

$١٦^{\frac{٥}{٤}} = (٢^{٤})^{\frac{٥}{٤}} = ٢^{٤ \times \frac{٥}{٤}}$

$= ٢^{٥} = ٣٢$

أى أن $٣٢ = ١٦^{\frac{٥}{٤}}$

وكذلك : $٦٤ = ١٦^{\frac{٣}{٢}}$

مثال ٥

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $\displaystyle \lim_{س \to ٣} \frac{س^{٣} + س^{٢} - ٣٦}{س^{٤} - ٨١}$

٢ $\displaystyle \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٤]{٢س + ١٤} - ٢}{س - ١}$

٣ $\displaystyle \lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{٣س + ٢} - ٢}{\sqrt[٥]{س - ٣} + ١}$

الحل

١ $\displaystyle \lim_{س \to ٣} \frac{س^{٣} + س^{٢} - ٣٦}{س^{٤} - ٨١} = \lim_{س \to ٣} \frac{س^{٣} - ٢٧ + س^{٢} - ٩}{س^{٤} - ٨١}$

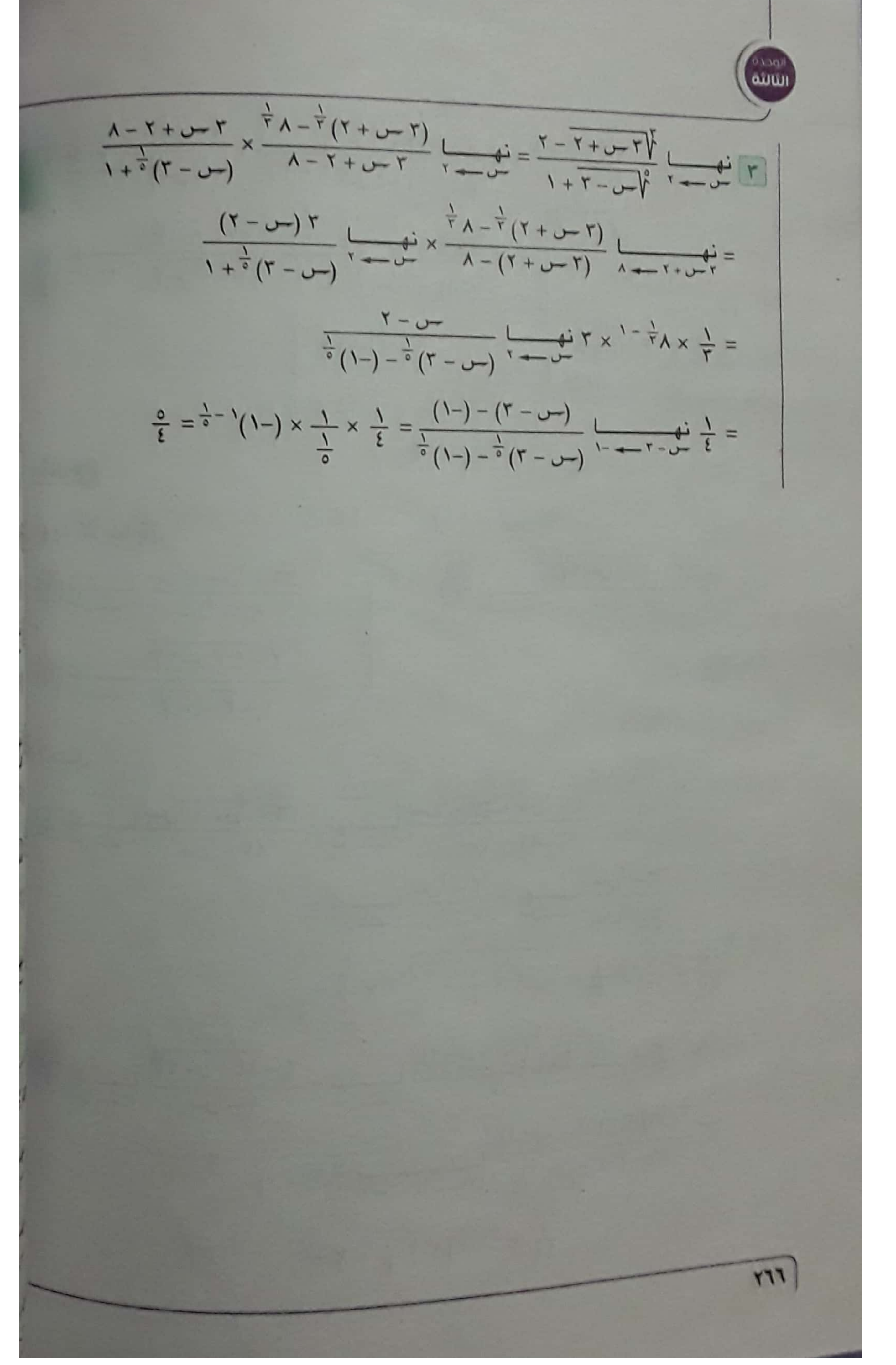
$\displaystyle = \lim_{س \to ٣} \frac{س^{٣} - ٣^{٣}}{س^{٤} - ٣^{٤}} + \lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٣^{٢}}{س^{٤} - ٣^{٤}}$

$\displaystyle = \frac{٣}{٤} \times ٣^{٣ - ٤} + \frac{٢}{٤} \times ٣^{٢ - ٤} = \frac{١}{٤} + \frac{١}{١٨} = \frac{١١}{٣٦}$

٢ $\displaystyle \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٤]{٢س + ١٤} - ٢}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{(٢س + ١٤)^{\frac{١}{٤}} - (١٦)^{\frac{١}{٤}}}{س - ١} \times \frac{٢}{٢}$

$\displaystyle = ٢ \lim_{٢س + ١٤ \to ١٦} \frac{(٢س + ١٤)^{\frac{١}{٤}} - (١٦)^{\frac{١}{٤}}}{(٢س + ١٤) - ١٦}$

$\displaystyle = ٢ \times \frac{١}{٤} (١٦)^{\frac{١}{٤} - ١} = \frac{١}{١٦}$

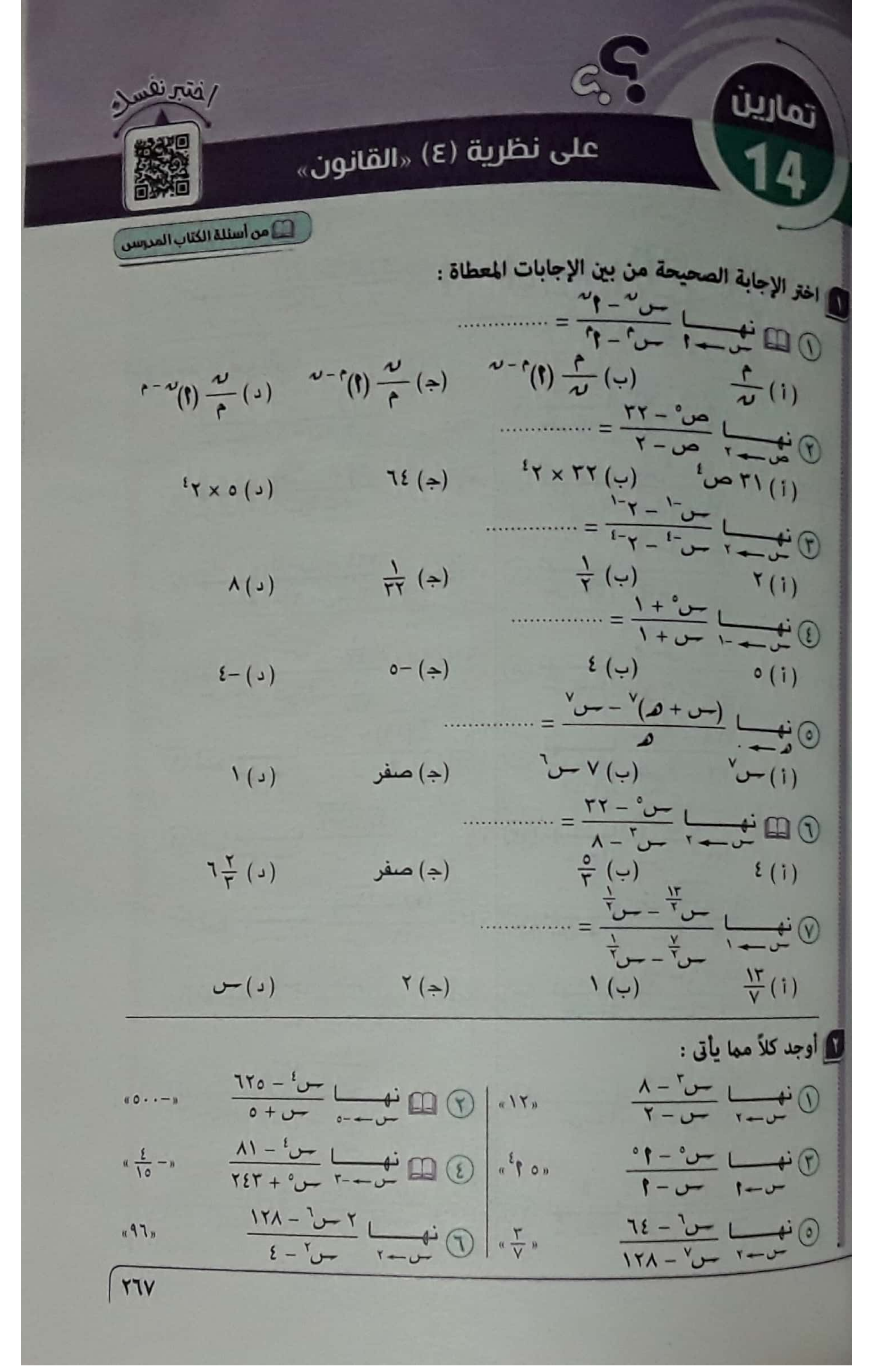


٣ $\displaystyle \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{٣\text{س}+٢} - ٢}{\sqrt[٥]{\text{س}-٣} + ١} = \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{(٣\text{س}+٢)^{\frac{١}{٣}} - ٨^{\frac{١}{٣}}}{٣\text{س}+٢-٨} \times \frac{٣\text{س}+٢-٨}{(\text{س}-٣)^{\frac{١}{٥}}+١}$

$\displaystyle = \lim_{٣\text{س}+٢ \to ٨} \frac{(٣\text{س}+٢)^{\frac{١}{٣}} - ٨^{\frac{١}{٣}}}{(٣\text{س}+٢) - ٨} \times \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{٣(\text{س}-٢)}{(\text{س}-٣)^{\frac{١}{٥}}+١}$

$\displaystyle = \frac{١}{٣} \times ٨^{\frac{١}{٣}-١} \times ٣ \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}-٢}{(\text{س}-٣)^{\frac{١}{٥}} - (-١)^{\frac{١}{٥}}}$

$\displaystyle = \frac{١}{٤} \lim_{\text{س}-٣ \to -١} \frac{(\text{س}-٣) - (-١)}{(\text{س}-٣)^{\frac{١}{٥}} - (-١)^{\frac{١}{٥}}} = \frac{١}{٤} \times \frac{١}{\frac{١}{٥}} \times (-١)^{١-\frac{١}{٥}} = \frac{٥}{٤}$



تمارين 14 على نظرية (٤) «القانون»

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \dfrac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}} - \text{أ}^{\text{م}}} = $ ....

(أ) $\dfrac{\text{م}}{\text{ن}}$ (ب) $\dfrac{\text{م}}{\text{ن}} (\text{أ})^{\text{م} - \text{ن}}$ (ج) $\dfrac{\text{ن}}{\text{م}} (\text{أ})^{\text{م} - \text{ن}}$ (د) $\dfrac{\text{ن}}{\text{م}} (\text{أ})^{\text{ن} - \text{م}}$

② $\lim\limits_{\text{ص} \to ٢} \dfrac{\text{ص}^{٥} - ٣٢}{\text{ص} - ٢} = $ ....

(أ) $٣١ \text{ ص}^{٤}$ (ب) ٣٢×٢^{٤} (ج) ٦٤ (د) ٥×٢^{٤}

③ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{س}^{-١} - ٢^{-١}}{\text{س}^{-٤} - ٢^{-٤}} = $ ....

(أ) ٢ (ب) $\dfrac{١}{٢}$ (ج) $\dfrac{١}{٣٢}$ (د) ٨

④ $\lim\limits_{\text{س} \to -١} \dfrac{\text{س}^{٥} + ١}{\text{س} + ١} = $ ....

(أ) ٥ (ب) ٤ (ج) −٥ (د) −٤

⑤ $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \dfrac{(\text{س} + \text{هـ})^{٧} - \text{س}^{٧}}{\text{هـ}} = $ ....

(أ) $\text{س}^{٧}$ (ب) $٧ \text{ س}^{٦}$ (ج) صفر (د) ١

⑥ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{س}^{٥} - ٣٢}{\text{س}^{٣} - ٨} = $ ....

(أ) ٤ (ب) $\dfrac{٥}{٣}$ (ج) صفر (د) $٦\dfrac{٢}{٣}$

⑦ $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \dfrac{\text{س}^{\frac{١٣}{٢}} - \text{س}^{\frac{١}{٢}}}{\text{س}^{\frac{٧}{٢}} - \text{س}^{\frac{١}{٢}}} = $ ....

(أ) $\dfrac{١٣}{٧}$ (ب) ١ (ج) ٢ (د) س

٢ أوجد كلاً مما يأتي :

① $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{س}^{٣} - ٨}{\text{س} - ٢}$ «١٢»

② $\lim\limits_{\text{س} \to -٥} \dfrac{\text{س}^{٤} - ٦٢٥}{\text{س} + ٥}$ «−٥٠٠»

③ $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \dfrac{\text{س}^{٥} - \text{أ}^{٥}}{\text{س} - \text{أ}}$ «$٥ \text{ أ}^{٤}$»

④ $\lim\limits_{\text{س} \to -٣} \dfrac{\text{س}^{٤} - ٨١}{\text{س}^{٥} + ٢٤٣}$ «$-\dfrac{٤}{١٥}$»

⑤ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{س}^{٦} - ٦٤}{\text{س}^{٧} - ١٢٨}$ «$\dfrac{٣}{٧}$»

⑥ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{٢ \text{ س}^{٦} - ١٢٨}{\text{س}^{٢} - ٤}$ «٩٦»

(٧) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^{٦} - ٦٤}{٣س + ٦}$ «-٦٤»

(٨) $\lim_{س \to -١} \frac{س^{١٠} + س}{س^{٧} - س}$ «$\frac{-٣}{٢}$»

(٩) $\lim_{س \to ١} \frac{١ - س^{٩}}{س^{٧} - ١}$ «$\frac{-٩}{٧}$»

(١٠) $\lim_{س \to -\frac{١}{٢}} \frac{٣٢س^{٥} + ١}{٦٤س^{٦} - ١}$ «$\frac{-٥}{٦}$»

(١١) $\lim_{س \to \frac{-٢}{٣}} \frac{٢٤٣س^{٥} + ٣٢}{٢٧س^{٣} + ٨}$ «$\frac{٢٠}{٣}$»

(١٢) $\lim_{٢س \to ٣} \frac{١٦س^{٥} - ٨١س}{٢س^{٣} - ٣س^{٢}}$ «٧٢»

٣ أوجد كلاً مما يأتي :

(١) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{-٧} - (٢)^{-٧}}{س - ٢}$ «$\frac{-٧}{٢٥٦}$»

(٢) $\lim_{س \to -١} \frac{س^{-٤} - ١}{س^{-١٨} - ١}$ «$\frac{٢}{٩}$»

(٣) $\lim_{س \to \sqrt{٢}} \frac{س^{٧} - ٨\sqrt{٢}}{س^{٢} - ٢}$ «$١٤\sqrt{٢}$»

(٤) $\lim_{س \to -\sqrt{٢}} \frac{س^{٨} - ١٦}{س^{٥} + ٤\sqrt{٢}}$ «$\frac{-١٦\sqrt{٢}}{٥}$»

(٥) $\lim_{س \to \frac{-٣}{\sqrt{٢}}} \frac{٨س^{٦} - ٧٢٩}{\sqrt{٢}س + ٣}$ «-١٤٥٨»

(٦) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{جا^{٣}س - \frac{١}{٨}}{جا س - \frac{١}{٢}}$ «$\frac{٣}{٤}$»

(٧) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{-٥} - \frac{١}{٣٢}}{س^{-٧} - \frac{١}{١٢٨}}$ «$\frac{٢٠}{٧}$»

(٨) $\lim_{س \to -٢} \frac{٨س^{-٣} + ١}{س^{-٨} - \frac{١}{٢٥٦}}$ «-٩٦»

(٩) 📖 $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{-٨} - (١٦)^{-٢}}{س - ٢}$ «$\frac{-١}{٦٤}$»

(١٠) $\lim_{س \to ٤} \frac{س^{\frac{٧}{٢}} - ١٢٨}{س^{\frac{٥}{٢}} - ٣٢}$ «$\frac{٢٨}{٥}$»

(١١) 📖 $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٧]{س} - ١}{س - ١}$ «$\frac{١}{٧}$»

(١٢) $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س^{٣}} - ٨}{س^{٢} - ١٦}$ «$\frac{٣}{٨}$»

(١٣) 📖 $\lim_{س \to ١٦} \frac{\sqrt[٤]{س^{٧}} - ١٢٨}{س - ١٦}$ «١٤»

(١٤) $\lim_{س \to ١} \frac{س\sqrt[٥]{س} - ١}{س^{٢} - ١}$ «$\frac{٣}{٥}$»

(١٥) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{\frac{٢١}{٢}} - س^{\frac{١}{٢}}}{س^{\frac{١٤}{٣}} - س^{\frac{٢}{٣}}}$ «$\frac{٥}{٢}$»

(١٦) $\lim_{س \to ٤} \frac{\frac{١}{٢}س^{٤} - ١٢٨}{س - ٤}$ «١٢٨»

(١٧) $\lim_{س \to -١} \frac{س^{٤} - \frac{١}{س^{٤}}}{س^{٢} - \frac{١}{س^{٢}}}$ «$\frac{-٤}{٣}$»

(١٨) $\lim_{٢س \to ١} \frac{٥س^{٤} - \frac{٥}{١٦}}{٢س - ١}$ «$\frac{٥}{٤}$»

(١٩) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{١٠} - ١٠٢٤}{س^{٢} - ٣س + ٢}$ «٥١٢٠»

(٢٠) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{١٧} - ١}{٣س^{٢} + ٢س - ٥}$ «$\frac{١٧}{٨}$»

٤ أوجد كلاً مما يأتي :

① 📖 $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{(1 + \text{س})^{10} - 1}{(1 + \text{س})^{7} - 1}$ «$\frac{10}{7}$»

② 📖 $\lim\limits_{\text{س} \to 6} \dfrac{(\text{س} - 5)^{7} - 1}{\text{س} - 6}$ «7»

③ 📖 $\lim\limits_{\text{س} \to -2} \dfrac{(\text{س} + 3)^{5} - 1}{\text{س} + 2}$ «5»

④ $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{(\text{س} + 2)^{5} - 32}{\text{س}}$ «80»

⑤ 📖 $\lim\limits_{\text{هـ} \to 0} \dfrac{(3 + \text{هـ})^{4} - 81}{6\,\text{هـ}}$ «18»

⑥ $\lim\limits_{\text{هـ} \to 0} \dfrac{(1 + 4\,\text{هـ})^{8} - 1}{\text{هـ}}$ «32»

⑦ $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{(1 - 2\,\text{س})^{5} - 1}{5\,\text{س}}$ «-2»

⑧ $\lim\limits_{\text{هـ} \to 0} \dfrac{(\text{س} + 2\,\text{هـ})^{5} - \text{س}^{5}}{\text{هـ}}$ «$10\,\text{س}^{4}$»

⑨ 📖 $\lim\limits_{\text{هـ} \to 0} \dfrac{(\text{س} - 2\,\text{هـ})^{17} - \text{س}^{17}}{51\,\text{هـ}}$ «$-\frac{2}{3}\,\text{س}^{16}$»

⑩ $\lim\limits_{\text{س}+1 \to 0} \dfrac{(3\,\text{س} + 2)^{9} + 1}{\text{س} + 1}$ «27»

⑪ $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + 3\,\text{س}} - 1}{2\,\text{س}}$ «$\frac{1}{2}$»

⑫ $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{26 + \text{س}} - 3}{\text{س} - 1}$ «$\frac{1}{27}$»

⑬ $\lim\limits_{\text{س} \to 5} \dfrac{\sqrt[3]{\text{س} + 3} - 2}{\text{س} - 5}$ «$\frac{1}{12}$»

⑭ 📖 $\lim\limits_{\text{س} \to 7} \dfrac{\sqrt[5]{\text{س} + 25} - 2}{\text{س} - 7}$ «$\frac{1}{80}$»

⑮ 📖 $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{(\text{س} - 4)^{5} + 32}{\text{س} - 2}$ «80»

⑯ 📖 $\lim\limits_{\text{س} \to -2} \dfrac{(\text{س} + 3)^{5} - 1}{\text{س}^{2} - 4}$ «$-\frac{5}{4}$»

⑰ $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{\text{س}^{19} + \text{س}^{8} - 2}{\text{س} - 1}$ «27»

⑱ $\lim\limits_{\text{س} \to -1} \dfrac{\text{س}^{7} + \text{س}^{9} + 2}{\text{س} + 1}$ «16»

⑲ $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{\sqrt{\text{س}} + \sqrt[3]{\text{س}} - 2}{\text{س} - 1}$ «$\frac{5}{6}$»

⑳ $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{\text{س}^{5} + \text{س}^{2} - 36}{\text{س} - 2}$ «84»

㉑ $\lim\limits_{\text{س} \to 5} \dfrac{(\text{س} - 3)^{5} - 32}{\text{س}^{2} - 5\,\text{س}}$ «16»

㉒ $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{(\text{س} + 2)^{6} - 64}{\text{س}^{2} + 16\,\text{س}}$ «12»

㉓ $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{(2\,\text{س} - 3)^{5} + 243}{3\,\text{س}(\text{س} - 2)}$ «-135»

٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \dfrac{\text{س}^{٦} - ٦٤}{\text{س} - ٢} = $ ....

(أ) $٦ (٢)^{٥}$ (ب) ١٢٨ (جـ) $٦٤ (٢)^{٥}$ (د) ٦٣

② $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \dfrac{\text{س}^{أ} - \text{س}^{جـ}}{\text{س}^{أ} - \text{س}^{ء}} = $ ....

(أ) $\dfrac{أ + جـ}{أ + ء}$ (ب) $أ \text{س}^{جـ - ء}$ (جـ) $\dfrac{أ - جـ}{أ - ء}$ (د) $\dfrac{جـ}{ء}$

③ $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \dfrac{١ - \sqrt[ن]{\text{س}}}{١ - \sqrt[م]{\text{س}}} = $ ....

(أ) ١ (ب) $\dfrac{ن}{م}$ (جـ) -١ (د) $\dfrac{م}{ن}$

④ $\lim\limits_{\text{س} \to ٩} \dfrac{٣ - \sqrt{\text{س}}}{٢٧ - \sqrt{\text{س}^{٣}}} = $ ....

(أ) $\dfrac{١}{٩}$ (ب) $\dfrac{١}{٢٧}$ (جـ) ٣ (د) $\dfrac{-١}{٢٧}$

⑤ $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \left(\dfrac{\text{س}^{٦} - \text{س}^{٧} + \text{س}^{٨} - \text{س}^{٩}}{\text{س} - ١} \right) = $ ....

(أ) ٣٠ (ب) -٢ (جـ) ٣ (د) ٩

---

٦ أوجد قيمة أ إذا كانت : $\lim\limits_{\text{س} \to أ} \dfrac{\text{س}^{١٢} - أ^{١٢}}{\text{س}^{١٠} - أ^{١٠}} = ٣٠$ «±٥»

٧ أوجد قيمة ك إذا كانت : $\lim\limits_{\text{س} \to -١} \dfrac{\text{س}^{١٥} + ١}{\text{س} + ١} = \lim\limits_{\text{س} \to ك} \dfrac{\text{س}^{٥} - ك^{٥}}{\text{س}^{٣} - ك^{٣}}$ «±٣»

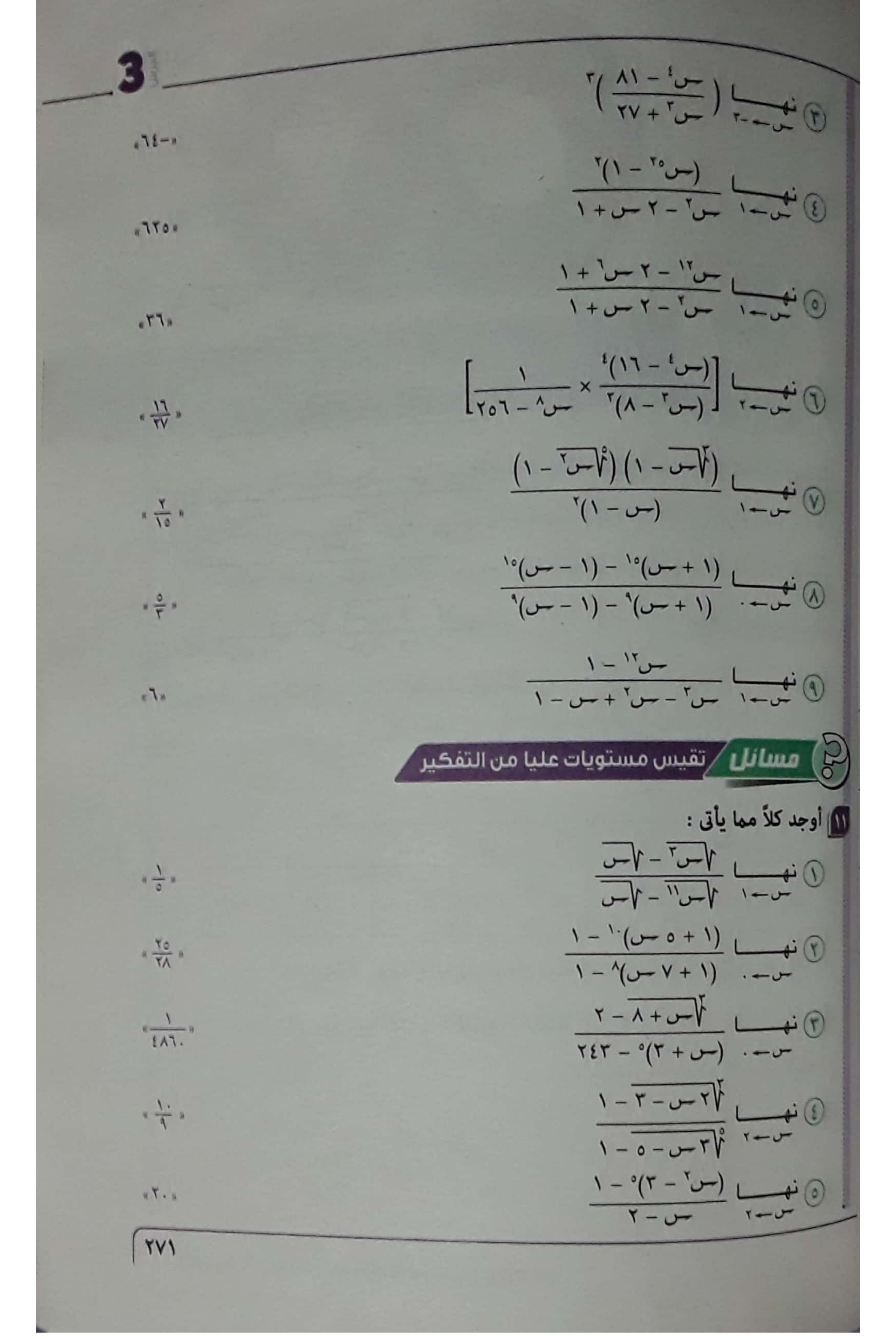
٨ 📖 إذا كانت : $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{س}^{ن} - ٦٤}{\text{س} - ٢} = ل$ أوجد قيمتى : ن ، ل «٦ ، ١٩٢»

٩ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{١}{\text{س}^{٤}}$ أوجد : $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{د}(\text{س}) - \text{د}(٢)}{\text{س} - ٢}$ «$\dfrac{-١}{٨}$»

١٠ أوجد كلاً مما يأتى :

① $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \left(\dfrac{\text{س}^{٣} - ٨}{\text{س}^{٥} - ٣٢} + \dfrac{\text{س}^{٤} - ١٦}{\text{س}^{٧} - ١٢٨} \right)$ «$\dfrac{٣١}{١٤٠}$»

② $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \left(\dfrac{\text{س}^{٥} - ٢٤٣}{\text{س}^{٢} - ٤} \times \dfrac{\text{س} - ٢}{\text{س} - ٣} \right)$ «٨١»



③ $\lim\limits_{\text{س} \to -3} \left(\dfrac{\text{س}^4 - 81}{\text{س}^3 + 27}\right)^3$ «−٦٤»

④ $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{(\text{س}^{25} - 1)^2}{\text{س}^2 - 2\,\text{س} + 1}$ «٦٢٥»

⑤ $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{\text{س}^{12} - 2\,\text{س}^6 + 1}{\text{س}^2 - 2\,\text{س} + 1}$ «٣٦»

⑥ $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \left[\dfrac{(\text{س}^4 - 16)^4}{(\text{س}^3 - 8)^3} \times \dfrac{1}{\text{س}^8 - 256}\right]$ «$\frac{16}{27}$»

⑦ $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{(\sqrt[3]{\text{س}} - 1)(\sqrt[5]{\text{س}^2} - 1)}{(\text{س} - 1)^2}$ «$\frac{2}{15}$»

⑧ $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{(1 + \text{س})^{15} - (1 - \text{س})^{15}}{(1 + \text{س})^9 - (1 - \text{س})^9}$ «$\frac{5}{3}$»

⑨ $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{\text{س}^{12} - 1}{\text{س}^3 - \text{س}^2 + \text{س} - 1}$ «٦»

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

١١ أوجد كلاً مما يأتي :

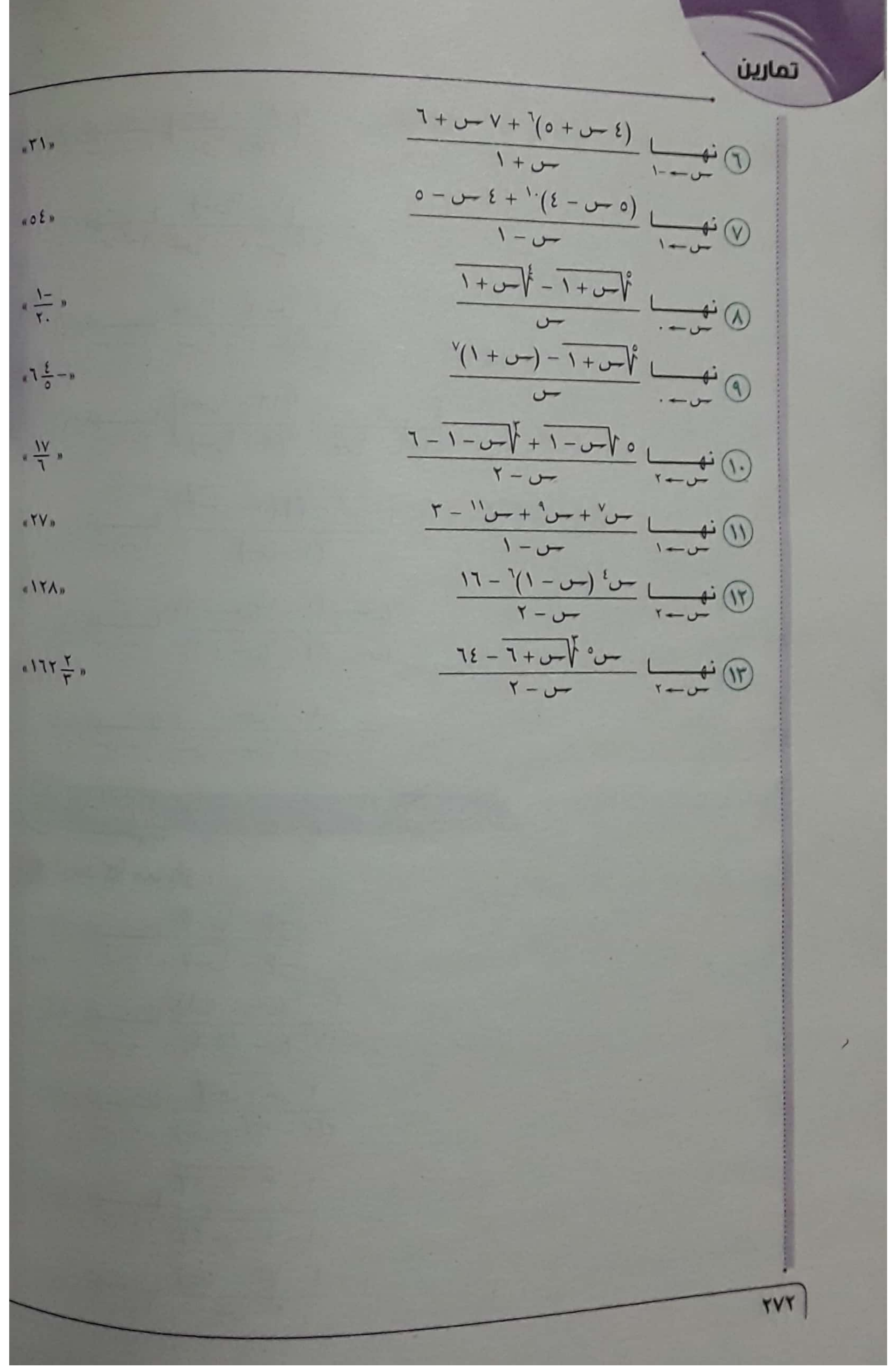
① $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{\sqrt{\text{س}^3} - \sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}^{11}} - \sqrt{\text{س}}}$ «$\frac{1}{5}$»

② $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{(1 + 5\,\text{س})^{10} - 1}{(1 + 7\,\text{س})^8 - 1}$ «$\frac{25}{28}$»

③ $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\text{س} + 8} - 2}{(\text{س} + 3)^5 - 243}$ «$\frac{1}{4860}$»

④ $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{2\,\text{س} - 3} - 1}{\sqrt[5]{3\,\text{س} - 5} - 1}$ «$\frac{10}{9}$»

⑤ $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{(\text{س}^2 - 3)^5 - 1}{\text{س} - 2}$ «٢٠»



⑥ $\lim\limits_{\text{س} \to -1} \dfrac{(4\text{س} + 5)^{6} + 7\text{س} + 6}{\text{س} + 1}$ «٣١»

⑦ $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{(5\text{س} - 4)^{10} + 4\text{س} - 5}{\text{س} - 1}$ «٥٤»

⑧ $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\sqrt[5]{\text{س} + 1} - \sqrt[4]{\text{س} + 1}}{\text{س}}$ «$\frac{-1}{20}$»

⑨ $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\sqrt[5]{\text{س} + 1} - (\text{س} + 1)^{7}}{\text{س}}$ «$-6\frac{4}{5}$»

⑩ $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{5\sqrt{\text{س} - 1} + \sqrt[3]{\text{س} - 1} - 6}{\text{س} - 2}$ «$\frac{17}{6}$»

⑪ $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{\text{س}^{7} + \text{س}^{9} + \text{س}^{11} - 3}{\text{س} - 1}$ «٢٧»

⑫ $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{\text{س}^{4}(\text{س} - 1)^{6} - 16}{\text{س} - 2}$ «١٢٨»

⑬ $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{\text{س}^{5}\sqrt[3]{\text{س} + 6} - 64}{\text{س} - 2}$ «$162\frac{2}{3}$»



الدرس 4

نهاية الدالة عند اللانهاية

المقصود ببحث نهاية الدالة عند اللانهاية هو التعرف على سلوك هذه الدالة عندما تكبر ـس (المتغير المستقل) كبرًا بلا حد ، فإذا كانت د (ـس) تقترب من عدد حقيقي معين (ل مثلاً) كلما كبرت ـس فإننا نقول إن الدالة د لها نهاية ل عندما تقترب ـس من اللانهاية ونكتب $\underset{ـس \leftarrow \infty}{نهـا}$ د (ـس) = ل

مثال توضيحى ١

إذا كانت د : د (ـس) = $\frac{٢ ـس + ١}{ـس}$ وأردنا دراسة سلوك الدالة د عندما تكبر ـس بدون حد أى عندما تقترب ـس من اللانهاية فإننا نفرض أن ـس تأخذ القيم ١ ، ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ، ... إلخ فنحصل على الجدول الآتى :

ـس	١	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠	....
د (ـس) = $\frac{٢ ـس + ١}{ـس}$	٣	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	٢,٠٠٠١	....

ومن هذا الجدول نلاحظ أنه عندما تأخذ ـس قيمًا متدرجة فى الكبر

فإن د (ـس) تقترب أكثر وأكثر من القيمة ٢ وبلغة النهايات فإننا نقول إن

د (ـس) ⟵ ٢ عندما ـس ⟵ ∞

ونكتب $\underset{ـس \leftarrow \infty}{نهـا}$ د (ـس) = ٢

ونلاحظ فى هذا المثال :

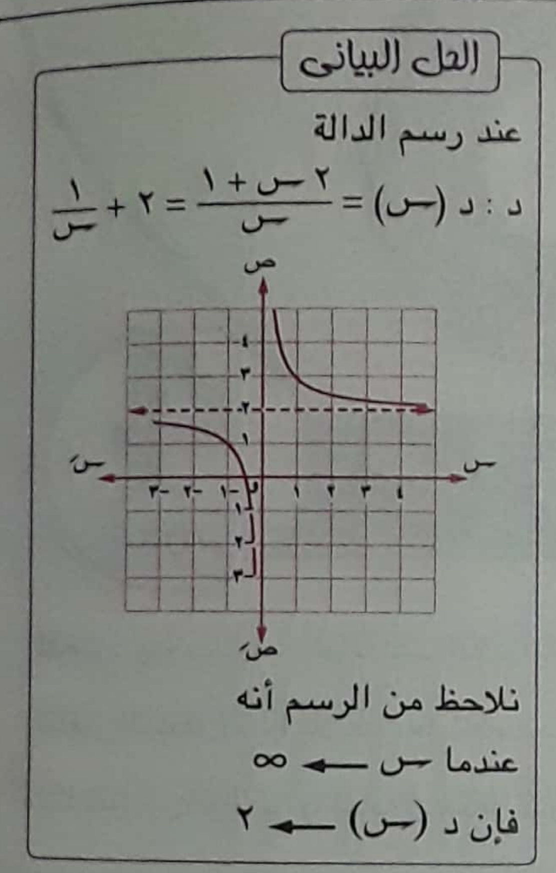
أننا لا نستطيع الحصول على نفس النتيجة عن طريق التعويض المباشر عن س = ∞

حيث سنحصل على $\frac{\infty}{\infty}$ (كمية غير معينة).

الحل البيانى

عند رسم الدالة

د : د (س) = $\frac{٢ س + ١}{س}$ = ٢ + $\frac{١}{س}$



نلاحظ من الرسم أنه

عندما س ⟵ ∞

فإن د (س) ⟵ ٢

مثال توضيحى ٢

إذا أردنا دراسة سلوك الدالة د حيث د (س) = $\frac{١}{س}$ عندما تأخذ س قيمًا متدرجة فى الكبر فإننا نكون الجدول التالى :

س	١	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠	....
د (س) = $\frac{١}{س}$	١	٠,١	٠,٠١	٠,٠٠١	٠,٠٠٠١	....

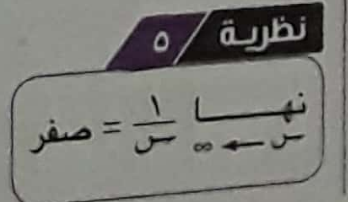
ونلاحظ من هذا الجدول أن :

د (س) ⟵ صفر

عندما س ⟵ ∞

أى أن : $\lim_{س \to \infty}$ $\frac{١}{س}$ = صفر

وهذا المثال التوضيحى يقودنا للنظرية الآتية :

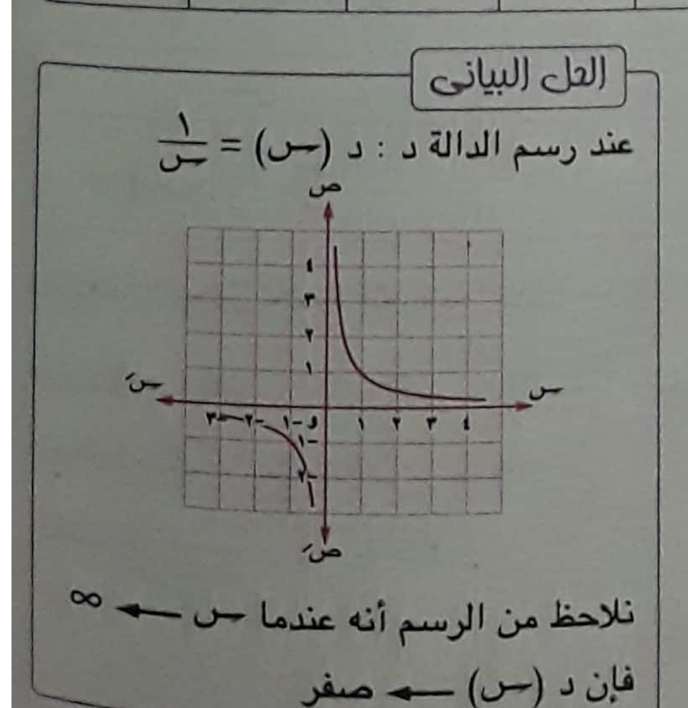


نظرية ٥

$\lim_{س \to \infty}$ $\frac{١}{س}$ = صفر

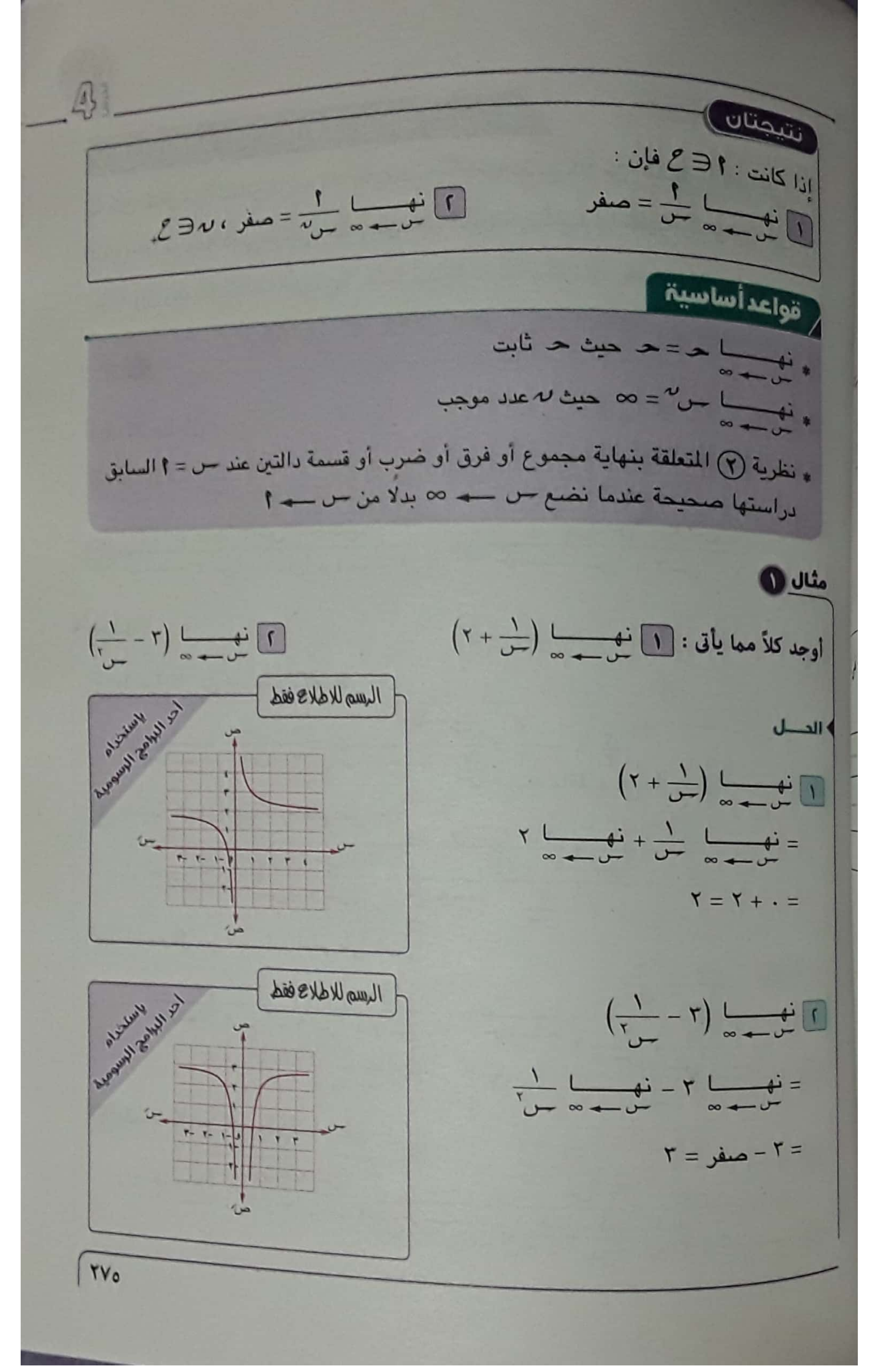
الحل البيانى

عند رسم الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س}$



نلاحظ من الرسم أنه عندما س ⟵ ∞

فإن د (س) ⟵ صفر



نتيجتان

إذا كانت : $\text{أ} \in \text{ح}$ فإن :

١ $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{أ}}{\text{س}} =$ صفر

٢ $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{أ}}{\text{س}^{\text{ن}}} =$ صفر ، $\text{ن} \in \text{ح}^{+}$

قواعد أساسية

* $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \text{جـ} = \text{جـ}$ حيث جـ ثابت
* $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \text{س}^{\text{ن}} = \infty$ حيث ن عدد موجب
* نظرية (٢) المتعلقة بنهاية مجموع أو فرق أو ضرب أو قسمة دالتين عند س = أ السابق دراستها صحيحة عندما نضع س ⟵ ∞ بدلاً من س ⟵ أ

مثال ١

أوجد كلاً مما يأتي : ١ $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \left(\frac{١}{\text{س}} + ٢\right)$ ٢ $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \left(٣ - \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)$

الحل

١ $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \left(\frac{١}{\text{س}} + ٢\right)$

$= \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{١}{\text{س}} + \lim\limits_{\text{س} \to \infty} ٢$

$= ٠ + ٢ = ٢$

٢ $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \left(٣ - \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)$

$= \lim\limits_{\text{س} \to \infty} ٣ - \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{١}{\text{س}^{٢}}$

$= ٣ -$ صفر $= ٣$

إيجاد نهاية دالة كسرية جبرية عند اللانهاية

إذا كان التعويض المباشر عن س = ∞ يعطى $\frac{\infty}{\infty}$ فإننا نقسم كلاً من البسط والمقام على المتغير س مرفوعًا لأعلى قوة فى المقام (درجة المقام) ، ثم نستخدم النظرية ونتيجتيها لإيجاد النهاية (إن وجدت)

مثال ٢

أوجد كلاً مما يأتى :

١) $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٢\text{س} - ٥}{٣\text{س} - ٧}$

٢) $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٥\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٦}{٢\text{س} - ٧\text{س}^٢}$

٣) $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٣\text{س}^٢ - ٥\text{س}}{٢\text{س}^٣ - ٦\text{س}^٢ + ٤\text{س} - ١}$

٤) $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}^٥ - ٢\text{س}^٢}{\text{س}^٤ + ٣\text{س}^٣ - ١}$

الحل

١) بقسمة كل من البسط والمقام على س

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٢\text{س} - ٥}{٣\text{س} - ٧} = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٢ - \frac{٥}{\text{س}}}{٣ - \frac{٧}{\text{س}}} = \frac{٢ - ٠}{٣ - ٠} = \frac{٢}{٣}$$

٢) بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٢$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٥\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٦}{٢\text{س} - ٧\text{س}^٢} = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٥ - \frac{٣}{\text{س}} + \frac{٦}{\text{س}^٢}}{\frac{٢}{\text{س}} - ٧} = -\frac{٥}{٧}$$

٣) بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٣$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٣\text{س}^٢ - ٥\text{س}}{٢\text{س}^٣ - ٦\text{س}^٢ + ٤\text{س} - ١} = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\frac{٣}{\text{س}} - \frac{٥}{\text{س}^٢}}{٢ - \frac{٦}{\text{س}} + \frac{٤}{\text{س}^٢} - \frac{١}{\text{س}^٢}}$$

$$= \frac{٠}{٢} = ٠$$

٤) بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٤$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}^٥ - ٢\text{س}^٢}{\text{س}^٤ + ٣\text{س}^٣ - ١} = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س} - \frac{٢}{\text{س}^٢}}{١ + \frac{٣}{\text{س}} - \frac{١}{\text{س}^٤}} = \frac{\infty - ٠}{١ + ٠ - ٠} = \infty$$

ملاحظــة هامة

* عند إيجاد $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{د}(\text{س})}{\text{ر}(\text{س})}$ حيث كل من د (س) ، ر (س) دالة كثيرة حدود فإن :

١ النهاية = عدد حقيقى لا يساوى الصفر «إذا كانت درجة البسط = درجة المقام».

٢ النهاية = صفر «إذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام».

٣ النهاية = ± ∞ «إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام».

مثال ٣

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{(\text{س} - ١)(\text{س}^٢ + ١)}{\text{س}^٢ (٥\text{س} - ١)}$

٢ $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{(٣\text{س}^٣ + ٢)^٢ (\text{س}^٢ - ١)^٣}{\text{س}^٥ (\text{س} + ١)^٧}$

الحـــل

١ بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٣$

$$\therefore \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{(\text{س} - ١)(\text{س}^٢ + ١)}{\text{س}^٢ (٥\text{س} - ١)} = \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\left(١ - \frac{١}{\text{س}}\right)\left(١ + \frac{١}{\text{س}^٢}\right)}{١\left(٥ - \frac{١}{\text{س}}\right)} = \frac{١ \times ١}{١ \times ٥} = \frac{١}{٥}$$

٢ بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^{١٢}$

$$\therefore \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{(٣\text{س}^٣ + ٢)^٢ (\text{س}^٢ - ١)^٣}{\text{س}^٥ (\text{س} + ١)^٧} = \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\left(٣ + \frac{٢}{\text{س}^٣}\right)^٢ \left(١ - \frac{١}{\text{س}^٢}\right)^٣}{١\left(١ + \frac{١}{\text{س}}\right)^٧}$$

$$= \frac{٣^٢ \times ١^٣}{١ \times ١^٧} = ٩$$

مثال ٤

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{٢\text{س}^٣ - ٩}{|٣\text{س}|^٣ + ٧}$

٢ $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{٥\text{س} - ٦}{\sqrt{٩\text{س}^٢ + ٧}}$

٣ $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt[٣]{٨\text{س}^٣ - ٥\text{س} + ١}}{٣\text{س} - ٢}$

٤ $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt[٥]{\text{س}^٥ + \text{س}^٣}}{\sqrt[٧]{\text{س}^٧ - \text{س}^٣}}$

٥ $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \left(\sqrt{\text{س}^٢ - \text{س} + ١} - \sqrt{\text{س}^٢ + \text{س} + ١}\right)$



الحـــل

1 $\because \text{س} \to \infty$ $\therefore |\text{س}| = \text{س}$ $\therefore$ النهاية $= \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{2\text{س}^3 - 9}{27\text{س}^3 + 7}$

وبقسمة كل من البسط والمقام على س^3

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{2\text{س}^3 - 9}{27\text{س}^3 + 7} = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{2 - \frac{9}{\text{س}^3}}{27 + \frac{7}{\text{س}^3}} = \frac{2}{27}$$

لاحظ أن

عندما $\text{س} \to \infty$

فإن : $\text{س} = |\text{س}| = \sqrt{\text{س}^2}$

$= \sqrt[3]{\text{س}^3} = \sqrt[4]{\text{س}^4} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

2 بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س} = \sqrt{\text{س}^2}$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{5\text{س} - 6}{\sqrt{9\text{س}^2 + 7}} = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{5 - \frac{6}{\text{س}}}{\sqrt{9 + \frac{7}{\text{س}^2}}} = \frac{5}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}$$

3 بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س} = \sqrt[3]{\text{س}^3}$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt[3]{8\text{س}^3 - 5\text{س} + 1}}{3\text{س} - 2} = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt[3]{8 - \frac{5}{\text{س}^2} + \frac{1}{\text{س}^3}}}{3 - \frac{2}{\text{س}}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{3} = \frac{2}{3}$$

4 بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س} = \sqrt[5]{\text{س}^5} = \sqrt[7]{\text{س}^7}$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt[5]{\text{س}^5 + \text{س}^3}}{\sqrt[7]{\text{س}^7 - \text{س}^2}} = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt[5]{1 + \frac{1}{\text{س}^2}}}{\sqrt[7]{1 - \frac{1}{\text{س}^5}}} = \frac{\sqrt[5]{1}}{\sqrt[7]{1}} = 1$$

5 $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \left(\sqrt{\text{س}^2 - \text{س} + 1} - \sqrt{\text{س}^2 + \text{س} + 1}\right)$

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} \left[\left(\sqrt{\text{س}^2 - \text{س} + 1} - \sqrt{\text{س}^2 + \text{س} + 1}\right) \times \frac{\sqrt{\text{س}^2 - \text{س} + 1} + \sqrt{\text{س}^2 + \text{س} + 1}}{\sqrt{\text{س}^2 - \text{س} + 1} + \sqrt{\text{س}^2 + \text{س} + 1}}\right]$$

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}^2 - \text{س} + 1 - (\text{س}^2 + \text{س} + 1)}{\sqrt{\text{س}^2 - \text{س} + 1} + \sqrt{\text{س}^2 + \text{س} + 1}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{-2\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2 - \text{س} + 1} + \sqrt{\text{س}^2 + \text{س} + 1}}$$

وبقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س} = \sqrt{\text{س}^2}$

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{-2}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}^2}}} = \frac{-2}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = -1$$

مثال ٥

أوجد كلاً مما يأتى :

١) $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{٥}{س^{٢}} - \frac{٧ س^{٣}}{س^{٤}} + ٢\right)$

٢) $\lim_{س \to \infty} (٤ س^{٢} + ٣ س + ٧)$

٣) $\lim_{س \to \infty} (٥ س^{٤} - س^{٣} - ٣)$

٤) $\lim_{س \to \infty} (٤ س^{٢} - ٥ س^{٣} + ١٣)$

الحل

١) $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{٥}{س^{٢}} - \frac{٧ س^{٣}}{س^{٤}} + ٢\right)$ = صفر − صفر + ٢ = ٢

٢) $\lim_{س \to \infty} (٤ س^{٢} + ٣ س + ٧)$ [لاحظ التعويض المباشر يعطى $\infty + \infty + ٧$]

$\therefore \lim_{س \to \infty} (٤ س^{٢} + ٣ س + ٧) = \infty$

٣) $\lim_{س \to \infty} (٥ س^{٤} - س^{٣} - ٣)$ [لاحظ التعويض المباشر يعطى $\infty - \infty - ٣$ أى كمية غير معينة]

$= \lim_{س \to \infty} س^{٤} \left(٥ - \frac{١}{س} - \frac{٣}{س^{٤}}\right)$ [نأخذ س عامل مشترك بأكبر أس]

$= \lim_{س \to \infty} س^{٤} \times \lim_{س \to \infty} \left(٥ - \frac{١}{س} - \frac{٣}{س^{٤}}\right) = \infty \times ٥ = \infty$

٤) $\lim_{س \to \infty} (٤ س^{٢} - ٥ س^{٣} + ١٣)$ [لاحظ التعويض المباشر يعطى $\infty - \infty$ أى كمية غير معينة]

$= \lim_{س \to \infty} س^{٣} \left(\frac{٤}{س} - ٥ + \frac{١٣}{س^{٣}}\right)$ [نأخذ س عامل مشترك بأكبر أس]

$= \lim_{س \to \infty} س^{٣} \times \lim_{س \to \infty} \left(\frac{٤}{س} - ٥ + \frac{١٣}{س^{٣}}\right) = \infty \times -٥ = -\infty$





تمارين 15
على نهاية الدالة عند اللانهاية

من أسئلة الكتاب المدرسي

١ أوجد كلاً من النهايات الآتية :

(١) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢س - ٥}{٣س + ٨}$ « $\frac{٢}{٣}$ »

(٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢س - ٥}{٣س^{٢} + ٨}$ «صفر»

(٣) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢س^{٢} - ٥}{٣س + ٨}$ «∞»

(٤) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٤ - ٢س}{٣س - ١}$ « $\frac{-٢}{٣}$ »

(٥) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٥ - ٦س - ٣س^{٢}}{٢س^{٢} + س + ٤}$ « $-\frac{٣}{٢}$ »

(٦) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ٢}{|س|^{٢} + ١}$ «١»

(٧) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٦س - ٤س^{٣}}{٢ - ٧س^{٣}}$ « $\frac{٤}{٧}$ »

(٨) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٤س^{٥} + ٥}{٨س^{٥} + س^{٤} - ٢}$ « $\frac{١}{٢}$ »

(٩) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٧س^{٢} + ١}{٤س^{٣} - ٨س + ١}$ «صفر»

(١٠) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٥س^{٧} + ٢س - ١}{٦س^{٤} + ١٣}$ «∞»

(١١) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٥ - ٧س^{٨} + ٣س^{١٤}}{٧ - ٦س^{١٤} + ٢س^{٦}}$ « $\frac{-١}{٢}$ »

(١٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٧}{س^{٢}} + \frac{٢}{س} - ٣\right)$ «-٣»

(١٣) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٥س^{-٣} + ٤س^{-٢} - ٣}{٧س^{-٣} - ٢س^{-٢} + ٨}$ « $\frac{-٣}{٨}$ »

(١٤) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٥س^{٣} - ٤س^{٢} + ٢}{٧ - س + |٢س|^{٣}}$ « $\frac{٥}{٨}$ »

(١٥) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} (س^{٣} + ٥س^{٢} + ١)$ «∞»

(١٦) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left[\sqrt{س^{٢} + ٥س + ٧} + س\right]$ «∞»

(١٧) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} (٥ + س - س^{٢})$ «$-\infty$»

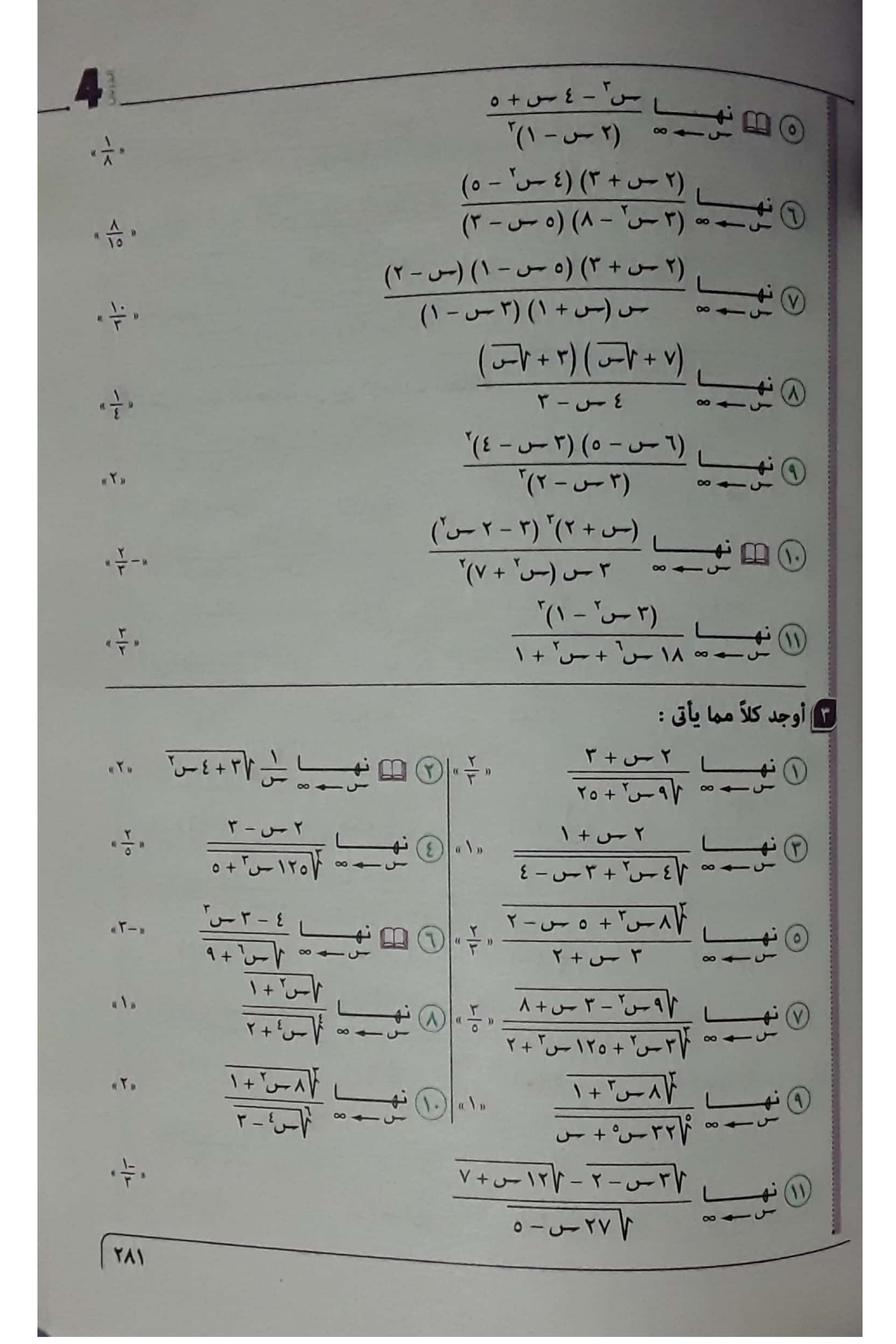
٢ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{(٣س + ٩)(٢س + ٧)}{(س + ١)(٥س + ٤)}$ « $\frac{٦}{٥}$ »

(٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣س^{٢} - ٤س + ٥}{(س + ٢)^{٢}}$ «٣»

(٣) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٦س^{٢} - ٥س}{(٣ - س)(٢ + س)}$ «-٦»

(٤) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٨س^{٣} - س + ١}{(س + ١)(٢س^{٢} - ٣)}$ «٤»



⑤ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} - ٤ س + ٥}{(٢ س - ١)^{٣}}$ «$\frac{١}{٨}$»

⑥ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{(٢ س + ٣)(٤ س^{٢} - ٥)}{(٣ س^{٢} - ٨)(٥ س - ٣)}$ «$\frac{٨}{١٥}$»

⑦ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{(٢ س + ٣)(٥ س - ١)(س - ٢)}{س (س + ١)(٣ س - ١)}$ «$\frac{١٠}{٣}$»

⑧ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{(٧ + \sqrt{س})(٣ + \sqrt{س})}{٤ س - ٣}$ «$\frac{١}{٤}$»

⑨ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{(٦ س - ٥)(٣ س - ٤)^{٢}}{(٣ س - ٢)^{٣}}$ «٢»

⑩ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٢)^{٣}(٣ - ٢ س^{٢})}{٣ س (س^{٢} + ٧)^{٢}}$ «$-\frac{٢}{٣}$»

⑪ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{(٣ س^{٢} - ١)^{٣}}{١٨ س^{٦} + س^{٢} + ١}$ «$\frac{٣}{٢}$»

---

٣ أوجد كلاً مما يأتى :

① $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢ س + ٣}{\sqrt{٩ س^{٢} + ٢٥}}$ «$\frac{٢}{٣}$»

② $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{س} \sqrt{٣ + ٤ س^{٢}}$ «٢»

③ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢ س + ١}{\sqrt{٤ س^{٢} + ٣ س - ٤}}$ «١»

④ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢ س - ٣}{\sqrt[٣]{١٢٥ س^{٣} + ٥}}$ «$\frac{٢}{٥}$»

⑤ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{٨ س^{٣} + ٥ س - ٢}}{٣ س + ٢}$ «$\frac{٢}{٣}$»

⑥ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٤ - ٣ س^{٣}}{\sqrt{س^{٦} + ٩}}$ «٣-»

⑦ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٩ س^{٢} - ٣ س + ٨}}{\sqrt[٣]{٣ س^{٢} + ١٢٥ س^{٣} + ٢}}$ «$\frac{٣}{٥}$»

⑧ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س^{٢} + ١}}{\sqrt[٤]{س^{٤} + ٢}}$ «١»

⑨ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{٨ س^{٣} + ١}}{\sqrt[٥]{٣٢ س^{٥} + س}}$ «١»

⑩ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{٨ س^{٣} + ١}}{\sqrt[٤]{س^{٤} - ٣}}$ «٢»

⑪ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٣ س - ٢} - \sqrt{١٢ س + ٧}}{\sqrt{٢٧ س - ٥}}$ «$\frac{-١}{٣}$»

⑫ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \frac{\sqrt{٤ س^{٢} + ٧} + ٣ س}{٢ س + ٩}$ «$\frac{٥}{٢}$»

⑬ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \frac{\sqrt[٦]{س^{٦} + ٨} - \sqrt[٦]{س^{٢} + ٤}}{\sqrt{س^{٢} + ٩}}$ «١»

⑭ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \frac{٣ س^{٢} - س - ٧}{(س + ١) \sqrt{٢٥ س^{٢} + ١}}$ «$\frac{٣}{٥}$»

٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \frac{س^{٢} + ٥}{٦} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) $\frac{٥}{٦}$ (جـ) ١ (د) ∞

② $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \frac{\sqrt{س} - ٣}{س} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −٢ (د) ∞

③ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} (٣ س^{-٥} + ٤ س^{-٢} + ٥) = \dots\dots\dots\dots$

(أ) ١٢ (ب) ∞ (جـ) ٥ (د) صفر

④ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \sqrt{\frac{٣ + ٢ س}{٤ س - ١}} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

⑤ 📖 $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \frac{س^{٣} + ٥}{س (٢ س^{٢} + ٣)} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) $\frac{٥}{٨}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٥}{٣}$

⑥ 📖 $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \frac{٥ + س^{-٢}}{٣ س^{-٢} + ١} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) ٥ (د) $\frac{١}{٣}$

⑦ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}} \frac{(١٢)^{\frac{١}{س}}}{س + ٧} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) $\frac{١٢}{٧}$ (د) ∞

⑧ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{ك^{\frac{1}{س}}}{٣} =$ .... حيث ك ثابت موجب.

(أ) $\frac{ك}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ٣ (د) ٣ك

⑨ إذا كانت : $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{أ س + ٦}{٢ س - ٧} = ٤$ فإن : أ = ... حيث أ ∈ ع

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

⑩ $\lim\limits_{س \to \infty} س^{ن} =$ صفر إذا كانت ن ∈ ....

(أ) ط (ب) ص (جـ) $ع^{+}$ (د) $ع^{-}$

⑪ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\sqrt{٤ س + \sqrt{س + \sqrt{س}}}}{٨ \sqrt{س}} =$ ....

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٨}$

⑫ إذا كان : أ > ب فإن : $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{س^{أ}}{س^{ب}} =$ ....

(أ) صفر (ب) ∞ (جـ) ١ (د) أ - ب

⑬ إذا كان : أ < ب < صفر فإن : $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{س^{أ}}{س^{ب}} =$ ....

(أ) ∞ (ب) - ∞ (جـ) صفر (د) أ - ب

⑭ إذا كانت : د (س) كثيرة حدود من الدرجة الثالثة ، ر (س) كثيرة حدود من الدرجة الخامسة فإن : $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{ر (س)}{س^{٢} د (س)} =$ ....

(أ) ± ∞ (ب) صفر

(جـ) عدد حقيقى ≠ صفر (د) ليس لها وجود.

---

٥ أوجد كلاً مما يأتى :

① 📖 $\lim\limits_{س \to \infty} \left[٧ + \frac{٢ س^{٢}}{(س + ٣)^{٢}}\right]$ «٩»

② 📖 $\lim\limits_{س \to \infty} \left[\frac{س}{٢ س + ١} + \frac{٣ س^{٢}}{(س - ٣)^{٢}}\right]$ «$\frac{٧}{٢}$»

③ 📖 $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٢}{٣} - \frac{٣\,س}{٢\,س + ٧} \right)$ «$\frac{-٥}{٦}$»

④ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٢\,س^{٣}}{٢\,س^{٢} + ١} - س \right)$ «صفر»

⑤ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{س^{٢} - ١}{س + ٢} - \frac{س^{٢} + ١}{س - ٢} \right)$ «−٤»

⑥ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{س^{٢} - ٢} - \sqrt{س^{٢} + س} \right)$ «$-\frac{١}{٢}$»

⑦ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{س} \left(\sqrt{٤\,س^{٢} + ١} - \sqrt{س^{٢} + ١} \right)$ «١»

⑧ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{س^{٢} + ٥\,س} - س \right)$ «$\frac{٥}{٢}$»

⑨ 📖 $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}}\, س \left(\sqrt{٤\,س^{٢} + ١} - ٢\,س \right)$ «$\frac{١}{٤}$»

⑩ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{(٢\,س - ١)^{٥}\,(س^{٢} + ٣)^{٦}}{(س + ١)^{٧}\,(س^{٢} - ٥)^{٥}}$ «٣٢»

⑪ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س + ١} - \sqrt{س - ١}}{\sqrt{٤\,س + ١} - \sqrt{٤\,س - ١}}$ «٢»

٦ **أوجد كلاً مما يأتى :**

① $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٣\,س^{٢} - ٥\,س + ١}{٤\,س^{٢} - ٧} \right)^{\frac{١}{س}}$ «١»

② $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{س + ١}{\sqrt{س^{٢} - ١}} + أ^{\frac{١}{س}} \right)$ **حيث أ موجبة.** «٢»

③ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٢\,س - ٣}{\sqrt[٣]{٢٧\,س^{٣} - ١٥\,س + ٢}} + ٨^{\frac{١}{س}} \right)$ «$١\frac{٢}{٣}$»

④ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٥\,س^{٢}}{١ - س^{٢}} - \sqrt[س]{١٣} \right)$ «−٦»

٧ **أوجد قيمتى أ ، ن إذا كانت** $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٤\,أ\,س^{ن} - ٤\,س + ٥}{٣ - ٩\,س + ٨\,س^{٢}} = ٣$ «٦ ، ٢»

٨ أوجد قيمة ا إذا كانت $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[3]{\text{ا}\text{س}^{٣} + ٣}}{\sqrt{٤\text{س}^{٢} + ٧}} = -١$ «-٨»

---

٩ إذا كانت $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{\text{ا}\text{س}^{٢} + ٣\,\text{ب}\,\text{س} + ٥} - ٢\text{س}\right) = ٣$

أوجد قيمة كل من : ا ، ب «٤ ، ٤»

---

١٠ أوجد قيمتى ا ، ب إذا كانت $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = ٥$ ، $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = ٢$

حيث $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{٢ - \text{ا}\text{س}^{٢}}{٣ - \text{ب}\,\text{س} + \text{س}^{٢}}$ «-٥ ، ٢»

---

١١ إذا كانت : $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{س}^{٢} + ١}{\text{س} + ١} - \text{ا}\text{س} - \text{ب}\right) = ٢$ أوجد قيمتى : ا ، ب «١ ، -٣»

---

١٢ أوجد قيمتى ا ، ب إذا كانت $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣} + ٢\text{س} + ١}{(\text{ا} + ١)\text{س}^{٤} + (٧ - \text{ب})\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢}} = \infty$

«-١ ، ٧»

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

١٣ أوجد كلاً مما يأتى :

① $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{-٢} + \text{س}^{-٤}}{(٢\text{س} + ٣)^{-٢}}$ «٤»

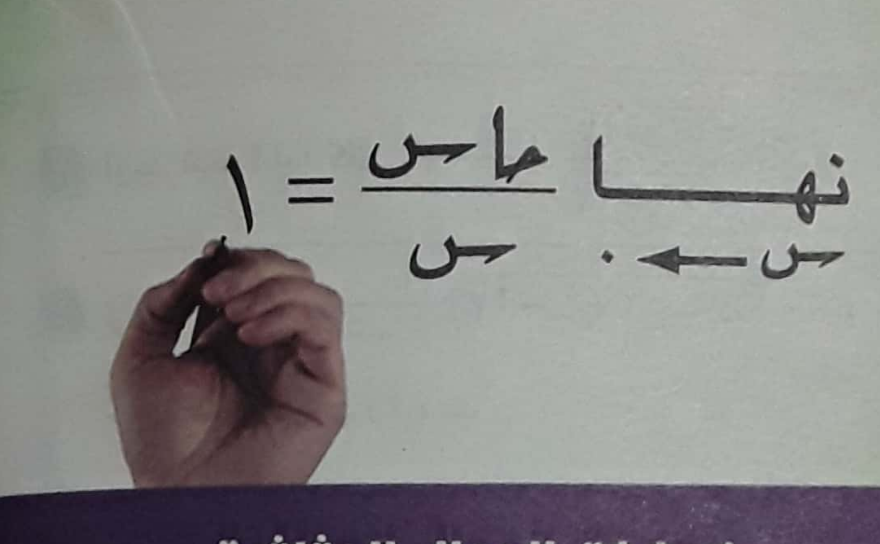
② $\underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نهـا}}\ \text{ن}\left[\left(\text{ا} + \dfrac{١}{\text{ن}}\right)^{٤} - \text{ا}^{٤}\right]$ «٤ا^{٣}»

③ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}}\ \text{س}\left[\left(٣ + \dfrac{١}{\text{س}}\right)^{٥} - ٢٤٣\right]$ «٤٠٥»

④ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{\text{س}^{٢} + ٢} - \text{س}\right)\sqrt{٢\text{س}^{٢} + ١}$ «$\sqrt{٢}$»

⑤ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٢\text{س}^{-١} - \text{س}^{-٢}\right)\sqrt{٤\text{س}^{٢} + ١}$ «٤»

⑥ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٥\text{س}\sqrt{\text{س}} + ١٦\text{س} - ٣\sqrt{\text{س}^{٢} - ١}}{\text{س} + \sqrt{٤\text{س}^{٣} + ١}}$ «$\frac{٥}{٢}$»



الدرس 5

نهايات الدوال المثلثية

نظرية

إذا كانت س قياس الزاوية بالتقدير الدائرى فإن :

١) $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا}\,س}{س} = ١$ ٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{ظا}\,س}{س} = ١$

* عند دراسة قيم الدالة د : د (س) = $\dfrac{\text{جا}\,س}{س}$ عندما س ← ٠ .

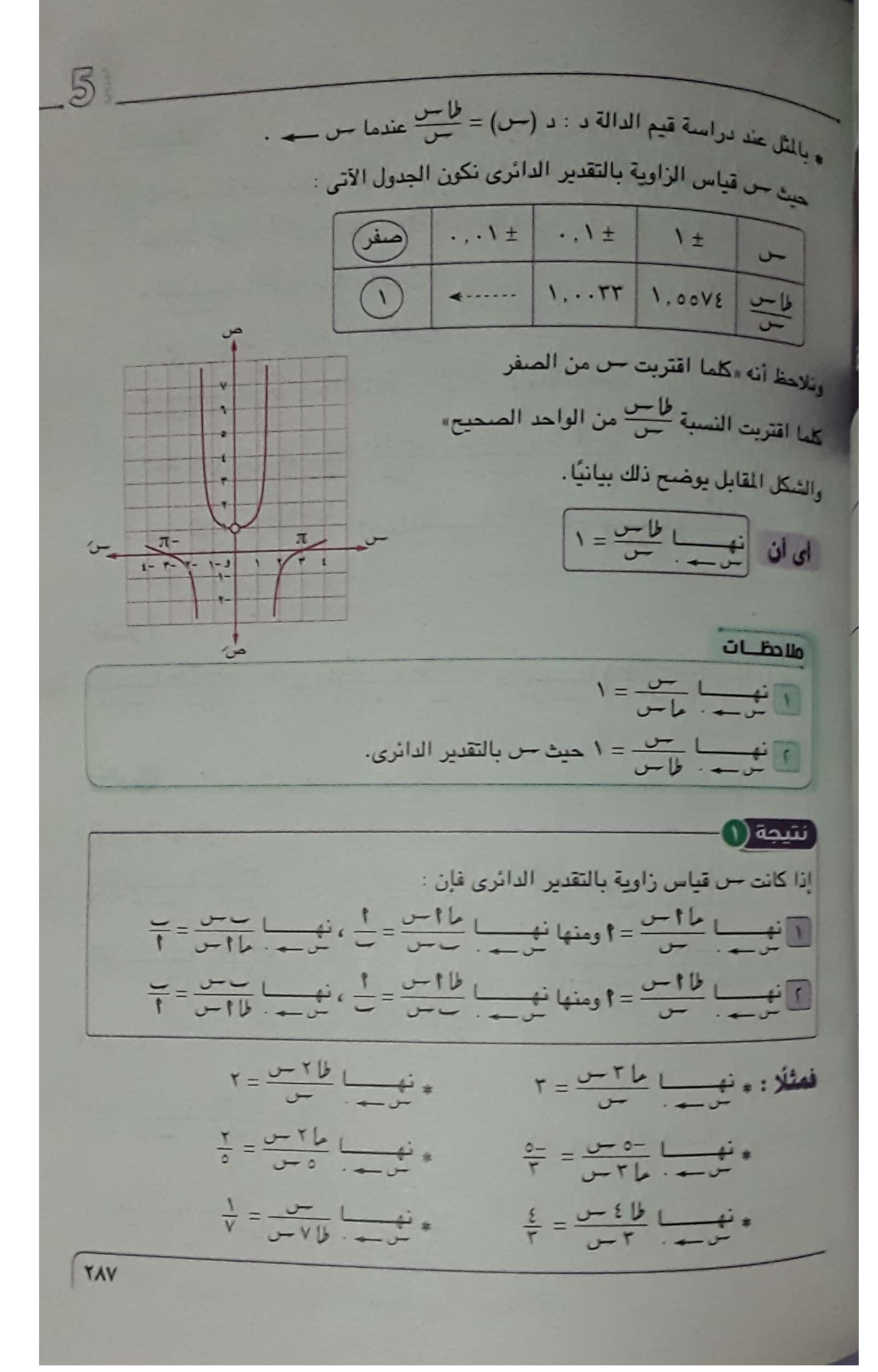
حيث س قياس الزاوية بالتقدير الدائرى نكون الجدول الآتى :

س	± ١	± ٠,١	± ٠,٠١	صفر
$\dfrac{\text{جا}\,س}{س}$	٠,٨٤١٥	٠,٩٩٨٣	←------	١

ونلاحظ أنه «كلما اقتربت س من الصفر كلما اقتربت النسبة $\dfrac{\text{جا}\,س}{س}$ من الواحد الصحيح»

والشكل المقابل يوضح ذلك بيانيًا .

أى أن $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا}\,س}{س} = ١$



* بالمثل عند دراسة قيم الدالة د : د (س) = $\frac{\text{طا س}}{\text{س}}$ عندما س ← ٠ .

حيث س قياس الزاوية بالتقدير الدائرى نكون الجدول الآتى :

س	١±	٠,١±	٠,٠١±	صفر
$\frac{\text{طا س}}{\text{س}}$	١,٥٥٧٤	١,٠٠٣٣	←------	١

ونلاحظ أنه «كلما اقتربت س من الصفر

كلما اقتربت النسبة $\frac{\text{طا س}}{\text{س}}$ من الواحد الصحيح»

والشكل المقابل يوضح ذلك بيانيًا.

أى أن $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{طا س}}{\text{س}} = ١$

ملاحظات

١ $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{س}}{\text{جا س}} = ١$

٢ $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{س}}{\text{طا س}} = ١$ حيث س بالتقدير الدائرى.

نتيجة ١

إذا كانت س قياس زاوية بالتقدير الدائرى فإن :

١ $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جا أ س}}{\text{س}} = \text{أ}$ ومنها $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جا أ س}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{ب س}}{\text{جا أ س}} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

٢ $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{طا أ س}}{\text{س}} = \text{أ}$ ومنها $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{طا أ س}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{ب س}}{\text{طا أ س}} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

فمثلًا :

* $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جا ٣ س}}{\text{س}} = ٣$

* $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{طا ٢ س}}{\text{س}} = ٢$

* $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{-٥ س}}{\text{جا ٣ س}} = \frac{-٥}{٣}$

* $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جا ٢ س}}{\text{٥ س}} = \frac{٢}{٥}$

* $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{طا ٤ س}}{\text{٣ س}} = \frac{٤}{٣}$

* $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{س}}{\text{طا ٧ س}} = \frac{١}{٧}$



ملاحظات

1. جا س ، جتا س معرفتان لجميع قيم س $\in$ ح أما ظا س فهى معرفة لجميع قيم س عدا عند س = $\frac{٢ن + ١}{٢}\pi$ ، ن $\in$ ص لذلك فإن :

* $\lim_{س \to أ}$ جا س = جا أ ، أ $\in$ ح

* $\lim_{س \to أ}$ جتا س = جتا أ ، أ $\in$ ح

* $\lim_{س \to أ}$ ظا س = ظا أ ، أ $\neq \frac{٢ن + ١}{٢}\pi$ ، ن $\in$ ص

2. لاحظ الفرق بين : $\lim_{س \to ٠} \frac{جا أ س^٢}{س^٢}$ ، $\lim_{س \to ٠} \frac{جا^٢ أ س}{س^٢}$

حيث : $\lim_{س \to ٠} \frac{جا أ س^٢}{س^٢}$ = أ بينما $\lim_{س \to ٠} \frac{جا^٢ أ س}{س^٢} = \lim_{س \to ٠} \left(\frac{جا أ س}{س}\right)^٢ = أ^٢$

فمثلاً :

$\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٣ س^٢}{س^٢}$ = ٣ بينما $\lim_{س \to ٠} \frac{جا^٢ ٣ س}{س^٢} = \lim_{س \to ٠} \left(\frac{جا ٣ س}{س}\right)^٢ = ٣^٢ = ٩$

مثال ١

أوجد كلاً مما يأتى :

1. $\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٢ س}{٣ س}$

2. $\lim_{س \to ٠} \frac{٤ س}{جا ٥ س}$

3. $\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٥ س}{٢ جا ٢ س}$

4. $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا س}{جا ٢ س}$

الحل

1. $\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٢ س}{٣ س} = \frac{٢}{٣}$

2. $\lim_{س \to ٠} \frac{٤ س}{جا ٥ س} = \frac{٤}{٥}$

٣ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{جا ٥س}{٢ جا ٣س} = \frac{١}{٢} \lim\limits_{س \to ٠} \frac{\frac{جا ٥س}{س}}{\frac{جا ٣س}{س}}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{\lim\limits_{س \to ٠} \frac{جا ٥س}{س}}{\lim\limits_{س \to ٠} \frac{جا ٣س}{س}} = \frac{١}{٢} \times \frac{٥}{٣} = \frac{٥}{٦}$

٤ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{طا س}{جا ٢س} = \lim\limits_{س \to ٠} \frac{\frac{طا س}{س}}{\frac{جا ٢س}{س}} = \frac{١}{٢}$

مثال ٢

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{طا^٢ ٢س}{٣ س^٢}$

٢ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{جا ٣س^٢ \, جتا س^٢}{٥ س^٢}$

الحل

١ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{طا^٢ ٢س}{٣ س^٢} = \frac{١}{٣} \lim\limits_{س \to ٠} \left(\frac{طا ٢س}{س}\right)^٢ = \frac{١}{٣} \times ٢^٢ = \frac{٤}{٣}$

٢ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{جا ٣س^٢ \, جتا س^٢}{٥ س^٢} = \lim\limits_{س \to ٠} \frac{جا ٣س^٢}{٥ س^٢} \times \lim\limits_{س \to ٠} جتا س^٢$

$= \frac{٣}{٥} \times ١ = \frac{٣}{٥}$

مثال ٣

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{٢س - ٣ جا س}{٣س + طا س}$

٢ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{س^٢ + ٥ طا^٢ ٣س}{٤ س^٢ - جا ٢س^٢}$

الحل

١ بقسمة كل من البسط والمقام على س

$\therefore \lim\limits_{س \to ٠} \frac{٢س - ٣ جا س}{٣س + طا س} = \lim\limits_{س \to ٠} \frac{٢ - ٣ \frac{جا س}{س}}{٣ + \frac{طا س}{س}} = \frac{٢ - ٣}{٣ + ١} = -\frac{١}{٤}$



٢ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢$

$$∴ \underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{س^٢ + ٥ \text{ طا}^٢ ٣ س}{٤ س^٢ - \text{حا} ٢ س^٢} = \underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{١ + ٥ \left(\frac{\text{طا} ٣ س}{س}\right)^٢}{٤ - \frac{\text{حا} ٢ س^٢}{س^٢}}$$

$$= \frac{١ + ٥ (٣)^٢}{٤ - ٢} = \frac{٤٦}{٢} = ٢٣$$

نتيجة ٢

$$\underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{١ - \text{حتا} س}{س} = \text{صفر}$$

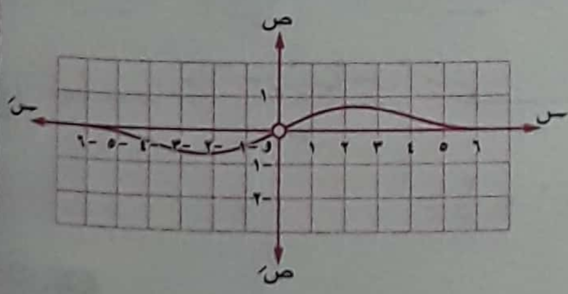
إثبات نتيجة ٢

$$\underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{١ - \text{حتا} س}{س} = \underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{١ - \text{حتا} س}{س} \times \frac{١ + \text{حتا} س}{١ + \text{حتا} س}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{١ - \text{حتا}^٢ س}{س (١ + \text{حتا} س)} = \underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{\text{حا}^٢ س}{س (١ + \text{حتا} س)}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{\text{حا} س}{س} \times \underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{\text{حا} س}{١ + \text{حتا} س}$$

$$= ١ \times \text{صفر} = \text{صفر}$$



* الشكل المقابل يمثل الدالة د : $د(س) = \frac{١ - \text{حتا} س}{س}$ ونلاحظ في الشكل أنه كلما اقتربت س من الصفر كلما اقتربت النسبة $\frac{١ - \text{حتا} س}{س}$ من الصفر أيضًا حيث س بالتقدير الدائري.

أى أن $\underset{س \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{١ - \text{حتا} س}{س} = \text{صفر}$

مثال ٤

أوجد كلاً مما يأتي : ١ $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١ - جتا س}}{\text{جا س}}$ ٢ $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١ - جتا س}}{\text{س}^{2}}$

الحل

١ $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١ - جتا س}}{\text{جا س}} = \underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{١ - جتا س}}{\text{س}} \times \dfrac{\text{س}}{\text{جا س}}\right)$

$= \underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١ - جتا س}}{\text{س}} \times \underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}}{\text{جا س}}$

$= \text{صفر} \times ١ = \text{صفر}$

٢ $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١ - جتا س}}{\text{س}^{2}} = \underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{١ - جتا س}}{\text{س}^{2}} \times \dfrac{\text{١ + جتا س}}{\text{١ + جتا س}}\right)$

$= \underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{١ - جتا}^{2}\text{س}}{\text{س}^{2}} \times \dfrac{١}{\text{١ + جتا س}}\right)$

$= \underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{جا}^{2}\text{س}}{\text{س}^{2}} \times \dfrac{١}{\text{١ + جتا س}}\right)$

$= \underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{جا س}}{\text{س}}\right)^{2} \times \underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{١}{\text{١ + جتا س}}\right)$

$= (١)^{2} \times \dfrac{١}{١ + ١} = \dfrac{١}{٢}$

تذكر أن

- $\text{جا}^{2}\text{س} + \text{جتا}^{2}\text{س} = ١$
- $١ + \text{ظا}^{2}\text{س} = \text{قا}^{2}\text{س}$
- $١ + \text{ظتا}^{2}\text{س} = \text{قتا}^{2}\text{س}$

مثال ٥

أوجد كلاً مما يأتي :

١ $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا (٣س - ١٢)}}{\text{س - ٤}}$ ٢ $\underset{\text{٢س} \to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا س}}{\text{٢س} - \pi}$

٣ $\underset{\text{س} \to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا س}}{\pi - \text{س}}$ ٤ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \text{س جا س}^{-1}$

الحل

١ $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا (٣س - ١٢)}}{\text{س - ٤}} = \underset{(\text{س} - ٤) \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا} \left[٣ (\text{س} - ٤)\right]}{\text{س - ٤}} = ٣$

٢ $\underset{\text{٢س} \to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا س}}{\text{٢س} - \pi} = \underset{(\frac{\pi}{٢} - \text{س}) \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا} (\frac{\pi}{٢} - \text{س})}{- ٢ (\frac{\pi}{٢} - \text{س})} = - \dfrac{١}{٢}$

٣ $\underset{س \leftarrow \pi}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا } س}{\pi - س} = \underset{(\pi - س) \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{- \text{طا } (\pi - س)}{\pi - س} = -١$

٤ $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} س \text{ حا } س^{-١} = \underset{\frac{١}{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا } \frac{١}{س}}{\frac{١}{س}} = ١$

مثال ٦

أوجد كلاً مما يأتي :

١ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} ٤ س \text{ قتا } ٥ س$

٢ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حتا } (\frac{\pi}{٢} - س)}{س}$

٣ $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{حتا } س}{س - \frac{\pi}{٢}}$

الحـــل

١ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} ٤ س \text{ قتا } ٥ س = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{٤ س}{\text{حا } ٥ س} = \frac{٤}{٥}$

٢ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حتا } (\frac{\pi}{٢} - س)}{س} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا } س}{س} = ١$

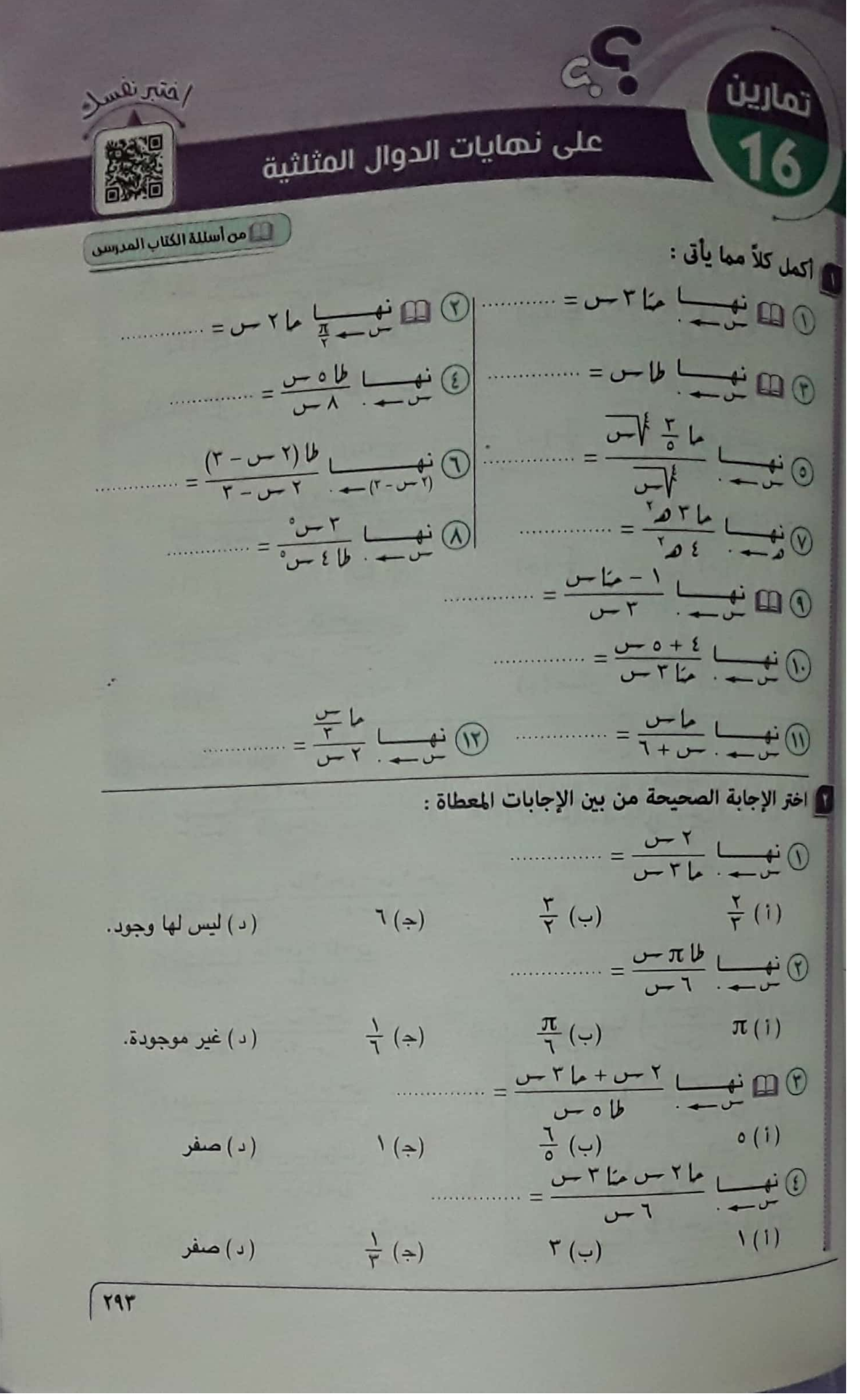
٣ $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{حتا } س}{س - \frac{\pi}{٢}} = \underset{(\frac{\pi}{٢} - س) \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا } (\frac{\pi}{٢} - س)}{- (\frac{\pi}{٢} - س)} = -١$

معلومة

إذا كانت س قياس الزاوية بالتقدير الستينى فإن :

١ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا } س}{س} = \frac{\pi}{١٨٠}$

٢ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا } س}{س} = \frac{\pi}{١٨٠}$



اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي

١ أكمل كلاً مما يأتي :

① $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \text{ جا } 3\text{س} = \ldots\ldots$

② $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{2}}{\text{نها}} \text{ جا } 2\text{س} = \ldots\ldots$

③ $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \text{ ظا س} = \ldots\ldots$

④ $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{ظا } 5\text{س}}{8\text{س}} = \ldots\ldots$

⑤ $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا } \frac{2}{5}\sqrt[4]{\text{س}}}{\sqrt[4]{\text{س}}} = \ldots\ldots$

⑥ $\underset{(2\text{س} - 3) \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{ظا }(2\text{س} - 3)}{2\text{س} - 3} = \ldots\ldots$

⑦ $\underset{\text{هـ} \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا } 3\text{هـ}^2}{4\text{هـ}^2} = \ldots\ldots$

⑧ $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \frac{3\text{س}^\circ}{\text{ظا } 4\text{س}^\circ} = \ldots\ldots$

⑨ $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \frac{1 - \text{جتا س}}{3\text{س}} = \ldots\ldots$

⑩ $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \frac{4 + 5\text{س}}{\text{جتا } 3\text{س}} = \ldots\ldots$

⑪ $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا س}}{\text{س} + 6} = \ldots\ldots$

⑫ $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا } \frac{\text{س}}{2}}{2\text{س}} = \ldots\ldots$

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \frac{2\text{س}}{\text{جا } 3\text{س}} = \ldots\ldots$

(أ) $\frac{2}{3}$　(ب) $\frac{3}{2}$　(جـ) ٦　(د) ليس لها وجود.

② $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{ظا } \pi\text{س}}{6\text{س}} = \ldots\ldots$

(أ) π　(ب) $\frac{\pi}{6}$　(جـ) $\frac{1}{6}$　(د) غير موجودة.

③ $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \frac{2\text{س} + \text{جا } 3\text{س}}{\text{ظا } 5\text{س}} = \ldots\ldots$

(أ) ٥　(ب) $\frac{6}{5}$　(جـ) ١　(د) صفر

④ $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا } 2\text{س جتا } 3\text{س}}{6\text{س}} = \ldots\ldots$

(أ) ١　(ب) ٣　(جـ) $\frac{1}{3}$　(د) صفر

⑤ 📖 $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\text{جا } \frac{١}{٢} \text{ س}}{\text{جا } \frac{٣}{٤} \text{ س}} =$ ....

(أ) $\frac{١}{٦}$　　(ب) $\frac{٣}{٨}$　　(جـ) $\frac{١}{٢}$　　(د) $\frac{٢}{٣}$

⑥ 📖 $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\text{ظا}^٢ \text{ ٢ س}}{\text{س جا ٣ س}} =$ ....

(أ) $\frac{٤}{٩}$　　(ب) $\frac{١}{٢}$　　(جـ) $\frac{٢}{٣}$　　(د) $\frac{٤}{٣}$

⑦ 📖 $\lim\limits_{س \to ٠} \text{٣ س ظتا ٢ س} =$ ....

(أ) ٦　　(ب) $\frac{٣}{٢}$　　(جـ) $\frac{٢}{٣}$　　(د) غير موجودة.

⑧ 📖 $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\text{جا ٢ س ظا ٣ س}}{\text{٤ س}^٢} =$ ....

(أ) $\frac{١}{٢}$　　(ب) $\frac{٣}{٤}$　　(جـ) $\frac{٣}{٢}$　　(د) ٦

⑨ $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\text{١ - ظا س}}{\text{جا س - جتا س}} =$ ....

(أ) ١　　(ب) - ١　　(جـ) صفر　　(د) ليس لها وجود.

٣ أوجد كلاً مما يأتى :

① $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\text{جا ٢ س}}{\text{ظا ٥ س}}$ «$\frac{٢}{٥}$»

② $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\text{جا } \frac{س}{٥}}{\text{ظا } \frac{\text{٢ س}}{٣}}$ «$\frac{٣}{١٠}$»

③ 📖 $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\text{جا ٣ س - جا ٢ س}}{\text{٥ س}}$ «$\frac{١}{٥}$»

④ $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\text{جا س + ظا س}}{\text{جا س}}$ «٢»

⑤ $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\text{س جتا ٣ س}}{\text{ظا ٢ س}}$ «$\frac{١}{٢}$»

⑥ $\lim\limits_{س \to ٠} \left(\dfrac{\text{٥ س}}{\text{جا س}} - \dfrac{\text{ظا ٢ س}}{\text{س}}\right)$ «٣»

⑦ $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\text{٣ س + جا س}}{\text{٢ س + ظا ٣ س}}$ «$\frac{٤}{٥}$»

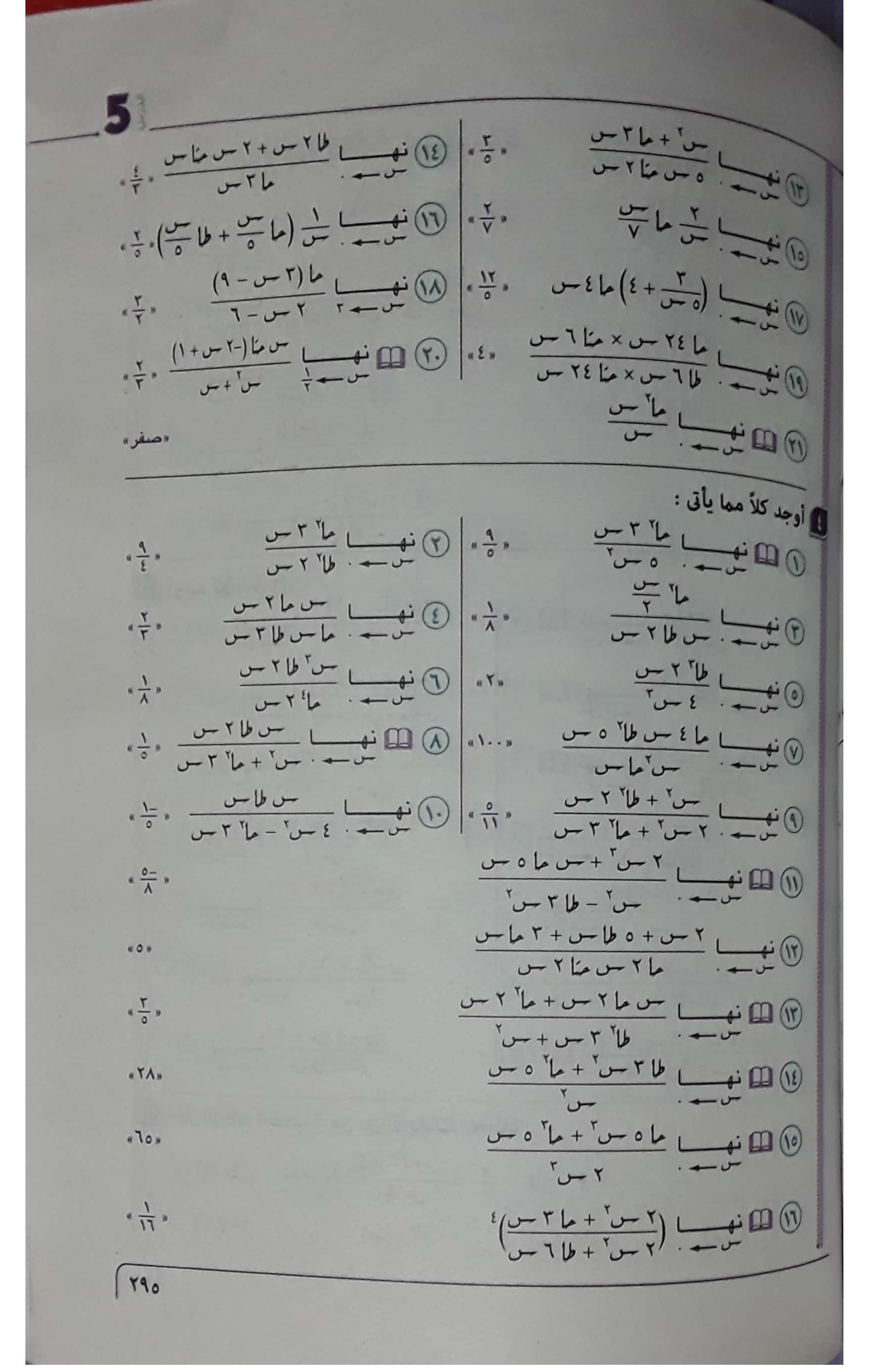
⑧ $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\text{٢ جا س + ٤ ظا ٢ س}}{\text{٢ س + جا ٣ س}}$ «٢»

⑨ $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\text{جا س - ٣ ظا س}}{\text{٥ س جتا س}}$ «$\frac{-٢}{٥}$»

⑩ $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\text{٣ س}}{\text{٥ ظا س - ٢ جا ٢ س}}$ «٣»

⑪ 📖 $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\text{س + س جتا س}}{\text{جا س جتا س}}$ «٢»

⑫ $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\text{ظا ٣ س - جا ٤ س}}{\text{س}^٢ \text{ + ٢ س}}$ «$-\frac{١}{٢}$»



(١٣) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢} + \text{حا } ٣\text{س}}{٥\text{س حتا } ٢\text{س}}$ «$\frac{٣}{٥}$»

(١٤) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا } ٢\text{س} + ٢\text{س حتا س}}{\text{حا } ٣\text{س}}$ «$\frac{٤}{٣}$»

(١٥) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢}{\text{س}} \text{ حا } \frac{\text{س}}{٧}$ «$\frac{٢}{٧}$»

(١٦) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{س}} \left(\text{حا } \frac{\text{س}}{٥} + \text{طا } \frac{\text{س}}{٥}\right)$ «$\frac{٢}{٥}$»

(١٧) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{٣}{٥\text{س}} + ٤\right) \text{حا } ٤\text{س}$ «$\frac{١٢}{٥}$»

(١٨) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا }(٣\text{س} - ٩)}{٢\text{س} - ٦}$ «$\frac{٣}{٢}$»

(١٩) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا } ٢٤\text{س} \times \text{حتا } ٦\text{س}}{\text{طا } ٦\text{س} \times \text{حتا } ٢٤\text{س}}$ «٤»

(٢٠) 📖 $\underset{\text{س} \to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س حتا }(-٢\text{س} + ١)}{\text{س}^{٢} + \text{س}}$ «$\frac{٢}{٣}$»

(٢١) 📖 $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا}^{٢}\text{ س}}{\text{س}}$ «صفر»

٤ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) 📖 $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا}^{٢}\text{ } ٣\text{س}}{٥\text{س}^{٢}}$ «$\frac{٩}{٥}$»

(٢) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا}^{٢}\text{ } ٣\text{س}}{\text{طا}^{٢}\text{ } ٢\text{س}}$ «$\frac{٩}{٤}$»

(٣) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا}^{٢}\text{ } \frac{\text{س}}{٢}}{\text{س طا } ٢\text{س}}$ «$\frac{١}{٨}$»

(٤) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س حا } ٢\text{س}}{\text{حا س طا } ٣\text{س}}$ «$\frac{٢}{٣}$»

(٥) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا}^{٣}\text{ } ٢\text{س}}{٤\text{س}^{٣}}$ «٢»

(٦) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٣}\text{ طا } ٢\text{س}}{\text{حا}^{٤}\text{ } ٢\text{س}}$ «$\frac{١}{٨}$»

(٧) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا } ٤\text{س طا}^{٢}\text{ } ٥\text{س}}{\text{س}^{٢}\text{حا س}}$ «١٠٠»

(٨) 📖 $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س طا } ٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + \text{حا}^{٢}\text{ } ٣\text{س}}$ «$\frac{١}{٥}$»

(٩) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢} + \text{طا}^{٢}\text{ } ٢\text{س}}{٢\text{س}^{٢} + \text{حا}^{٢}\text{ } ٣\text{س}}$ «$\frac{٥}{١١}$»

(١٠) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س طا س}}{٤\text{س}^{٢} - \text{حا}^{٢}\text{ } ٣\text{س}}$ «$\frac{-١}{٥}$»

(١١) 📖 $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}^{٣} + \text{س حا } ٥\text{س}}{\text{س}^{٢} - \text{طا } ٣\text{س}^{٢}}$ «$\frac{-٥}{٨}$»

(١٢) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س} + ٥\text{ طا س} + ٣\text{ حا س}}{\text{حا } ٢\text{س حتا } ٢\text{س}}$ «٥»

(١٣) 📖 $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س حا } ٢\text{س} + \text{حا}^{٢}\text{ } ٢\text{س}}{\text{طا}^{٢}\text{ } ٣\text{س} + \text{س}^{٢}}$ «$\frac{٣}{٥}$»

(١٤) 📖 $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا } ٣\text{س}^{٢} + \text{حا}^{٢}\text{ } ٥\text{س}}{\text{س}^{٢}}$ «٢٨»

(١٥) 📖 $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا } ٥\text{س}^{٣} + \text{حا}^{٣}\text{ } ٥\text{س}}{٢\text{س}^{٣}}$ «٦٥»

(١٦) 📖 $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{٢\text{س}^{٢} + \text{حا } ٣\text{س}}{٢\text{س}^{٢} + \text{طا } ٦\text{س}}\right)^{٤}$ «$\frac{١}{١٦}$»

(١٧) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا}^{٢}\,س + \text{ظا}^{٢}\,٣س + \text{ظا}^{٢}\,٥س}{س^{٢}}$ «٣٥»

(١٨) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}\,س \times \text{جا}^{٢}\,٢س \times \text{جا}^{٣}\,٤س}{س^{٦}}$ «٢٥٦»

(١٩) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا}\,٦س - \text{جا}\,(-٣س)}{س\,(\text{جتا}\,٥س + \text{جتا}\,٢س)}$ «$\frac{٩}{٢}$»

(٢٠) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}\,س}{\sqrt{س + ٢} - \sqrt{٢}}$ «$٢\sqrt{٢}$»

(٢١) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا}\,(س - ٣)}{س^{٣} - ٢٧}$ «$\frac{١}{٢٧}$»

(٢٢) 📖 $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}\,(س - ١)}{س^{٢} + س - ٢}$ «$\frac{١}{٣}$»

٥ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) 📖 $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٣\,(١ - \text{جتا}\,س)}{س}$ «٠»

(٢) 📖 $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جتا}\,س - ١}{\text{جا}\,س}$ «٠»

(٣) 📖 $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتا}\,س + \text{جا}\,س}{١ - \text{جتا}\,س - \text{جا}\,س}$ «−١»

(٤) 📖 $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٢ - \text{جتا}\,٢س - \text{جتا}\,٤س}{س}$ «٠»

(٥) 📖 $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}\,س\,(١ - \text{جتا}\,س)}{س^{٢}}$ «٠»

(٦) 📖 $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{س - س\,\text{جتا}\,س}{\text{جا}^{٢}\,٣س}$ «٠»

(٧) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتا}^{٢}\,٣س}{٤س^{٢}}$ «$\frac{٩}{٤}$»

(٨) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٤س^{٢}}{١ - \text{جتا}^{٢}\,\frac{١}{٢}س}$ «١٦»

(٩) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٣ - ٣\,\text{جتا}^{٢}\,٤س}{٨س^{٢}}$ «٦»

(١٠) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{قا}^{٢}\,س - ١}{س^{٢}}$ «١»

(١١) 📖 $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتا}\,س}{س^{٢}}$ «$\frac{١}{٢}$»

(١٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٤ - ٤\,\text{جتا}\,س}{\text{جا}^{٢}\,٣س}$ «$\frac{٢}{٩}$»

(١٣) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتا}\,٢س}{س\,\text{ظا}\,٢س}$ «١»

(١٤) 📖 $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتا}\,٣س}{\text{جتا}^{٢}\,٢س - ١}$ «$-\frac{٩}{٨}$»

٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{(أ + ٣)\,س}{\text{جا}\,أس} = \dfrac{٢}{٥}$ فإن : أ = ...

(أ) −٥ (ب) −٣ (جـ) −١ (د) ٣

② إذا كان : $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا } أ س}{ب س} = \frac{1}{3}$ ، $\lim_{س \to 0} \frac{\text{طا } ب س}{ج س} = \frac{4}{3}$

فإن : $\frac{أ}{ج} = $ ....

(أ) ٤ (ب) $\frac{1}{4}$ (جـ) $\frac{4}{9}$ (د) $\frac{1}{12}$

③ إذا كان : $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا } أ س}{\text{جا } ب س} = \frac{3}{5}$ فإن : $\frac{أ + ب}{أ - ب} = $ ....

(أ) −٤ (ب) ٨ (جـ) ٢ (د) ٤

④ $\lim_{س \to 0} \frac{(\text{جا } س + \text{جتا } س)^2 - 1}{3 س} = $ ....

(أ) ١ (ب) $\frac{1}{3}$ (جـ) $\frac{2}{3}$ (د) صفر

⑤ $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \text{جا}^2 س}{\text{جتا}^2 س} = $ ....

(أ) ١ (ب) $\frac{3}{2}$ (جـ) $\frac{3}{4}\pi$ (د) صفر

⑥ $\lim_{س \to 1} \frac{\text{طا }(س - 1)}{(\sqrt{س} - 1)} = $ ....

(أ) ٢ (ب) صفر (جـ) −٢ (د) $\frac{1}{2}$

⑦ $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا } س}{س} = $ .... حيث س بالتقدير الستينى

(أ) ١ (ب) $\frac{\pi}{180}$ (جـ) $\frac{180}{\pi}$ (د) π

⑧ $\lim_{س \to \pi} \frac{\text{جا } س}{\pi - س} = $ ....

(أ) ١ (ب) π^2 (جـ) π (د) $-\pi$

---

٧ أوجد كلاً مما يأتى :

① $\lim_{س \to 0}$ طتا ٣ س جا ٥ س «$\frac{5}{3}$»

② $\lim_{س \to 0}$ س (قتا ٢ س − طتا ٣ س) «$\frac{1}{6}$»

③ $\lim_{س \to 0}$ ٣ س طا ٢ س قتا^2 ٣ س «$\frac{2}{3}$»

④ $\lim_{س \to 0}$ ٦ $س^2$ قتا ٢ س طتا س «٣»

⑤ $\lim_{س \to 0}$ قتا ٤ س جتا $(\frac{\pi}{2} - س)$ «$\frac{1}{4}$»

(٦) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{س}}{\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)}$ «١»

(٧) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{س ظتا}^{٢}\,٢\,\text{س}}{\text{قتا}\,٣\,\text{س}}$ «$\frac{٣}{٤}$»

(٨) $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{ظا}\left(٢\,\text{س} - \frac{\pi}{٢}\right)}{٨\,\text{س} - ٢\pi}$ «$\frac{١}{٤}$»

(٩) $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جا}\left(٢\,\text{س} - \frac{\pi}{٢}\right)}{\text{ظا}\left(٤\,\text{س} - \pi\right)}$ «$\frac{١}{٢}$»

(١٠) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)}{\text{ظتا}\left(\frac{\pi}{٢} - ٣\,\text{س}\right)}$ «$\frac{١}{٣}$»

(١١) $\lim\limits_{(\text{س} - \pi) \to ٠} \frac{\text{جا س}}{\text{س} - \pi}$ «-١»

(١٢) $\lim\limits_{\text{س} \to -\pi} \frac{\text{ظا س}}{\text{س} + \pi}$ «١»

(١٣) $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٢\,\text{س} - \pi}{\text{جتا س}}$ «-٢»

(١٤) $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{ظتا س}}{\pi - ٢\,\text{س}}$ «$\frac{١}{٢}$»

(١٥) $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \frac{\text{جا}\,\pi\,\text{س}}{١ - \text{س}}$ «π»

(١٦) $\lim\limits_{\text{س} \to -١} \frac{١ + \text{س}}{\text{جتا}\,\frac{\pi}{٢}\,\text{س}}$ «$\frac{٢}{\pi}$»

(١٧) $\lim\limits_{\text{س} \to ١} (١ - \text{س})\,\text{ظا}\,\frac{\pi\,\text{س}}{٢}$ «$\frac{٢}{\pi}$»

٨ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ أوجد :

(١) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{د}(\text{س})$ «١»

(٢) $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}} \text{د}(\text{س})$ «$\frac{٢}{\pi}$»

(٣) $\lim\limits_{\text{س} \to \pi} \text{د}(\text{س})$ «صفر»

٩ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) $\lim\limits_{\text{س} \to ٥} \frac{\text{جا}(\text{س} - ٥)}{\text{س}^{٢} - ٢٥}$ «$\frac{١}{١٠}$»

(٢) $\lim\limits_{\text{س} \to ٥} \frac{\text{جا}^{٢}(\text{س} - ٥)}{(\text{س} - ٥)^{٢}}$ «١»

(٣) $\lim\limits_{\text{س} \to ٥} \frac{\text{جا}(\text{س} - ٥)^{٢}}{(\text{س} - ٥)}$ «صفر»

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

١٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جتا س} - \text{جتا}^{\text{أ}}\,\text{س}}{\text{س}^{٢}} = ١$ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) ٣

② $\lim_{س \to 0}$ س ظتا $\left(\frac{2 س + \pi}{2}\right)$ = ...

(أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) صفر (جـ) -1 (د) $\frac{1}{2}$

③ $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - ظا س}{جتا س - جا س}$ = ...

(أ) 1 (ب) -1 (جـ) 2 (د) $\sqrt{2}$

④ $\lim_{س \to \sqrt{5}} \frac{جا (س^2 - 5)}{ظا \pi س^2}$ = ...

(أ) $\frac{5}{\pi}$ (ب) $\frac{2}{\pi}$ (جـ) $\frac{1}{\pi}$ (د) $\frac{-5}{\pi}$

⑤ $\lim_{س \to 0} \frac{جا س + جا 2 س + جا 3 س + \cdots + جا 10 س}{ظا س + ظا 2 س + ظا 3 س + \cdots + ظا 10 س}$ = ...

(أ) صفر (ب) 1 (جـ) 10 (د) 55

---

11 أوجد كلاً مما يأتى :

① $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{3 ظا^2 س - 4 ظا س + 7}{5 + 2 ظا^2 س}$ «$\frac{3}{2}$»

② $\lim_{س \to -1} \frac{جا (س^2 - س - 2)}{س + 1}$ «-3»

③ $\lim_{س \to \infty}$ س $\left(ظا \frac{4}{س} + جا \frac{3}{س}\right)$ «7»

④ 📖 $\lim_{س \to 0} \frac{جا (جا س)}{5 جا س}$ «$\frac{1}{5}$»

⑤ 📖 $\lim_{س \to 0} \frac{جا (1 - جتا س)}{1 - جتا س}$ «1»

⑥ $\lim_{س \to 0} \frac{ظا (ظا 5 س)}{4 س}$ «$\frac{5}{4}$»

⑦ $\lim_{س \to 0} \frac{1}{س} \left(\frac{2 ظا س}{1 + ظا^2 س}\right)$ «2»

⑧ $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{ظا (جتا س)}{2 س - \pi}$ «$\frac{-1}{2}$»

⑨ $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - جا س}{2 س - \pi}$ «صفر»

⑩ $\lim_{2 س \to \pi} \left(\frac{\pi}{2} - س\right)$ ظتا $(\pi - 2 س)$ «$\frac{1}{2}$»

⑪ $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{جتا س}{جتا 3 س}$ «$\frac{-1}{3}$»



الدرس 6

بحث وجود نهاية للدالة مجزأة المجال

نلاحظ أن الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٢ س + ١ & ، س < ٢ \\ ٣ - س^٢ & ، س \geq ٢ \end{cases}$ مجزأة المجال

أى أن

د (س) = ٢ س + ١ لقيم س ∈]- ∞ ، ٢[

د (س) = ٣ - $س^٢$ لقيم س ∈ [٢ ، ∞[

فمثلًا : د (-٣) = ٢ (-٣) + ١ = -٥ ، د (٤) = ٣ - $(٤)^٢$ = -١٣

وقد سبق وشرحنا كيفية إيجاد قيمة النهاية اليمنى واليسرى لمثل هذه الدوال بيانيًا ولكننا الآن نشرح كيفية تحقيق ذلك جبريًا (إن أمكن)

تعريف

الدالة د : د (س) تؤول للنهاية ل عندما س ← أ إذا وفقط إذا كانت نهايتاها اليمنى واليسرى عند أ موجودتين وكل منهما تساوى ل

أى أن $\underset{س \leftarrow أ}{نها}$ د (س) = ل ⟺ د $(أ^+)$ = د $(أ^-)$ = ل

ملاحظات

١ عند إيجاد $\underset{س \leftarrow أ}{نها}$ د (س) ليس من الضرورى أن تكون الدالة معرفة عند س = أ ، فقط يجب أن تكون معرفة فى فترة على يسار أ وفترة أخرى على يمين أ

٢ عند إيجاد نهــا$_{س \leftarrow أ}$ د (س) يراعى بحث كل من النهاية اليمنى والنهاية اليسرى للدالة ثم المقارنة بين النهايتين (إن وجدتا) كما يلى :

* إذا كان : د $(أ^+)$ = د $(أ^-)$ = ل   فإن : نهــا$_{س \leftarrow أ}$ د (س) = ل
* إذا كان : د $(أ^+)$ ≠ د $(أ^-)$ فإن : نهــا$_{س \leftarrow أ}$ د (س) غير موجودة

٣ أما إذا كانت قاعدة الدالة واحدة على يمين ويسار أ مباشرة فيمكن بحث نهاية الدالة مباشرة دون بحث النهاية اليمنى واليسرى.

مثال ١

إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ٣ س + ١ & ، س < ١ \\ ٥ - س & ، س > ١ \end{cases}$ فاوجد كلًا من :

١ نهــا$_{س \leftarrow -٢}$ د (س)   ٢ نهــا$_{س \leftarrow ٣}$ د (س)   ٣ نهــا$_{س \leftarrow ١}$ د (س)

الحل

١ ∵ الدالة لها نفس القاعدة على يمين ويسار س = -٢ مباشرة وهى د (س) = ٣ س + ١

∴ نهــا$_{س \leftarrow -٢}$ د (س) = نهــا$_{س \leftarrow -٢}$ (٣ س + ١)

= ٣ (-٢) + ١ = -٥

٢ ∵ الدالة لها نفس القاعدة على يمين ويسار س = ٣ مباشرة وهى : د (س) = ٥ - س

∴ نهــا$_{س \leftarrow ٣}$ د (س) = نهــا$_{س \leftarrow ٣}$ (٥ - س) = ٥ - ٣ = ٢

٣ ∵ قاعدة الدالة على يسار ١ تختلف عن قاعدتها على يمين ١ لذلك يجب بحث كل من النهاية اليمنى واليسرى للدالة عند س = ١

∵ د (١^-) = نهــا$_{س \leftarrow ١^-}$ (٣ س + ١) = ٣ × ١ + ١ = ٤

> **لاحظ أن**
>
> الدالة د قاعدتها على يسار س = ١
> هى د (س) = ٣ س + ١
> وقاعدتها على يمين س = ١
> هى د (س) = ٥ - س

، د (١^+) = نهــا$_{س \leftarrow ١^+}$ (٥ - س) = ٥ - ١ = ٤

∴ د (١^-) = د (١^+) = ٤

∴ نهــا$_{س \leftarrow ١}$ د (س) = ٤

مثال ٢

إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} س^2 + 2 & ، س \leq -2 \\ 2س + 3 & ، س > -2 \end{cases}$ فابحث وجود : $\lim_{س \to -2}$ د (س)

الحل

∵ د (-2^-) = $\lim_{س \to -2^-}$ $(س^2 + 2)$ = $(-2)^2 + 2 = 6$

، د (-2^+) = $\lim_{س \to -2^+}$ $(2س + 3)$ = $2(-2) + 3$

$= -1$

لاحظ أن

رغم أن الدالة معرفة عند س = −٢ حيث د (−٢) = ٦ إلا أن ذلك لا دخل له فى وجود أو عدم وجود نهاية للدالة عند س = −٢

∵ د (-2^-) ≠ د (-2^+)

∴ $\lim_{س \to -2}$ د (س) غير موجودة

مثال ٣

إذا كانت : د (س) = $\frac{|س - 3|}{س - 3}$ ابحث وجود : $\lim_{س \to 3}$ د (س)

الحل

∵ $|س - 3|$ = $\begin{cases} س - 3 & ، س \geq 3 \\ -(س - 3) & ، س < 3 \end{cases}$

∴ د (س) = $\begin{cases} \frac{س - 3}{س - 3} & ، س > 3 \\ \frac{-(س - 3)}{س - 3} & ، س < 3 \end{cases}$ = $\begin{cases} 1 & ، س > 3 \\ -1 & ، س < 3 \end{cases}$

∴ د $(3^+) = 1$ ، د $(3^-) = -1$ ∴ د (3^+) ≠ د (3^-)

∴ $\lim_{س \to 3}$ د (س) غير موجودة

مثال ٤

إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \text{س}\,|\text{س}| - ١ & ، \text{س} < ٠ \\ \dfrac{|\text{س}|}{\text{س}} - ٢ & ، \text{س} > ٠ \end{cases}$ فأوجد : $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ د (س)

الحل

$\because |\text{س}| = \begin{cases} \text{س} & ، \text{س} \geq ٠ \\ -\text{س} & ، \text{س} < ٠ \end{cases}$

$\therefore$ د (س) = $\begin{cases} \text{س}\,(-\text{س}) - ١ & ، \text{س} < ٠ \\ \dfrac{\text{س}}{\text{س}} - ٢ & ، \text{س} > ٠ \end{cases}$ = $\begin{cases} -\text{س}^{٢} - ١ & ، \text{س} < ٠ \\ -١ & ، \text{س} > ٠ \end{cases}$

$\because$ د (٠^{-}) = $\underset{\text{س} \leftarrow ٠^{-}}{\text{نهـا}}$ $(-\text{س}^{٢} - ١) = -١$ ، د (٠^{+}) = $\underset{\text{س} \leftarrow ٠^{+}}{\text{نهـا}}$ $(-١) = -١$

$\therefore$ د (٠^{-}) = د (٠^{+}) = -١ $\therefore$ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ د (س) = -١

ملاحظـة

إذا كانت : ص = |د (س)| حيث د دالة كثيرة حدود فإن : $\underset{\text{س} \leftarrow \text{ا}}{\text{نهـا}}$ ص = |د (ا)|

وذلك باستخدام التعويض المباشر (ولا داعى لإعادة تعريف المقياس).

فمثلًا : إذا كانت : د (س) = $|\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} + ٣|$ فإن : $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ د (س) = صفر

، إذا كانت : د (س) = $|\text{س} + ١| - |\text{س} - ٣|$ فإن : $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ د (س) = ٤

مثال ٥

إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ٢\,\text{س} + ٤ & ، \text{س} < -٣ \\ ٣\,\text{س} + ٧ & ، -٣ < \text{س} < ٥ \\ ٥ - \text{س} & ، \text{س} > ٥ \end{cases}$

فابحث وجود : ١ $\underset{\text{س} \leftarrow -٣}{\text{نهـا}}$ د (س) ٢ $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}$ د (س)

الحل

١ د (-٣^{-}) = $\underset{\text{س} \leftarrow -٣^{-}}{\text{نهـا}}$ $(٢\,\text{س} + ٤) = -٦ + ٤ = -٢$

، د (-٣^{+}) = $\underset{\text{س} \leftarrow -٣^{+}}{\text{نهـا}}$ $(٣\,\text{س} + ٧) = ٣\,(-٣) + ٧ = -٢$

$\therefore$ د (-٣^{-}) = د (-٣^{+}) = -٢ $\therefore$ $\underset{\text{س} \leftarrow -٣}{\text{نهـا}}$ د (س) = -٢



٢ د (٥⁻) = $\lim\limits_{س \to ٥^-}$ (٣ س + ٧) = ١٥ + ٧ = ٢٢

، د (٥⁺) = $\lim\limits_{س \to ٥^+}$ (٥ − س) = ٥ − ٥ = صفر

∵ د (٥⁻) ≠ د (٥⁺) ∴ $\lim\limits_{س \to ٥}$ د (س) غير موجودة

مثال ٦

إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{جا}(س - ٤)}{(س - ٤)} & ، س < ٤ \\ \text{طا}\frac{\pi}{١٦} س & ، ٤ < س < ٨ \end{cases}$ أوجد : $\lim\limits_{س \to ٤}$ د (س)

الحـل

د (٤⁻) = $\lim\limits_{س \to ٤^-} \frac{\text{جا}(س - ٤)}{(س - ٤)} = \lim\limits_{(س - ٤) \to ٠} \frac{\text{جا}(س - ٤)}{(س - ٤)} = ١$

، د (٤⁺) = $\lim\limits_{س \to ٤^+}$ طا $\frac{\pi}{١٦}$ س = طا $\frac{\pi}{٤}$ = ١

∴ د (٤⁻) = د (٤⁺) = ١ ∴ $\lim\limits_{س \to ٤}$ د (س) = ١

نهاية الدالة المعرفة على فترة عند أحد طرفيها

إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المفتوحة]أ ، ب[أو المغلقة [أ ، ب] فإننا نلاحظ أن :

١ الدالة ليست معرفة على يسار النقطة أ فإننا نبحث النهاية اليمنى فقط [د (أ⁺)]

وتكون فى هذه الحالة : $\lim\limits_{س \to أ^-}$ د (س) ، $\lim\limits_{س \to أ}$ د (س) غير موجودتين.

٢ الدالة ليست معرفة على يمين النقطة ب فإننا نبحث النهاية اليسرى فقط [د (ب⁻)]

وتكون فى هذه الحالة : $\lim\limits_{س \to ب^+}$ د (س) ، $\lim\limits_{س \to ب}$ د (س) غير موجودتين.

أى أن نهاية الدالة عند النقطة الطرفية غير موجودة ويكون للدالة عند هذه النقطة نهاية من جهة واحدة فقط [يمنى أو يسرى]

مثال ٧

إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{٢ س}{جا س} & ، \quad -\frac{\pi}{٢} < س < ٠ \\ ٢ جتا \frac{٤}{٣} س & ، \quad ٠ < س < \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

ابحث وجود : [١] د $(-\frac{\pi}{٢}^{+})$ ، د $(-\frac{\pi}{٢}^{-})$ ، $\lim_{س \to -\frac{\pi}{٢}}$ د (س)

[٢] $\lim_{س \to ٠}$ د (س) [٣] $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}}$ د (س)

الحل

مجال الدالة د هو $]-\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}[- \{٠\}$

$-\frac{\pi}{٢}$ صفر $\frac{\pi}{٢}$

[١] د $(-\frac{\pi}{٢}^{+}) = \lim_{س \to -\frac{\pi}{٢}^{+}}$ د (س) $= \lim_{س \to -\frac{\pi}{٢}^{+}} \frac{٢ س}{جا س} = \frac{-\pi}{جا \frac{-\pi}{٢}} = \frac{-\pi}{-١} = \pi$

، د $(-\frac{\pi}{٢}^{-})$ غير موجودة.

∴ $\lim_{س \to -\frac{\pi}{٢}}$ د (س) غير موجودة

[لأن الدالة غير معرفة على يسار س = $\frac{-\pi}{٢}$]

[٢] ∵ د معرفة على يسار ويمين س = ٠ بقاعدتين مختلفتين

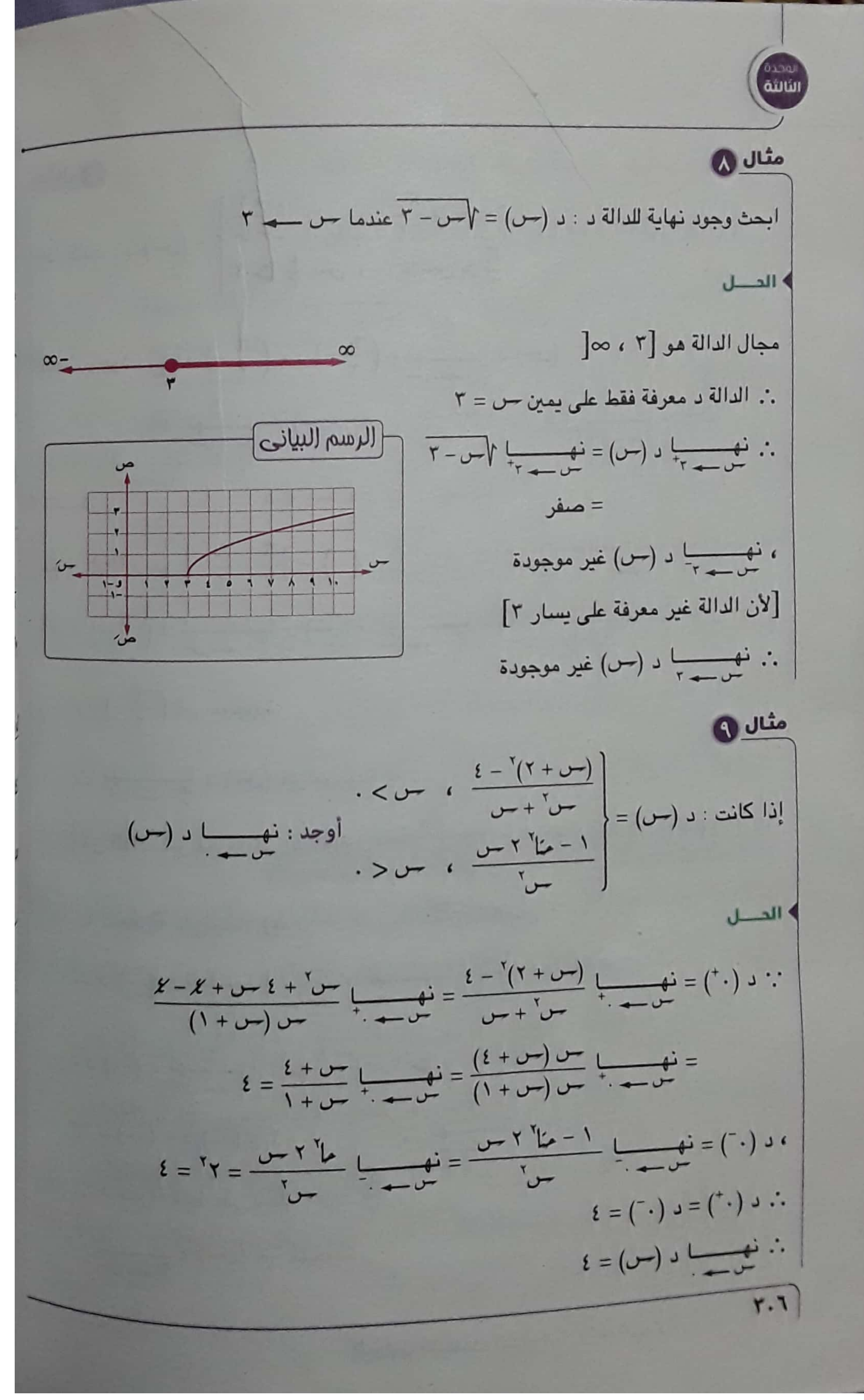
∴ د $(٠^{-}) = \lim_{س \to ٠^{-}} \frac{٢ س}{جا س} = \lim_{س \to ٠^{-}} \frac{٢ \times ١}{\frac{جا س}{س}} = ٢ \times ١ = ٢$

، د $(٠^{+}) = \lim_{س \to ٠^{+}} ٢$ جتا $\frac{٤ س}{٣} = ٢$ جتا ٠ $= ٢ \times ١ = ٢$

∵ د (٠^{-}) = د $(٠^{+}) = ٢$ ∴ $\lim_{س \to ٠}$ د (س) = ٢

[٣] ∵ د معرفة فقط على يسار س = $\frac{\pi}{٢}$

∴ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}}$ د (س) غير موجودة



مثال ٨

ابحث وجود نهاية للدالة د : د (س) = $\sqrt{س - ٣}$ عندما س ← ٣

الحـــل

مجال الدالة هو [٣ ، ∞[

∴ الدالة د معرفة فقط على يمين س = ٣

∴ $\lim_{س \leftarrow ٣^+}$ د (س) = $\lim_{س \leftarrow ٣^+} \sqrt{س - ٣}$

= صفر

، $\lim_{س \leftarrow ٣^-}$ د (س) غير موجودة

[لأن الدالة غير معرفة على يسار ٣]

∴ $\lim_{س \leftarrow ٣}$ د (س) غير موجودة

مثال ٩

إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{(س + ٢)^٢ - ٤}{س^٢ + س} & ، \ س > ٠ \\ \dfrac{١ - جتا^٢ ٢ س}{س^٢} & ، \ س < ٠ \end{cases}$ أوجد : $\lim_{س \leftarrow ٠}$ د (س)

الحـــل

∵ د (٠⁺) = $\lim_{س \leftarrow ٠^+} \dfrac{(س + ٢)^٢ - ٤}{س^٢ + س} = \lim_{س \leftarrow ٠^+} \dfrac{س^٢ + ٤ س + ٤ - ٤}{س (س + ١)}$

$= \lim_{س \leftarrow ٠^+} \dfrac{س (س + ٤)}{س (س + ١)} = \lim_{س \leftarrow ٠^+} \dfrac{س + ٤}{س + ١} = ٤$

، د (٠⁻) = $\lim_{س \leftarrow ٠^-} \dfrac{١ - جتا^٢ ٢ س}{س^٢} = \lim_{س \leftarrow ٠^-} \dfrac{جا^٢ ٢ س}{س^٢} = ٢^٢ = ٤$

∴ د (٠⁺) = د (٠⁻) = ٤

∴ $\lim_{س \leftarrow ٠}$ د (س) = ٤

مثال ١٠

إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \text{طا ٤ س قتا ٩ س} & ، \ -\frac{\pi}{٩} < \text{س} < ٠ \\ \frac{١}{٩} (\text{أ}^{٢} + ٢) & ، \ \text{س} > ٠ \end{cases}$ لها نهاية عند س = ٠ .

أوجد قيمة : أ

الحـل

$\text{د} (٠^{-}) = \underset{\text{س} \leftarrow ٠^{-}}{\text{نهـا}} \text{طا ٤ س قتا ٩ س} = \underset{\text{س} \leftarrow ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا ٤ س}}{\text{طا ٩ س}} = \underset{\text{س} \leftarrow ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{طا ٤ س}}{\text{س}}}{\frac{\text{طا ٩ س}}{\text{س}}} = \frac{٤}{٩}$

، $\text{د} (٠^{+}) = \frac{١}{٩} (\text{أ}^{٢} + ٢)$

، ∵ الدالة لها نهاية عند س = ٠ ∴ $\text{د} (٠^{-}) = \text{د} (٠^{+})$

∴ $\frac{١}{٩} (\text{أ}^{٢} + ٢) = \frac{٤}{٩}$ ∴ $\text{أ}^{٢} + ٢ = ٤$

∴ $\text{أ}^{٢} = ٢$ ∴ $\text{أ} = \pm \sqrt{٢}$

مثال ١١

إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \text{س} & ، \ \text{س} \geq ٠ \\ \frac{١}{\text{س}} & ، \ \text{س} < ٠ \end{cases}$

أوجد : **١** $\underset{\text{س} \leftarrow ٠^{+}}{\text{نهـا}} \text{د (س)}$ **٢** $\underset{\text{س} \leftarrow ٠^{-}}{\text{نهـا}} \text{د (س)}$ **٣** $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \text{د (س)}$

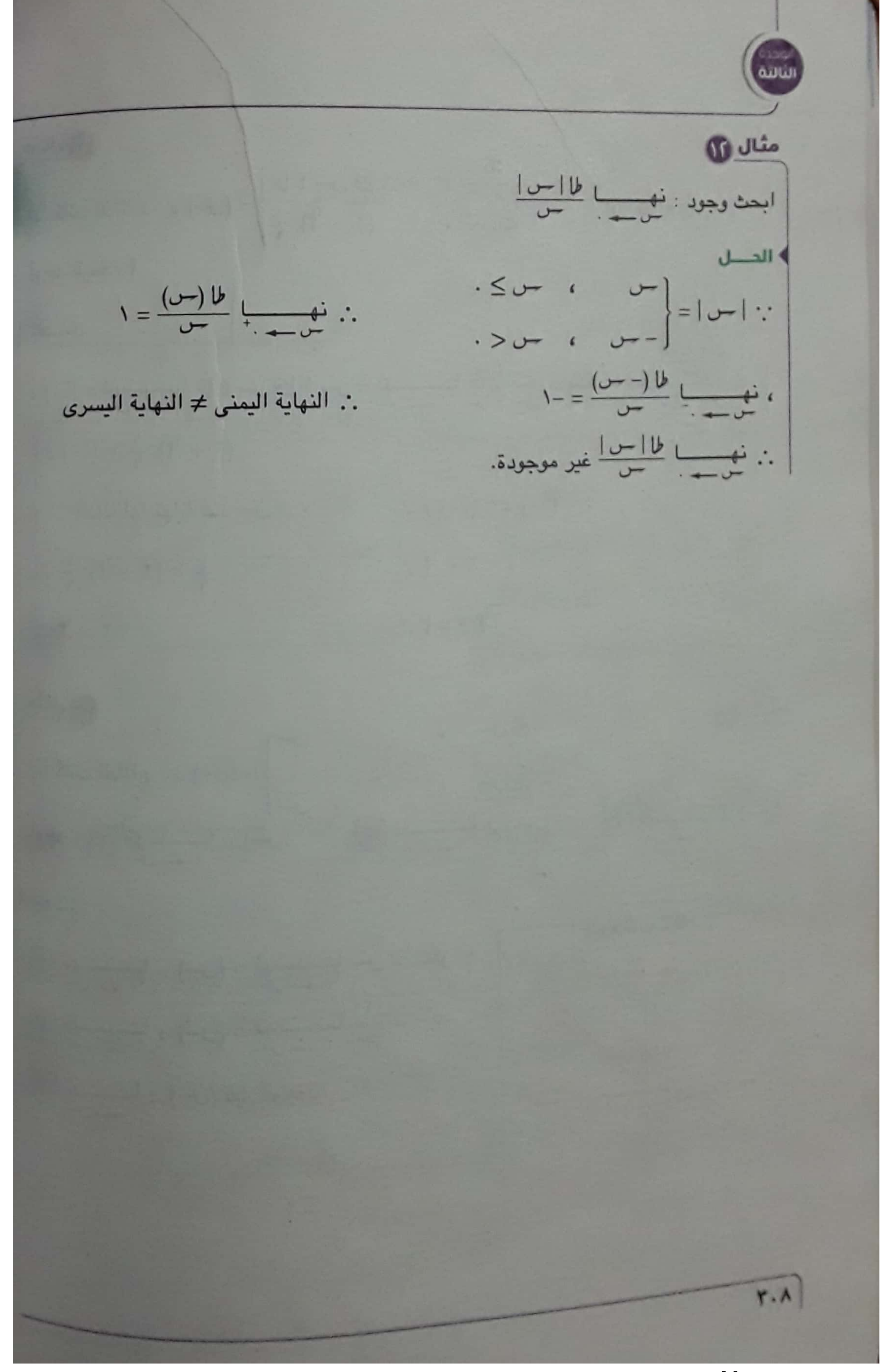
الحـل

١ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠^{+}}{\text{نهـا}} \text{د (س)} = \underset{\text{س} \leftarrow ٠^{+}}{\text{نهـا}} \text{س} = \text{صفر}$

٢ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠^{-}}{\text{نهـا}} \text{د (س)} = \underset{\text{س} \leftarrow ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{س}} = -\infty$

٣ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \text{د (س)}$ غير موجودة.

الرسم للاطلاع فقط



مثال ١٢

ابحث وجود : $\underset{\text{س} \to \cdot}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{طا} |\text{س}|}{\text{س}}$

الحل

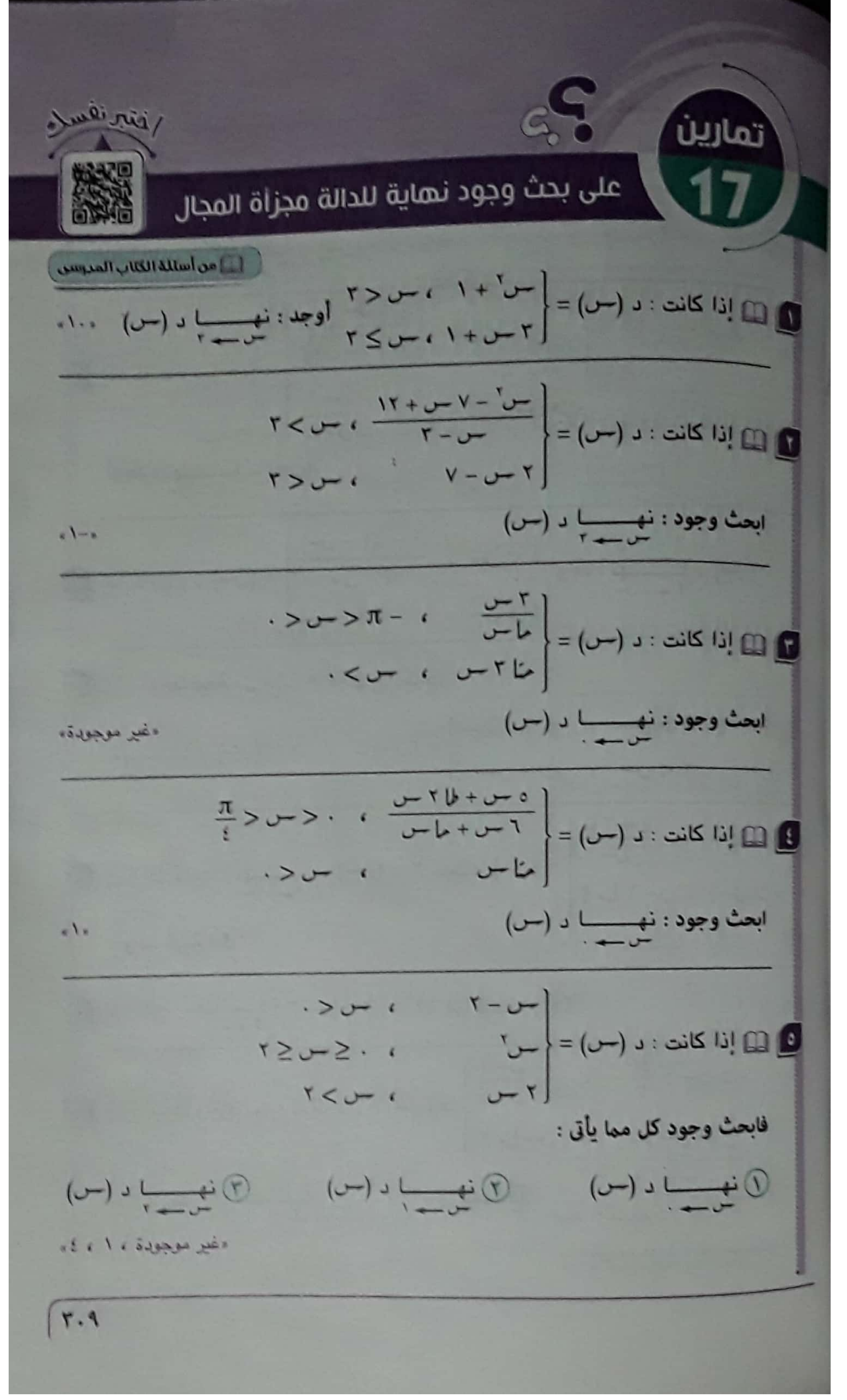
∵ $|\text{س}| = \begin{cases} \text{س} & ، \quad \text{س} \geq \cdot \\ -\text{س} & ، \quad \text{س} < \cdot \end{cases}$

∴ $\underset{\text{س} \to \cdot^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{طا}(\text{س})}{\text{س}} = ١$

، $\underset{\text{س} \to \cdot^{-}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{طا}(-\text{س})}{\text{س}} = -١$

∴ النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى

∴ $\underset{\text{س} \to \cdot}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{طا} |\text{س}|}{\text{س}}$ غير موجودة.



تمارين 17
على بحث وجود نهاية للدالة مجزأة المجال

من أسئلة الكتاب المدرسي

١ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & ، \text{س} < ٣ \\ ٣\text{س} + ١ & ، \text{س} \geq ٣ \end{cases}$ أوجد : $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهــــا}}$ د (س) «١٠»

---

٢ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٧\text{س} + ١٢}{\text{س} - ٣} & ، \text{س} > ٣ \\ ٢\text{س} - ٧ & ، \text{س} < ٣ \end{cases}$

ابحث وجود : $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهــــا}}$ د (س) «−١»

---

٣ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{٣\text{س}}{\text{ظا س}} & ، -\pi < \text{س} < ٠ \\ \text{جتا } ٣\text{س} & ، \text{س} > ٠ \end{cases}$

ابحث وجود : $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهــــا}}$ د (س) «غير موجودة»

---

٤ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{٥\text{س} + \text{ظا } ٢\text{س}}{٦\text{س} + \text{جا س}} & ، ٠ < \text{س} < \dfrac{\pi}{٤} \\ \text{جتا س} & ، \text{س} < ٠ \end{cases}$

ابحث وجود : $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهــــا}}$ د (س) «١»

---

٥ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \text{س} - ٢ & ، \text{س} < ٠ \\ \text{س}^{٢} & ، ٠ \leq \text{س} \leq ٢ \\ ٢\text{س} & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$

فابحث وجود كل مما يأتى :

(١) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهــــا}}$ د (س)   (٢) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهــــا}}$ د (س)   (٣) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهــــا}}$ د (س)

«غير موجودة ، ١ ، ٤»

٦ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} |\text{س} - ٣| & ، \text{س} \neq ٣ \\ ٢ & ، \text{س} = ٣ \end{cases}$

ابحث وجود : $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{د}(\text{س})$ «صفر»

---

٧ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}}{\sqrt{\text{س} + ١} - ١} & ، \text{س} > ٠ \\ \dfrac{٢\text{س}}{\text{جا س}} & ، -\pi < \text{س} < ٠ \end{cases}$

أوجد : $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{د}(\text{س})$ «٢»

---

٨ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{(\text{س} - ٣)^{٦} - ١}{\text{س} - ٤} & ، \text{س} > ٤ \\ \text{س} + ٢ & ، \text{س} < ٤ \end{cases}$ **أوجد :** $\lim\limits_{\text{س} \to ٤} \text{د}(\text{س})$ «٦»

---

٩ **أوجد قيمة كل من : م ، ك إذا كانت :**

$\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{د}(\text{س}) = ٧$ ، $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ٣\text{م} & ، \text{س} < ٢ \\ ٥\text{س} + \text{ك} & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$ «١ ، −٣»

---

١٠ إذا كانت : $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{د}(\text{س}) = ٢$ حيث $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{جا } ٢\text{س}}{\text{س}} & ، \text{س} > ٠ \\ \text{أ جتا } ٢\text{س} & ، \text{س} < ٠ \end{cases}$

فأوجد قيمة : أ «٢»

---

١١ إذا كان : $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} |٣\text{س} + ٢| = ١٤$ **فما قيمة : (أ) ؟** «٤ ، $\frac{-١٦}{٣}$»

---

١٢ ابحث وجود نهاية للدالة د : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{٣\text{س}}{\text{طا س}} & ، -\dfrac{\pi}{٢} < \text{س} < ٠ \\ ٣ \text{ جتا س} & ، ٠ < \text{س} < \dfrac{\pi}{٢} \end{cases}$

(١) عندما $\text{س} \to \dfrac{-\pi}{٢}$ (٢) $\text{س} \to \dfrac{\pi}{٢}$ (٣) $\text{س} \to ٠$

«غير موجودة ، غير موجودة ، ٣»

١٣ إذا كانت : د(س) = س² + $\frac{\sqrt{س^2 - ٦س + ٩}}{س - ٣}$ ابحث وجود : $\lim_{س \to ٣}$ د(س) «غير موجودة»

١٤ إذا كانت : د(س) = $\frac{س^2 + ٢\sqrt{س^2}}{س}$ ابحث وجود : $\lim_{س \to ٠}$ د(س) «غير موجودة»

١٥ إذا كانت : د(س) = $\begin{cases} س|س| + ٢ & ، س < ٠ \\ \frac{|س|}{س} + ١ & ، س > ٠ \end{cases}$ أوجد : $\lim_{س \to ٠}$ د(س) «٢»

١٦ أوجد قيمة م حتى تكون د(س) لها نهاية عندما س ← ١ حيث :

د(س) = $\begin{cases} \frac{(س - ١)^2}{|س - ١|} & ، س < ١ \\ ٦س - ٣م & ، س > ١ \end{cases}$ «٢»

١٧ إذا كانت : د(س) = $\begin{cases} \frac{٢ \text{ جا} س}{\pi - س} & ، س < \pi \\ ١ - \text{جتا} س & ، س > \pi \end{cases}$ أوجد : $\lim_{س \to \pi}$ د(س) «٢»

١٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د(س) = $\begin{cases} -٢ & ، س < ٠ \\ ١ & ، س > ٠ \end{cases}$ فإن :

أولًا : $\lim_{س \to -٢}$ د(س) = ...

(أ) −٢ (ب) ١ (جـ) −١ (د) غير موجودة.

ثانيًا : $\lim_{س \to ٤}$ د(س) = ...

(أ) −٢ (ب) ١ (جـ) −١ (د) غير موجودة.

ثالثًا : $\lim_{س \to ٠}$ د(س) = ...

(أ) −٢ (ب) ١ (جـ) −١ (د) غير موجودة.

② $\lim_{س \to ٢} \frac{|س - ٢|}{س - ٢}$ = ... ، $\lim_{س \to ١} \frac{|س - ٢|}{س - ٢}$ = ...

(أ) غير موجودة ، صفر (ب) غير موجودتين

(جـ) غير موجودة ، −١ (د) ١ ، −١

③ إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} ٢س - ١ & ، س \neq ٢ \\ ٦ & ، س = ٢ \end{cases}$ فإن : $\lim\limits_{س \to ٢} د(س) =$ ....

(أ) -٥ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ليس لها وجود.

④ إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} ٣ - س & ، س < ١ \\ ٤ & ، س = ١ \\ س^{٢} + ١ & ، س > ١ \end{cases}$

فإن : $\lim\limits_{س \to ١} د(س) =$ ....

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) غير موجودة.

⑤ 📖 إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} \frac{جا(س - ١)}{(س - ١)} & ، س < ١ \\ ظا \frac{\pi س}{٤} & ، ١ < س < ٢ \end{cases}$

فإن : $\lim\limits_{س \to ١} د(س) =$ ....

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٤}$ (د) غير موجودة.

⑥ إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} \frac{جا(٢س - ٦)}{س - ٣} & ، س < ٣ \\ ٢ \, جا \frac{\pi س}{٦} & ، س > ٣ \end{cases}$

فإن : $\lim\limits_{س \to ٣} د(س) =$ ....

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) غير موجودة.

⑦ إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} جا \, ٤س \; ظا \, ٩س & ، \frac{-\pi}{١٨} < س < ٠ \\ ٤س + أ^{٢} & ، س > ٠ \end{cases}$

وكان $\lim\limits_{س \to ٠} د(س)$ موجودة فإن : أ = ...

(أ) $\frac{٤}{٩}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\pm \frac{٢}{٣}$ (د) $\pm \frac{٤}{٩}$

⑧ 📖 إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} أ + جتا \, س & ، س < ٠ \\ \frac{ظا \, ٢س}{أس} & ، ٠ < س < \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

وكانت $\lim\limits_{س \to ٠} د(س)$ موجودة فإن : أ = ...

(أ) صفر أ ، ١ (ب) ١ أ ، -٢ (جـ) ٢ أ ، ٣ (د) ١ أ ، ٢

⑨ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{طا } ٢ \text{ س}}{\text{لو}_٢ \text{ ٨ س}} & ، \frac{-\pi}{٤} < \text{س} < ٠ \\ \text{س} + \frac{٢}{٣} & ، \text{س} > ٠ \end{cases}$

فإن : $\lim_{\text{س} \to ٠}$ د (س) = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) غير موجودة.

⑩ إذا كانت الدالة : د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{طتا س}}{\pi - ٢ \text{ س}} & ، ٠ < \text{س} < \frac{\pi}{٢} \\ \text{حا } (\pi - \text{س}) & ، \text{س} > \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

فإن : $\lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}}$ د (س) = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) π (د) غير موجودة.

⑪ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{حا}^٢ \text{ ٢ س}}{\text{س}^٢} & ، \text{س} < ٠ \\ ٢ \text{أ} + ٣ \text{ حتا س} & ، \text{س} > ٠ \end{cases}$

وكانت $\lim_{\text{س} \to ٠}$ د (س) موجودة فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) $-\frac{١}{٢}$

⑫ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{٣ \text{ س} - |\text{س}^٣|}{\text{س}} & ، \text{س} < ٠ \\ ٣ \text{أ} + ٤ \text{ س} & ، \text{س} > ٠ \end{cases}$

وكانت : $\lim_{\text{س} \to ٠}$ د (س) موجودة فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) $-\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) ١

⑬ $\lim_{\text{س} \to ٠^-} \frac{\sqrt{١ - \text{حتا}^٢ \text{ س}}}{\text{س}}$ = ...

(أ) ١ (ب) ١- (جـ) ٢ (د) صفر

⑭ إذا كانت : د (س) = $\frac{٢ \text{ س} - ٦}{|\text{س} - ٣|}$ فإن : $\left(\text{د } (٣^+)\right)^٢ + \left(\text{د } (٣^-)\right)^٢$ = ...

(أ) ٨ (ب) صفر (جـ) ٤ (د) ٤-

Scanned by CamScanner

(15) إذا كان : $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{س}^2 - \text{أ}^2}{\text{س} - \text{أ}} = \lim\limits_{\text{س} \to -2} (|\text{س}| + 8)$ فإن : أ = ...

(أ) 5 (ب) -5 (جـ) 4 (د) 10

(16) إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س}^6 - 64}{\text{س}^4 - 16} & ، \text{س} < 2 \\ \text{أ س} & ، \text{س} > 2 \end{cases}$

حيث $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \text{د}(\text{س})$ لها وجود فإن : قيمة أ = ...

(أ) 1 (ب) 2 (جـ) 3 (د) 6

(17) إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أ جتا س} + \frac{15 \text{ جا س}}{\text{س}} & ، \text{س} > 0 \\ \frac{\text{س}^6 - 64}{\text{س}^3 - 8} & ، \text{س} < 0 \end{cases}$

وكانت د (س) لها نهاية عندما س = 0 فإن : أ = ...

(أ) 1 (ب) -5 (جـ) -7 (د) 7

(18) إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} 3\text{س}^2 + \text{أ س} - 2 & ، \text{س} > 3 \\ 2\text{س} + \text{ب} & ، \text{س} < 3 \end{cases}$

لها نهاية عند س = 3 وتساوى 16 فإن : أ + ب = ...

(أ) 4 (ب) 10 (جـ) -13 (د) 7

19 ابحث وجود $\lim\limits_{\text{س} \to 1} [(\text{د} + \text{ر})(\text{س})]$ حيث :

$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 + 3 & ، \text{س} \geq 1 \\ 4 - 2\text{س} & ، \text{س} < 1 \end{cases}$

، $\text{ر}(\text{س}) = \begin{cases} -3\text{س} & ، \text{س} \geq 1 \\ 2\text{س}^2 - 3\text{س} & ، \text{س} < 1 \end{cases}$ «1»

20 إذا كانت الدالة د : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} 3\text{س} - 2 & ، \text{س} < -1 \\ \text{أ س} + \text{ب} & ، -1 < \text{س} < 3 \\ 6 - \text{س} & ، \text{س} > 3 \end{cases}$

لها نهاية عند س = -1 ، س = 3 أوجد : أ ، ب «2 ، -3»

٢١ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{أس}{\sqrt{س + ٤} - ٢} & ، \quad س > ٠ \\ \dfrac{١}{أس \, قتا ٣ س} & ، \quad -\pi < س < ٠ \end{cases}$

لها نهاية عند س = ٠ أوجد قيمة : أ «$\pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$»

---

٢٢ أوجد قيمة النهاية اليمنى واليسرى ثم استنتج قيمة النهاية إن وجدت لكل من الدوال الآتية عند النقطة المبينة :

① د (س) = $\sqrt{س - ٥}$ عند س = ٥

② د (س) = $\sqrt{٣ - س}$ عند س = ٣

③ د (س) = $\sqrt{س^٢ - ١}$ عند س = -١ ، س = ١

④ د (س) = $\sqrt{٤ - س^٢}$ عند س = -٢ ، س = ٢

---

٢٣ ابحث وجود نهاية كل من الدوال الآتية عند النقطة المبينة :

① د (س) = $\begin{cases} \dfrac{(س + ٢)^٦ - ٦٤}{س^٢ + ٣٢ س} & ، \quad -٥ < س < ٠ \\ \dfrac{-١٢ س}{١ - (جاس + جتاس)^٢} & ، \quad ٠ < س < \frac{\pi}{٢} \end{cases}$ عند س = ٠ «٦»

② د (س) = $\begin{cases} \dfrac{١ - جتاس}{جا^٢ ٣ س} & ، \quad -\frac{\pi}{٢} < س < ٠ \\ -\frac{١}{٢} س^٢ \, جا ٦ س \, (١ - قتا^٢ ٣ س) & ، \quad ٠ < س < \frac{\pi}{٢} \end{cases}$ عند س = ٠ «$\frac{١}{١٨}$»

---

٢٤ ابحث وجود كل مما يأتى :

① $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \dfrac{جا |س|}{س}$

② $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \dfrac{جتا |س|}{س + ١}$ حيث س بالتقدير الدائرى.

«غير موجودة ، ١»

---

٢٥ ابحث وجود : $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \dfrac{\sqrt{قا^٢ س - ١}}{س}$ «غير موجودة»

٢٦ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة هـ (س)

وكان :

$$ى (س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & ، \quad س < ٣ \\ ٤ س + ٢ & ، \quad س > ٣ \end{cases}$$

أوجد : $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} \left(ى (س) + هـ (س) \right)$ «١٨»

---

٢٧ أوجد قيمة النهاية اليمنى واليسرى ثم استنتج قيمة النهاية لكل من الدوال الآتية عند النقطة المبينة :

① د (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ عند س = ٢

② د (س) = $\frac{١}{|س - ٣|}$ عند س = ٣

③ $د (س) = \begin{cases} س - ٢ & ، \quad س > ١ \\ \frac{١}{س - ١} & ، \quad س < ١ \end{cases}$ عند س = ١

---

٢٨ إذا كانت : $د (س) = \begin{cases} ١ + \frac{س^٢ + ٢ س}{|س + ٢|} & ، \quad س \in]-٣ ، ٠[- \{-٢\} \\ ٢ س + ١ & ، \quad س \in]٠ ، ٣[\end{cases}$

أوجد : ① $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـــا}}$ د (س) ② $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـــا}}$ د (س)

③ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}$ د (س) ④ $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}}$ د (س)

---

٢٩ إذا كانت : $د (س) = \begin{cases} \frac{\sqrt[٣]{٢ س - ٣} - ١}{\sqrt[٥]{٣ س - ٥} - ١} & ، \quad س > ٢ \\ ك س & ، \quad س < ٢ \end{cases}$ لها نهاية عند س = ٢

أوجد قيمة : ك «$\frac{٥}{٩}$»

٣٠ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{س^2 + أ س + ب}{س^2 - 4 س + 3} & ، س < 3 \\ 4 س & ، س > 3 \end{cases}$ لها نهاية عند س = ٣

أوجد قيمتى : أ ، ب «١٨ ، -٦٣»

مسائل متنوعة على النهايات وعلاقتها بالجبر

٣١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = $س^2$ فإن : $\lim_{س \to 2}$ د (د (س)) = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١٦ (د) ٣٢

② إذا كانت : د دالة فردية وكان $\lim_{س \to 3}$ د (س) = ٧ أى الجمل الآتية صحيح ؟

(أ) $\lim_{س \to -3}$ د (س) = ٧ (ب) $\lim_{س \to -3}$ د (س) = -٧

(جـ) $\lim_{س \to -3}$ د (س) = -٣ (د) $\lim_{س \to -3}$ د (س) = صفر

③ إذا كانت : د دالة زوجية وكان $\lim_{س \to 2}$ د (س) = ٥ أى الجمل الآتية صحيح ؟

(أ) $\lim_{س \to -2}$ د (س) = ٥ (ب) $\lim_{س \to -2}$ د (س) = -٥

(جـ) $\lim_{س \to -2}$ د (س) = صفر (د) $\lim_{س \to -2}$ د (س) = -٢

④ إذا كانت : د دالة أحادية كثيرة حدود وكانت : $\lim_{س \to 2}$ د (س) = ٣

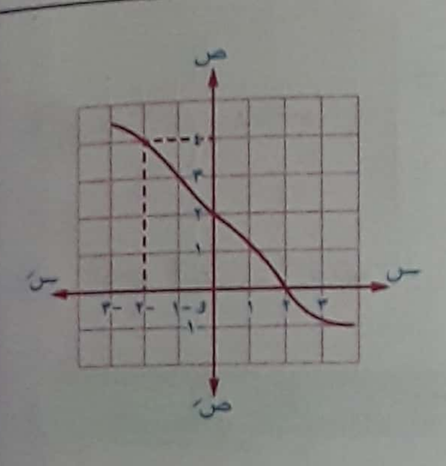
فإن : $\lim_{س \to 3}$ $د^{-1}$ (س) = ...

(أ) -٢ (ب) -٣ (جـ) ٢ (د) ٣

⑤ إذا كانت : $\lim_{س \to 1}$ د (س) = ٣ ، $\lim_{س \to 2}$ د (س) = ٥

فإن : $\lim_{س \to 1}$ د (س + ١) = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦



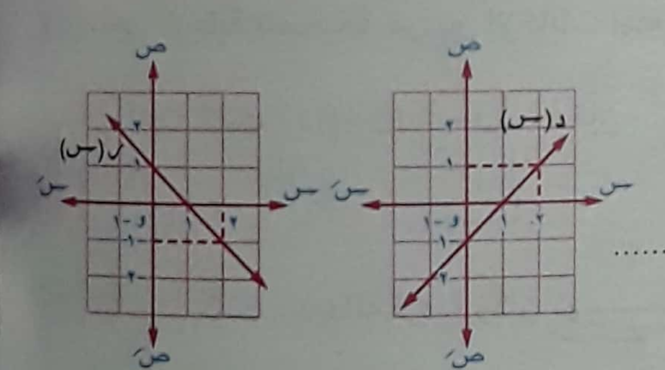
⑥ $\lim\limits_{\text{س} \to -2} \dfrac{[\text{د}(\text{س})]^{2} - 64}{\text{د}(\text{س}) - 4}$ = ...

(أ) صفر

(ب) ١٦

(جـ) ٣٢

(د) ٤٨



⑦ الشكلان المقابلان يمثلان

منحنيا الدالتان د ، ر

فإن : $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{\text{د}(\text{س})}{\text{ر}(\text{س})}$ = ...

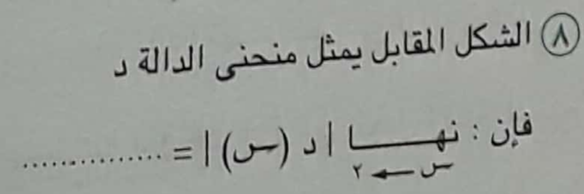
(أ) ١

(ب) ١-

(جـ) صفر

(د) غير موجودة.

⑧ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

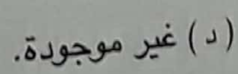


فإن : $\lim\limits_{\text{س} \to 2} |\text{د}(\text{س})|$ = ...

(أ) ١-

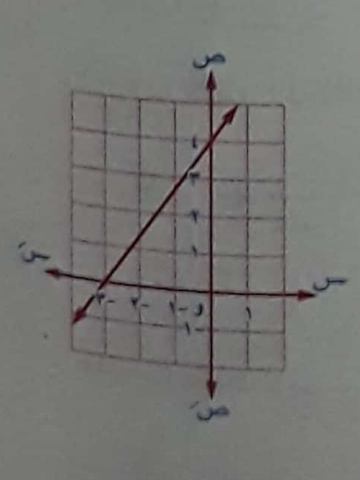
(ب) صفر

(جـ) ١



(د) غير موجودة.

⑨ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



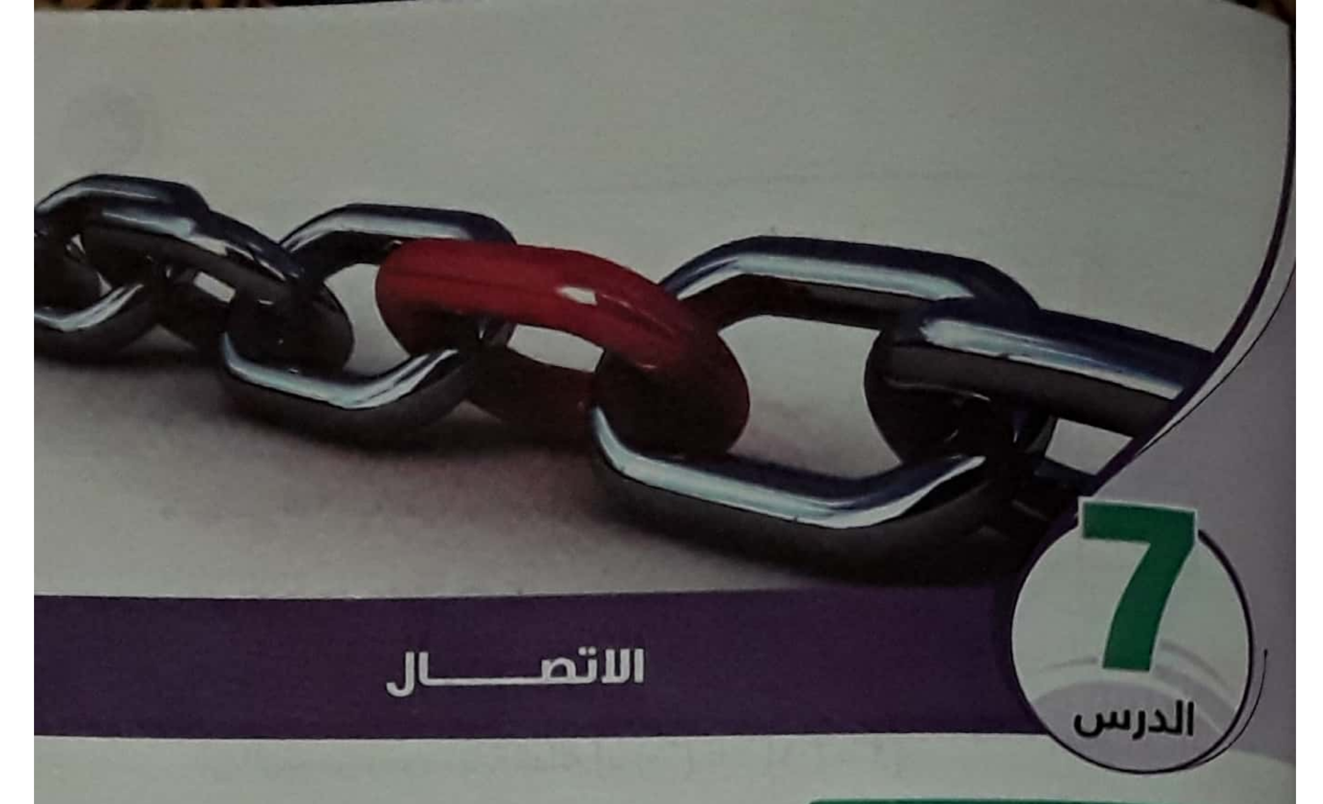
فإن : $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\text{د}(\text{س})}{\text{د}^{-1}(\text{س})}$ = ...

(أ) $\frac{4}{3}$

(ب) $\frac{-4}{3}$

(جـ) $\frac{-16}{9}$

(د) $\frac{16}{9}$



الدرس 7

الاتصـــــال

أولاً اتصال دالة عند نقطة

تعريف

تكون الدالة د متصلة عند س = أ إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية مجتمعة :

١ الدالة معرفة عند س = أ أى د (أ) لها وجود ٢ $\lim_{س \to أ}$ د (س) لها وجود

٣ $\lim_{س \to أ}$ د (س) = د (أ)

* إذا كانت الدالة د مجزأة المجال فإن د تكون متصلة عند س = أ

إذا كان : د $(أ^{+})$ = د $(أ^{-})$ = د (أ)

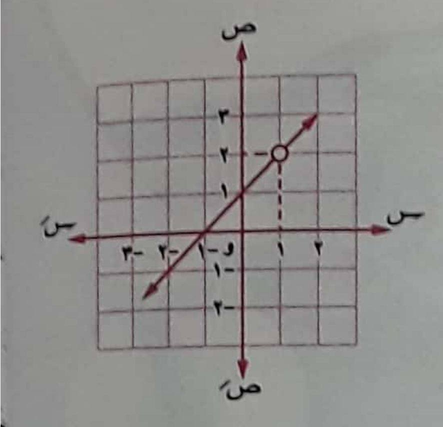
* يكفى عدم تحقق شرط واحد من الشروط الثلاثة السابقة للحكم على عدم اتصال الدالة عند النقطة س = أ

فمثلًا إذا كانت الدالة غير معرفة عند س = أ فهى بالقطع غير متصلة عندها ولا داعى لأن نبحث النهاية عندها ، وهكذا...

* من الناحية الهندسية نقول إن دالة متصلة فى فترة ما إذا أمكن أن نرسم منحنى الدالة فى هذه الفترة دون أن نرفع سن القلم عن الورقة التى نرسم عليها ، أى يكون منحنى الدالة فى هذه الحالة خاليًا من الثغرات أو القفزات ، أما المنحنيات التى بها ثغرات أو قفزات تكون لدوال غير متصلة (منفصلة)



فمثلًا :



1 د (س) = $\frac{س^2 - 1}{س - 1}$ ، س ≠ ١

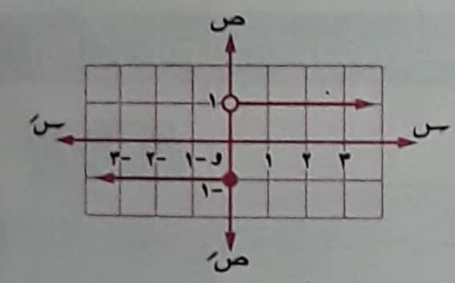
* د (١) غير موجودة لأن الدالة غير معرفة عند س = ١

* منحنى الدالة به ثغرة عند س = ١

لأن الدالة غير معرفة عند س = ١

وبالتالى تكون الدالة د غير متصلة عند س = ١

على الرغم من وجود نهاية للدالة [د (١^+) = د (١^-) = ٢]



2 د (س) = $\begin{cases} -١ & ، \quad س \le ٠ \\ ١ & ، \quad س > ٠ \end{cases}$

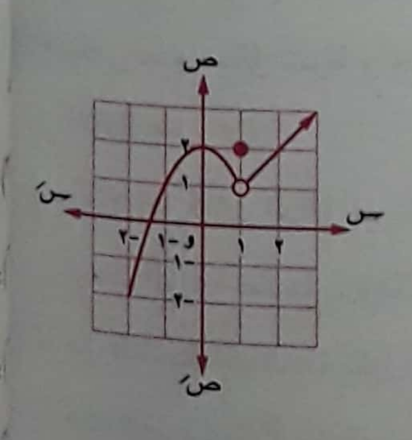
* د (٠) = -١ (موجودة)

* د (٠^+) = ١ ، د (٠^-) = -١ ∴ د (٠^+) ≠ د (٠^-)

∴ الدالة ليس لها نهاية عند س = ٠

* منحنى الدالة به قفزة عند س = ٠

وبالتالى تكون الدالة د غير متصلة عند س = ٠



3 د (س) = $\begin{cases} ٢ - س^2 & ، \quad س < ١ \\ ٢ & ، \quad س = ١ \\ س & ، \quad س > ١ \end{cases}$

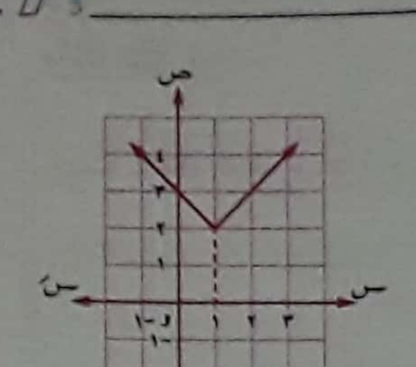
* د (١) = ٢ (موجودة)

* د (١^+) = د (١^-) = ١ (موجودة)

∴ $\lim_{س \to ١}$ د (س) = ١

* منحنى الدالة به ثقب عند س = ١ لأن $\lim_{س \to ١}$ د (س) ≠ د (١)

وبالتالى تكون الدالة د غير متصلة عند س = ١



٤ د (س) = { س + ١ ، س ≥ ١
　　　　　{ ٣ − س ، س < ١

* د (١) = ٢ (موجودة)
* د (١⁺) = د (١⁻) = ٢ (موجودة)

∴ نهـــا د (س) = د (١)
　　س ← ١

* منحنى الدالة ليس به ثقوب أو قفزات ، نهـــا د (س) = د (١)
　　　　　　　　　　　　　　　　　　　س ← ١

وبالتالى تكون الدالة د متصلة عند س = ١

مثال ١

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = { ٢ س + ٣ ، س > ٢
　　　　　　　　　　　　　　　　{ ٥ س − ٣ ، س < ٢
عند س = ٢

الحـــل

∵ الدالة غير معرفة عند س = ٢ أى أن د (٢) غير موجودة

∴ د ليست متصلة عند س = ٢

مثال ٢

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = { ٥ س − ٦ ، س ≥ ٣
　　　　　　　　　　　　　　　　{ ٣ س + ٤ ، س < ٣
عند س = ٣

الحـــل

∵ د (٣) = ٥ × ٣ − ٦ = ٩

، د (٣⁺) = نهـــا د (س) = نهـــا (٥ س − ٦) = ٩
　　　　　　س ← ٣⁺　　　　س ← ٣⁺

، د (٣⁻) = نهـــا د (س) = نهـــا (٣ س + ٤) = ١٣
　　　　　　س ← ٣⁻　　　　س ← ٣⁻

∴ د (٣⁺) ≠ د (٣⁻)

∴ الدالة ليس لها نهاية عند س = ٣

∴ د ليست متصلة عند س = ٣



مثال ٣

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^٧ - ١٢٨}{س^٤ - ١٦} & ، س \ne ٢ \\ ١٤ & ، س = ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

الحل

∵ د (٢) = ١٤

، $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ د (س) = $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{س^٧ - ١٢٨}{س^٤ - ١٦}$ = $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{س^٧ - ٢^٧}{س^٤ - ٢^٤}$ = $\frac{٧}{٤}(٢)^٣$ = ١٤

∴ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ د (س) = د (٢) ∴ د متصلة عند س = ٢

مثال ٤

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = | س − ١ | + ٢ عند س = ١

الحل

$\underset{س \leftarrow ١}{نهـا}$ د (س) = $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا}$ (| س − ١ | + ٢) = ٢ ، د (١) = | ١ − ١ | + ٢ = ٢

∴ $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا}$ د (س) = د (١) ∴ د متصلة عند س = ١

ملاحظة

إذا كانت $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ د (س) موجودة ولكن الدالة د غير متصلة عند س = أ

بسبب أن : د (أ) غير معرفة أو $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ د (س) ≠ د (أ)

فإنه يمكن إعادة تعريف الدالة د لتصبح متصلة عند أ

أما إذا كانت $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ د (س) غير موجودة فإنه لا يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند أ

فمثلًا : أعد تعريف كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية لكى تصبح متصلة عند س = ٢ إن أمكن

قاعدة الدالة	د (س) = $\begin{cases} س + ٢ ، & س \neq ٢ \\ ١ ، & س = ٢ \end{cases}$	د (س) = $\frac{س^٢ + ٤ س - ١٢}{س - ٢}$	د (س) = $\begin{cases} ١ ، & س > ٢ \\ صفر ، & س = ٢ \\ -١ ، & س < ٢ \end{cases}$
د (٢)	١	غير معرفة	صفر
$\lim_{س \to ٢}$ د (س)	٤	٨	غير موجودة
سبب عدم الاتصال عند س = ٢	د (٢) $\neq \lim_{س \to ٢}$ د (س)	الدالة غير معرفة عند س = ٢	$\lim_{س \to ٢}$ د (س) ليس لها وجود
إعادة التعريف لتصبح د متصلة عند س = ٢	د (س) = $\begin{cases} س + ٢ ، & س \neq ٢ \\ ٤ ، & س = ٢ \end{cases}$	د (س) = $\begin{cases} س + ٦ ، & س \neq ٢ \\ ٨ ، & س = ٢ \end{cases}$	لايمكن إعادة تعريفها لكى تصبح متصلة عند س = ٢

مثال ⑤

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = $\frac{٢ س^٢ - ٧ س - ٤}{س - ٤}$ عند س = ٤

، إذا كانت د غير متصلة فهل يمكن إعادة تعريف الدالة د بحيث تكون متصلة عند س = ٤

الحـل

∵ د غير معرفة عند س = ٤ ∴ د غير متصلة عند س = ٤

، ∵ $\lim_{س \to ٤}$ د (س) = $\lim_{س \to ٤} \frac{٢ س^٢ - ٧ س - ٤}{س - ٤}$

= $\lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(٢ س + ١)}{(س - ٤)}$ = $\lim_{س \to ٤}$ (٢ س + ١) = ٩

ولكى تكون الدالة متصلة عند س = ٤ لابد أن تكون د (٤) = $\lim_{س \to ٤}$ د (س) = ٩

∴ يمكن إعادة تعريف الدالة كما يلى د (س) = $\begin{cases} \frac{٢ س^٢ - ٧ س - ٤}{س - ٤} ، & س \neq ٤ \\ ٩ ، & س = ٤ \end{cases}$



مثال ٦

هل يمكن إعادة تعريف الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{|\text{س} - ٢|}{\text{س} - ٢} & ، \text{س} \neq ٢ \\ \text{صفر} & ، \text{س} = ٢ \end{cases}$ لكى تكون متصلة عند س = ٢

الحــل

$\because |\text{س} - ٢| = \begin{cases} (\text{س} - ٢) & ، \text{س} \geq ٢ \\ -(\text{س} - ٢) & ، \text{س} < ٢ \end{cases}$

$\therefore \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س} - ٢}{\text{س} - ٢} & ، \text{س} > ٢ \\ \text{صفر} & ، \text{س} = ٢ \\ \dfrac{-(\text{س} - ٢)}{\text{س} - ٢} & ، \text{س} < ٢ \end{cases}$ $\therefore \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ١ & ، \text{س} > ٢ \\ \text{صفر} & ، \text{س} = ٢ \\ -١ & ، \text{س} < ٢ \end{cases}$

∴ د (٢) = صفر ، د (٢^+) = ١ ، د (٢^-) = −١ ∴ د (٢^+) ≠ د (٢^-)

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢}$ د (س) ليس لها وجود

∴ لا يمكن إعادة تعريف الدالة عند س = ٢ لتصبح متصلة

مثال ٧

إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س جتا ٥ س}}{\text{جا ٣ س + ظا ٤ س}} & ، ٠ < \text{س} < \dfrac{\pi}{٨} \\ ٢\text{ب} & ، \text{س} = ٠ \\ ٣\text{أ} - \dfrac{٢}{٧} \text{ جتا س} & ، \text{س} < ٠ \end{cases}$ متصلة عند س = ٠

أوجد قيمة كل من : أ ، ب

الحــل

∵ د (٠^+) = $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^+} \dfrac{\text{س جتا ٥ س}}{\text{جا ٣ س + ظا ٤ س}} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^+} \dfrac{\text{جتا ٥ س}}{\dfrac{\text{جا ٣ س}}{\text{س}} + \dfrac{\text{ظا ٤ س}}{\text{س}}}$

$= \dfrac{١}{٣ + ٤} = \dfrac{١}{٧}$

، د (٠^-) = $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} (٣\text{أ} - \dfrac{٢}{٧} \text{ جتا س}) = ٣\text{أ} - \dfrac{٢}{٧}$ ، د (٠) = ٢ب

، ∵ د متصلة عند س = ٠ ∴ د (٠^+) = د (٠^-) = د (٠)

∴ $٣\text{أ} - \dfrac{٢}{٧} = \dfrac{١}{٧}$ ∴ $٣\text{أ} = \dfrac{٣}{٧}$ ∴ $\text{أ} = \dfrac{١}{٧}$

، $٢\text{ب} = \dfrac{١}{٧}$ ∴ $\text{ب} = \dfrac{١}{١٤}$

مثال ٨

إذا كانت الدالة د : د (س) = { س^{٢} + أ س − ٢ ، س > ٢ ؛ ٤ ، س = ٢ ؛ ٥ أ + ب س ، س < ٢ } متصلة عند س = ٢

أوجد قيمة : ب

الحل

∵ د (٢) = ٤ ، ∵ د (٢$^{+}$) = نها$_{س \to ٢^{+}}$ (س^{٢} + أ س − ٢) = ٢ + ٢ أ

، ∵ د (٢$^{-}$) = نها$_{س \to ٢^{-}}$ (٥ أ + ب س) = ٥ أ + ٢ ب

، ∵ د متصلة عند س = ٢ . ∴ د (٢$^{+}$) = د (٢$^{-}$) = د (٢)

∴ ٢ + ٢ أ = ٤ ∴ أ = ١

∴ ٥ + ٢ ب = ٤ ∴ ٢ ب = −١ ، ٥ أ + ٢ ب = ٤ ∴ ب = $-\frac{١}{٢}$

مثال ٩

إذا كانت د : د (س) = { س^{٢} − ٢ س + ٢ ، س ≤ ٢ ؛ |س − ٣| ، س > ٢ } ابحث اتصال د عند س = ٢ ، س = ٣

الحل

عندما ٢ < س < ٣ يكون |س − ٣| = ٣ − س

وعندما س ≥ ٣ يكون |س − ٣| = س − ٣

∴ د (س) = { س^{٢} − ٢ س + ٢ ، س ≤ ٢ ؛ ٣ − س ، ٢ < س < ٣ ؛ س − ٣ ، س ≥ ٣ }

* عند س = ٢ :

د (٢) = ٢^{٢} − ٢ (٢) + ٢ = ٢ ، د (٢$^{-}$) = نها$_{س \to ٢^{-}}$ (س^{٢} − ٢ س + ٢) = ٢

، د (٢$^{+}$) = نها$_{س \to ٢^{+}}$ (٣ − س) = ١ ∴ د (٢$^{+}$) ≠ د (٢$^{-}$)

∴ نها$_{س \to ٢}$ د (س) ليس لها وجود ∴ د غير متصلة عند س = ٢

* عند س = ٣ :

د (٣) = ٣ − ٣ = صفر ، د (٣^-) = $\underset{س \leftarrow ٣^-}{\text{نهــــا}}$ (٣ − س) = صفر

، د (٣^+) = $\underset{س \leftarrow ٣^+}{\text{نهــــا}}$ (س − ٣) = صفر ∴ د (٣^+) = د (٣^-) = د (٣)

∴ د متصلة عند س = ٣

مثال ١٠

أعد تعريف الدالة د : د (س) = $\frac{\text{٤ حتا س}}{\pi - \text{٢ س}}$ لكى تصبح متصلة عند س = $\frac{\pi}{٢}$

الحـــل

∵ الدالة د غير معرفة عند س = $\frac{\pi}{٢}$

، $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهــــا}}$ د (س) = $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهــــا}}$ $\frac{\text{٤ حتا س}}{\pi - \text{٢ س}}$ = $\underset{(\frac{\pi}{٢} - س) \leftarrow ٠}{\text{نهــــا}}$ $\frac{\text{٤ جا} (\frac{\pi}{٢} - س)}{\text{٢} (\frac{\pi}{٢} - س)}$ = $\frac{٤}{٢}$ = ٢

ولكن تكون الدالة متصلة عند س = $\frac{\pi}{٢}$ لابد أن يكون د $(\frac{\pi}{٢})$ = $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهــــا}}$ د (س) = ٢

∴ يمكن إعادة تعريف الدالة كما يلى د : د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{٤ حتا س}}{\pi - \text{٢ س}} & \text{، س} \neq \frac{\pi}{٢} \\ ٢ & \text{، س} = \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

ثانيا اتصال دالة على فترة

تعريف

١ إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المفتوحة ف =]أ ، ب[

فإن د تكون متصلة على ف إذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمي لهذه الفترة.

٢ إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المغلقة ف = [أ ، ب]

فإن الدالة د تكون متصلة على ف إذا كان :

* د متصلة على]أ ، ب[

* د متصلة من اليمين عند أ **أى أن** د (أ) = $\underset{س \leftarrow أ^+}{\text{نهــــا}}$ د (س)

* د متصلة من اليسار عند ب **أى أن** د (ب) = $\underset{س \leftarrow ب^-}{\text{نهــــا}}$ د (س)

بعض أنماط الدوال المتصلة

من معرفتنا للأشكال البيانية للدوال الجبرية أمكن استنتاج أنماط لبعض الدوال المتصلة مثل :

١ الدالة كثيرة الحدود : د (س) = أ. + أ١ س + أ٢ س٢ + ... + أن سن

متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح

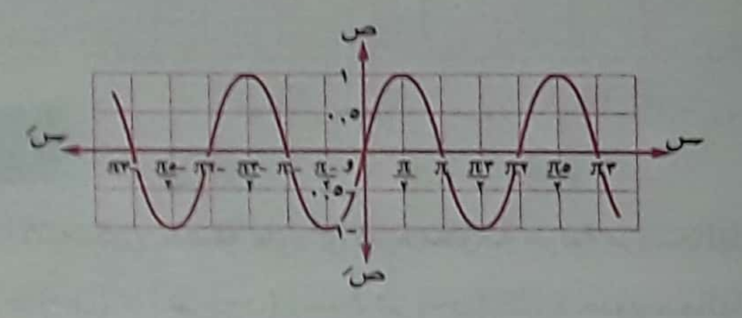
٢ الدالة الكسرية : د (س) = $\frac{أ_. + أ_١ س + أ_٢ س^٢ + ... + أ_ن س^ن}{ب_. + ب_١ س + ب_٢ س^٢ + ... + ب_ن س^ن}$

متصلة على ح − {أصفار المقام} أو أى فترة جزئية من ح عدا أصفار المقام

٣ الدالة المثلثية :

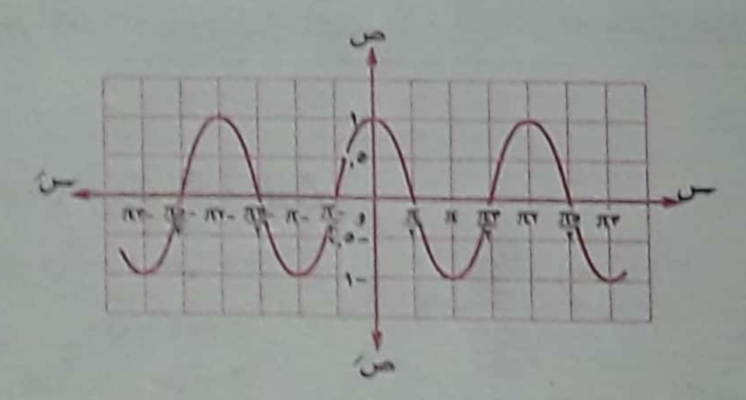
(أ) **دالة الجيب :** د (س) = جا س متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح

ويتضح ذلك من التمثيل البيانى فى الشكل التالى :



(ب) **دالة جيب التمام :** د (س) = جتا س متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح

ويتضح ذلك من التمثيل البيانى فى الشكل التالى :

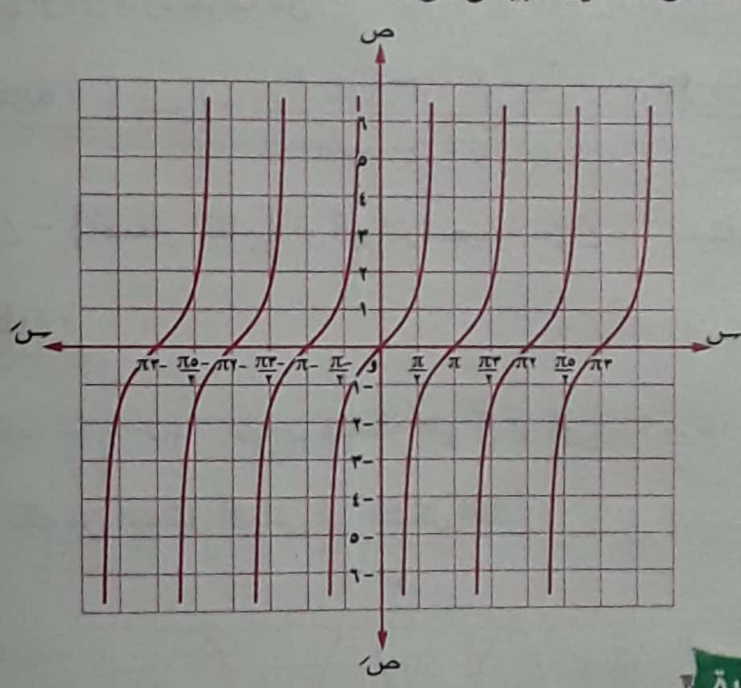


(جـ) دالة الظل : د (س) = ظا س متصلة على ح ماعدا النقط :

..... $\frac{5\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{-\pi}{2}$ ، $\frac{-3\pi}{2}$ ، $\frac{-5\pi}{2}$ ، ..... أى أن الدالة متصلة على

ح − {س : س = $\frac{\pi}{2}$ + ن π ، ن ∈ ص}

ويتضح ذلك من التمثيل البيانى فى الشكل التالى :



معلومة إثرائية

كل من الدوال الآتية تكون متصلة على أى فترة مفتوحة جزئية من مجالها :

1. الدالة د : د (س) = | هـ (س) | حيث هـ (س) كثيرة حدود مجالها = ح
2. الدالة د : د (س) = $\sqrt[ن]{هـ (س)}$ حيث ن ∈ ص+ وأكبر من ١ ، هـ (س) كثيرة حدود
   * مجالها = ح إذا كان ن عدد فردى أكبر من ١
   * مجالها الفترة التى تحقق هـ (س) ≥ ٠ إذا كان ن عدد زوجى

مثال ١١

ابحث اتصال كل من الدوال الآتية على ح :

1. د (س) = س² + ٤ س − ٥
2. د (س) = ٣
3. د (س) = $\frac{س - ٤}{س^2 - ٥ س + ٦}$
4. د (س) = $\frac{س}{س^2 + ٢٥}$

الحل

١ د (س) = $س^3$ + ٤ س − ٥ (دالة كثيرة حدود) ∴ د متصلة على ح

٢ د (س) = ٣ (دالة كثيرة حدود) ∴ د متصلة على ح

٣ د (س) = $\frac{س - ٤}{س^2 - ٥ س + ٦}$ (دالة كسرية)

∵ $س^2$ − ٥ س + ٦ = ٠ عندما (س − ٢) (س − ٣) = ٠ أى عندما س = ٢ أ، س = ٣

∴ د متصلة على ح − {٢ ، ٣}

٤ د (س) = $\frac{س}{س^2 + ٢٥}$ (دالة كسرية)

∵ $س^2$ + ٢٥ > ٠ لجميع قيم س ∈ ح ∴ لا توجد أصفار للمقام.

∴ د متصلة على ح

ملاحظة

إذا كانت الدالتان $د_1$ ، $د_2$ معرفتين على الفترة ف =]أ ، ب[وكانتا متصلتين على الفترة ف ، فإن كلًا من الدوال الآتية تكون متصلة على الفترة ف :

١ $د_1 \pm د_2$ ٢ $د_1 \cdot د_2$ ٣ $\frac{د_1}{د_2}$ بشرط $د_2$ (س) ≠ صفر

مثال ١٢

ابحث اتصال كل من الدوال الآتية :

١ د (س) = (س + ٢) جاس

٢ د (س) = $(س + ١)^2$ − جاس

٣ د (س) = $\frac{جتاس + جاس}{س + ٣}$

٤ د (س) = $س^2$ + ٥ + ٣ $س^{-2}$

٥ د (س) = $\frac{ظاس}{س^2 - ١}$

الحل

١ ∵ كل من (س + ٢) ، جاس متصلة على ح ∴ د متصلة على ح

٢ ∵ كل من $(س + ١)^2$ ، جاس متصلة على ح ∴ د متصلة على ح



٣ ∵ كل من جتا س ، جا س ، (س + ٣) متصلة على ح

∴ د متصلة على ح − {أصفار المقام}　　∴ د متصلة على ح − {−٣}

٤ ∵ د (س) = $س^٢$ + ٥ + $\frac{٣}{س^٢}$　　∴ د متصلة على ح − {٠}

٥ ∵ طا س متصلة على ح − {س : س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن π ، ن ∈ ص}

، ($س^٢$ − ١) متصلة على ح ، ∵ $س^٢$ − ١ = ٠ عند س = ± ١

∴ الدالة د متصلة على ح − {١ ، −١ ، $\frac{\pi}{٢}$ + ن π} حيث ن ∈ ص

مثال ١٣

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٣ س + ٢ & ، −٣ \leq س < ٢ \\ س^٢ + ٤ & ، ٢ \leq س \leq ٥ \end{cases}$

الحل

∵ د معرفة على الفترة [−٣ ، ٥]

ولكى نبحث اتصالها على هذه الفترة نبحث :

١ اتصالها فى كل من الفترتين]−٣ ، ٢[،]٢ ، ٥[

٢ اتصالها عند النقطة س = ٢ التى تتغير عندها قاعدة الدالة.

٣ اتصالها من اليمين عند س = −٣ ، اتصالها من اليسار عند س = ٥

أولًا : • لكل س ∈]−٣ ، ٢[

∴ د (س) = ٣ س + ٢ (كثيرة حدود)　∴ د متصلة على]−٣ ، ٢[

• لكل س ∈]٢ ، ٥[

∴ د (س) = $س^٢$ + ٤ (كثيرة حدود)　∴ د متصلة على]٢ ، ٥[

ثانيًا : ∵ د (٢) = $٢^٢$ + ٤ = ٨

، د (٢^-) = $\lim_{س \to ٢^-}$ (٣ س + ٢) = ٨ ، د (٢^+) = $\lim_{س \to ٢^+}$ ($س^٢$ + ٤) = ٨

∴ د (٢^-) = د (٢^+) = د (٢)　∴ د متصلة عند س = ٢

ثالثًا : ∵ د (−٣) = ٣ (−٣) + ٢ = −٧ ، د (-٣^+) = نهـــــا (٣ س + ٢) = −٧
س ← −٣⁺

∴ د (-٣^+) = د (−٣)

∴ د متصلة من اليمين عند س = −٣   وكذلك ∵ د (٥) = $٥^٢$ + ٤ = ٢٩

، د (٥^-) = نهـــــا ($س^٢$ + ٤) = ٢٩
س ← ٥⁻

∴ د (٥^-) = د (٥)   ∴ د متصلة من اليسار عند س = ٥

من أولًا وثانيًا وثالثًا نستنتج أن د متصلة على [−٣ ، ٥]

مثال ١٤

ابحث اتصال كل من الدوال الآتية على مجالها :

١ د (س) = $\sqrt{س + ٢}$ ٢ د (س) = $\sqrt[٣]{٢ - س^٢}$ ٣ د (س) = $\frac{١}{\sqrt[٣]{س^٢ - ٢٥}}$

الحل

١ ∵ د (س) = $\sqrt{س + ٢}$ [دليل الجذر = ٢ (زوجي)]

∴ د معرفة إذا كان س + ٢ ≥ ٠ أي س ≥ −٢   ∴ مجال د = [−٢ ، ∞[

نفرض أن أ ∈]−٢ ، ∞[

، ∵ نهـــــا د (س) = نهـــــا $\sqrt{س + ٢}$ = $\sqrt{أ + ٢}$ = د (أ)
س ← أ

∴ الدالة د متصلة لجميع قيم أ   ∴ د متصلة على الفترة]−٢ ، ∞[

، ∵ د (−٢) = ٠ ، د (-٢^+) = نهـــــا ($\sqrt{س + ٢}$) = ٠
س ← −٢⁺

∴ د (-٢^+) = د (−٢)   ∴ د متصلة من اليمين عند س = −٢

∴ د متصلة على [−٢ ، ∞[

٢ ∵ د (س) = $\sqrt[٣]{٢ - س^٢}$ [دليل الجذر = ٣ (فردي)]

∴ د متصلة على ح



٣ ∵ د (س) = $\frac{١}{\sqrt[٣]{س^٢ - ٢٥}}$ [دليل الجذر = ٣ (فردى)]

∴ د متصلة على ح - {أصفار المقام}

، ∵ $س^٢$ - ٢٥ = ٠ عندما س = ± ٥ ∴ د متصلة على ح - {٥ ، -٥}

مثال ١٥

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \text{جا س - جتا س} ، ٠ \le س \le \pi \\ ٢ \text{ جتا}^٢ س - ١ ، س > \pi \end{cases}$

الحل

∵ كل من جا س ، جتا س متصلة فى الفترة]٠ ، π[

∴ د (س) = جا س - جتا س متصلة فى الفترة]٠ ، π[

وبالمثل د (س) = ٢ $\text{جتا}^٢$ س - ١ متصلة فى الفترة]π ، ∞[(١)

، ∵ د (π) = جا π - جتا π = ١

، د (π^-) = $\lim_{س \to \pi^-}$ (جا س - جتا س) = جا π - جتا π = ١

، د (π^+) = $\lim_{س \to \pi^+}$ (٢ $\text{جتا}^٢$ س - ١) = ٢ $\text{جتا}^٢$ π - ١ = ١

∴ د (π^-) = د (π^+) = د (π) ∴ د متصلة عند س = π (٢)

، ∵ د (٠) = جا ٠ - جتا ٠ = -١ ، د (٠^+) = $\lim_{س \to ٠^+}$ (جا س - جتا س) = -١

∴ د (٠^+) = د (٠) ∴ د متصلة من اليمين عند س = ٠ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) نستنتج أن د متصلة على [٠ ، ∞[

مثال ١٦

ابحث اتصال كل من الدالتين الآتيتين على ح :

١ د (س) = $\frac{س - ١}{\text{جتا س}}$

٢ د (س) = $\frac{س^٢ + ٣}{١ + \text{جا س}}$

الحـل

١ ∵ كل من (س − ١) ، جتا س متصلة على ع

، ∵ جتا س = ٠ عندما س = $\frac{\pi}{2}$ + ن π

∴ د متصلة على

ع − {س : س = $\frac{\pi}{2}$ + ن π ، ن ∈ ص}

٢ ∵ كل من (س^2 + ٣) ، (١ + جا س) متصلة على ع

، ∵ ١ + جا س = ٠

أى جا س = −١ عندما س = $\frac{3\pi}{2}$ + ٢ ن π

∴ د متصلة على ع − {س : س = $\frac{3\pi}{2}$ + ٢ ن π ، ن ∈ ص}

تذكر أن

المعادلة	الحل العام
• جا س = ٠	س = ن π
• جا س = ١	س = $\frac{\pi}{2}$ + ٢ ن π
• جا س = −١	س = $\frac{3\pi}{2}$ + ٢ ن π
• جتا س = ٠	س = $\frac{\pi}{2}$ + ن π
• جتا س = ١	س = ٢ ن π
• جتا س = −١	س = π + ٢ ن π

مثال ١٧

إذا كانت الدالة د : د (س) =
$$\begin{cases} ٣ س − ٢ & ، س \le −٢ \\ ا س + ب & ، −٢ < س < ٥ \\ س^2 − ١٢ & ، س \ge ٥ \end{cases}$$
متصلة على ع

أوجد : ا ، ب

الحـل

∵ د متصلة على ع ∴ د متصلة عند س = −٢

∴ د (−٢$^-$) = د (−٢$^+$) = د (٢)

∵ $\lim_{س \to -2^+}$ (ا س + ب) = ٣ (−٢) −٢ ∴ −٢ ا + ب = −٨ (١)

، د متصلة عند س = ٥ ∴ د (٥$^-$) = د (٥$^+$) = د (٥)

∵ $\lim_{س \to 5^-}$ (ا س + ب) = (٥)^2 − ١٢ ∴ ٥ ا + ب = ١٣ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ا = ٣ ، ب = −٢





تمارين 18 على الاتصـــال

📖 من أسئلة الكتاب المدرسي

أولًا تمارين على الاتصال عند نقطة

١ ابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية عند النقط المبينة :

① د(س) = $\text{س}^{٢}$ + س − ٣ عند س = −١

② د(س) = $\sqrt[٣]{\text{س} - ١}$ عند س = ٩

③ 📖 د(س) = $\dfrac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢}$ عند س = ١ ، س = ٢

④ 📖 د(س) = ٥ − | س − ٣ | عند س = ٣

⑤ د(س) = | س − ٤ | + | س + ٢ | عند س = ٤ ، س = −٢

⑥ د(س) = $\begin{cases} ٤\text{س}^{٢} + ٣ & \text{، س} \le \frac{١}{٢} \\ ٥ - ٢\text{س} & \text{، س} > \frac{١}{٢} \end{cases}$ عند س = $\frac{١}{٢}$

⑦ د(س) = $\begin{cases} ٢\text{س} & \text{، س} < ١ \\ ٤ - ٢\text{س} & \text{، س} > ١ \end{cases}$ عند س = −١ ، س = ١

⑧ 📖 د(س) = $\begin{cases} \text{س} + ٤ & \text{، س} < -٢ \\ ١ & \text{، } -٢ \le \text{س} < -١ \\ ٢\text{س} + ٣ & \text{، س} \ge -١ \end{cases}$ عند س = −٢ ، س = −١

⑨ 📖 د(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + ٣ & \text{، س} \ge ١ \\ \dfrac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣}{\text{س} - ١} & \text{، س} < ١ \end{cases}$ عند س = ١

⑩ د(س) = $\begin{cases} \text{س} \mid \text{س} \mid & \text{، س} \ne ٠ \\ ٢ & \text{، س} = ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

(١١) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{|س - ٢|}{س - ٢} &، س \neq ٢ \\ ٢ &، س = ٢ \end{cases}$ عند $س = ٢$

(١٢) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{س|س - ٢| - س + ٢}{|س - ٢|} &، س < ٢ \\ ٣ &، س \geq ٢ \end{cases}$ عند $س = ٢$

(١٣) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٧} - ١٢٨}{س^{٤} - ١٦} &، س \neq ٢ \\ ٣س^{٢} + ٢ &، س = ٢ \end{cases}$ عند $س = ٢$

(١٤) 📖 $د(س) = \begin{cases} \dfrac{١ - جتا س}{س} &، س > ٠ \\ ٢ جا س &، س \leq ٠ \end{cases}$ عند $س = ٠$

(١٥) 📖 $د(س) = \begin{cases} \dfrac{جا(س - ٢)}{س^{٢} - ٤} &، س \in]-\infty ، ٢[- \{-٢\} \\ ١ - \dfrac{٣}{س^{٢}} &، س \in [٢ ، \infty[\end{cases}$ عند $س = ٢$

(١٦) $د(س) = \begin{cases} س|س| + ٤ &، س \leq ٠ \\ \dfrac{|س|}{س} + ٣ &، س > ٠ \end{cases}$ عند $س = ٠$

(١٧) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢} + ٢س - ٣}{|س + ٣|} &، س \neq -٣ \\ ٢ &، س = -٣ \end{cases}$ عند $س = -٣$ ، عند $س = ١$

(١٨) $د(س) = \begin{cases} |س + ٣| &، س \leq ٢ \\ ١١ - ٣س &، س > ٢ \end{cases}$ عند $س = -٣$ ، $س = ٢$

(١٩) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{٥س^{٢} + جا^{٢} ٢س}{س طا ٣س} &، \dfrac{-\pi}{٦} < س < ٠ \\ \dfrac{س + ٣}{س + ١} &، س \geq ٠ \end{cases}$ عند $س = ٠$

(٢٠) $د(س) = \begin{cases} \dfrac{جا س}{\pi - س} &، س \neq \pi \\ ١ &، س = \pi \end{cases}$ عند $س = \pi$



٢ أوجد قيم ك ، أ ، ب ، حـ التى تجعل كلًّا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية متصلة عند النقطة المبينة أمام كل منها :

① $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٣}{\text{س} + ٣} & ، \text{س} \neq -٣ \\ \text{س} + \text{أ} & ، \text{س} = -٣ \end{cases}$ عند س = −٣ «−١»

② $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦}{\text{س}^٣ - ٨} & ، \text{س} \neq ٢ \\ \dfrac{-٢}{|\text{أ}|} & ، \text{س} = ٢ \end{cases}$ عند س = ٢ «± ٢٤»

③ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\text{س} + ٣} - ٢}{\text{س}^٢ - ١} & ، \text{س} \neq ١ \\ \text{ك} & ، \text{س} = ١ \end{cases}$ عند س = ١ «$\frac{١}{٨}$»

④ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}^٢ ٢\text{س}}{\text{س طا} ٢\text{س}} & ، \text{س} \in]\frac{-\pi}{٦} ، \frac{\pi}{٦}[- \{٠\} \\ \text{أ} + ١ & ، \text{س} = ٠ \end{cases}$ عند س = ٠ «$\frac{١}{٢}$»

⑤ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} - ٢ & ، \text{س} \leq -٢ \\ \text{أس} + \text{ب} & ، -٢ < \text{س} < ٥ \\ \text{س}^٢ - ١٢ & ، \text{س} \geq ٥ \end{cases}$ عند س = −٢ ، س = ٥ «٣ ، −٢»

⑥ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أ} + \text{ب س} & ، \text{س} > ٢ \\ ٣ & ، \text{س} = ٢ \\ \text{ب} - \text{أ س}^٢ & ، \text{س} < ٢ \end{cases}$ عند س = ٢ «$-\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$»

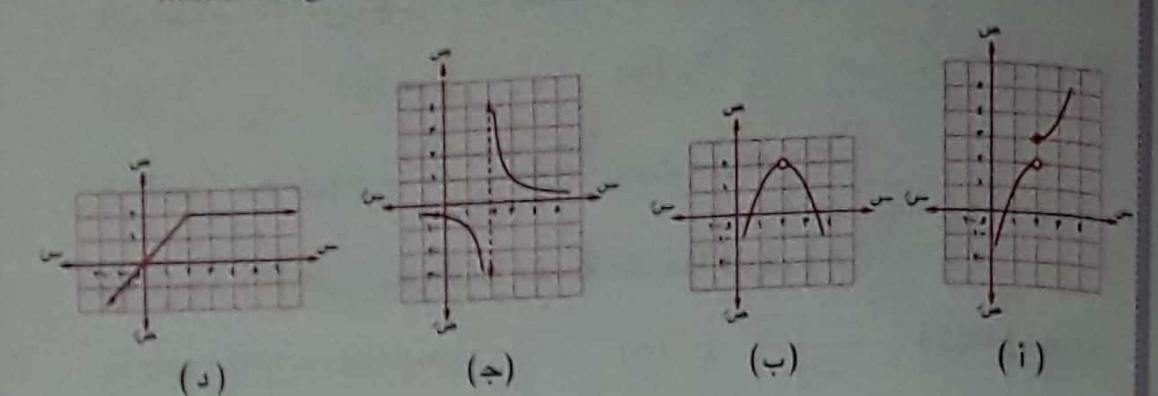
⑦ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{جتا} ٢\text{س} - ١}{\text{س}^٢} & ، \text{س} \neq ٠ \\ \text{ك} & ، \text{س} = ٠ \end{cases}$ عند س = ٠ «−٢»

⑧ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٢ - \text{س}^٢ & ، \text{س} \leq \text{حـ} \\ \text{س} & ، \text{س} > \text{حـ} \end{cases}$ عند س = حـ «١ أ، −٢»

⑨ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{١ - \text{جتا س}}{\text{ك س}} & ، \text{س} \neq ٠ \\ \text{جا س} & ، \text{س} = ٠ \end{cases}$ عند س = ٠ «ح − {٠}»

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الشكل الذى يبين الدالة المتصلة عندما س = ٢ هو الشكل ....



(أ) (ب) (جـ) (د)

② إذا كانت : $\lim_{س \to ٢^+}$ د (س) = ل ، $\lim_{س \to ٢^-}$ د (س) = م وكانت الدالة متصلة عند س = ٢ فإن : ل − م = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{ل}{م}$ (جـ) ل م (د) غير معرفة.

③ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ - ١}{س - ١} & ، س \neq ١ \\ ٢ أ & ، س = ١ \end{cases}$

متصلة عند س = ١ فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

④ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{جا ٢ س + طا س}{١ + جا ٤ س} & ، س \neq \frac{\pi}{٤} \\ ك & ، س = \frac{\pi}{٤} \end{cases}$

متصلة عند س = $\frac{\pi}{٤}$ فإن : ك = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٣}{٥}$ (جـ) ٣ (د) ٢

⑤ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} جا ٩ س طتا ٤ س ، س \in]-\frac{\pi}{٨} ، \frac{\pi}{٨}[- \{٠\} \\ ك^٢ ، س = ٠ \end{cases}$

متصلة عند س = ٠ فإن : ك = ...

(أ) $\frac{٩}{٤}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\pm \frac{٣}{٢}$ (د) $\pm \frac{٢}{٣}$

٦ إذا كانت : د (س) = $\frac{س^٢ - ٢٥}{س - ٥}$ حيث س ≠ ٥

فإن قيمة د (٥) التى تجعل الدالة متصلة عند هذا الموضع = ...

(أ) ١٠ (ب) صفر (جـ) ٢٥ (د) غير معرفة.

٧ إذا كانت : د (س) = $\frac{س^٢ - ٥ س + ٦}{س^٢ - ٩}$ حيث س ≠ ± ٣

فإن قيمة د (٣) التى تجعل الدالة متصلة عند هذا الموضع = ...

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٩}$ (د) غير معرفة.

٨ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{|س|}{س} + ٦ &، س < ٠ \\ أ^٢ + جا ٣ س &، س \geq ٠ \end{cases}$ ، متصلة عند س = ٠

فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ± $\sqrt{٦}$ (جـ) ± ٢ (د) ± $\sqrt{٥}$

٩ إذا كانت : د (س) = $\frac{س^٨ - أ^٨}{س^٥ - أ^٥}$ متصلة عند س = أ ، د (أ) = ٢٠٠

فإن : أ = ...

(أ) ٥ (ب) $\frac{٨}{٥}$ (جـ) ١٢٥ (د) $\frac{١}{٥}$

٤ أعد تعريف كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية عند النقط المبينة بحيث تصبح متصلة عند هذه النقط (إن أمكن) :

١ 📖 د (س) = $\frac{س^٢ - س - ٦}{س - ٣}$ عند س = ٣

٢ د (س) = $\frac{س^٣ - ١}{س^٢ - ٣ س + ٢}$ عند س = ١

٣ 📖 د (س) = $\begin{cases} س^٣ + ٢ س &، س > ١ \\ ٥ س - ١ &، س < ١ \end{cases}$ عند س = ١

٤ 📖 د (س) = $\begin{cases} س^٢ + ١ &، س \geq ٢ \\ \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢} &، س < ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

⑤ د(س) = $\begin{cases} \frac{٣س + ١ - جتا س}{٥س} & ،س > ٠ \\ \frac{٣}{٥} جتا س & ،س < ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

⑥ د(س) = $\frac{|س - ٣|}{س - ٣}$ عند س = ٣

⑦ د(س) = $\frac{س^٢ - ٦٤}{\sqrt[٣]{س} - ٢}$ عند س = ٨

⑧ د(س) = $\frac{|س| + س}{س}$ عند س = ٠

⑨ د(س) = $\frac{٢}{س - ٥} - \frac{١٢}{س^٢ - ٤س - ٥}$ عند س = ٥

⑩ د(س) = $\frac{جا س^{\circ}}{|س|}$ عند س = ٠

ثانياً تمارين على الاتصال على فترة

١ ابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

① د(س) = ٧

② د(س) = $س^٣ - ٢س^٢ + ١$

③ د(س) = $\frac{٣س - ٥}{س - ٣}$

④ د(س) = $\frac{س^٢ - ٩}{س^٢ - ٥س + ٦}$

⑤ د(س) = $\frac{س - ١}{س^٤ - ١٣س^٢ + ٣٦}$

⑥ د(س) = $\frac{س}{س^٢ + س + ١}$

⑦ د(س) = $\frac{٤س - ١}{س^٣ - س}$

⑧ د(س) = $|س - ٢| + |٥ + س|$

⑨ د(س) = $س^٢$ جا ٢س

⑩ د(س) = جا س − ٣ جتا (س + ١)

⑪ د(س) = $(٣س + ٤)^٢$ + جا ٢س

⑫ د(س) = $\frac{س}{|س| - ٢}$

⑬ د(س) = $\frac{٣س - ١}{|س| + ١}$

⑭ د(س) = $\frac{١}{\sqrt{س - ٢}}$

⑮ د(س) = $\frac{س^٢ + جا ٣س}{س + ١}$

⑯ د(س) = $\frac{\sqrt{س - ٤}}{س - ٦}$

⑰ د(س) = $\frac{\sqrt{س - ٣}}{س^٢ - ٤}$

⑱ د(س) = $\frac{٣س + ٢}{س\sqrt{س} + ٢}$

(١٩) $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} + ١}{\sqrt{\text{س} + ٢} - ١}$

(٢٠) $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} + ٢} + \sqrt{٣ - \text{س}}$

(٢١) $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{١}{\sqrt{٢٥ - \text{س}^٢}}$

(٢٢) $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{٥ - |\text{س}|}$

(٢٣) $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^٢ + ١}{\text{جا س}}$

(٢٤) $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} + ٣}{\text{جتا س}}$

(٢٥) $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{جا ٢س} + \text{جتا ٥س}}{١ - \text{جتا س}}$

(٢٦) $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{٢ + \text{س}}{١ + \text{جا س}}$

(٢٧) $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{جا}^٢\text{س} + \text{جتا س}}{\text{س}^٢ - ٩}$

(٢٨) $\text{د}(\text{س}) = \text{ظا}^٢\text{س} - ١$

(٢٩) $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{ظا س}}{\text{س}^٢ - ٩}$

٢ ابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية على مجالها :

(١) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ + ١ & ، \text{س} \le ١ \\ ٢\text{س} & ، \text{س} > ١ \end{cases}$

(٢) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ & ، \text{س} < ٣ \\ ٥\text{س} - ٤ & ، \text{س} \ge ٣ \end{cases}$

(٣) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢ & ، \text{س} \le ٣ \\ ٢ & ، ٣ < \text{س} \le ٤ \\ ٦ - \text{س}^٢ & ، \text{س} > ٤ \end{cases}$

(٤) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ١ + \text{جا س} & \text{حيث } ٠ \le \text{س} \le \frac{\pi}{٢} \\ ١ - \text{جتا ٢س} & \text{حيث س} > \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

(٥) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{جا س} & ، -\frac{\pi}{٤} \le \text{س} < \frac{٣\pi}{٤} \\ \text{جتا س} & ، \frac{٣\pi}{٤} \le \text{س} \le ٢\pi \end{cases}$

(٦) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س ظا س} + \text{جا}^٢ ٣\text{س}}{٥\text{س}^٢} & ، -\frac{\pi}{٤} < \text{س} < ٠ \\ ٢ \text{ جتا ٢س} & ، ٠ \le \text{س} < \frac{\pi}{٤} \end{cases}$

⑦ د (س) = { $\frac{(س + ٣)^٤ - ٨١}{س}$ عندما س ≠ ٠ ، ١٠٨ عندما س = ٠ }

⑧ د (س) = { ٥ - س|س| ، س ≤ ٠ ، $\frac{|س|}{س}$ + ٤ ، س > ٠ }

٣ إذا كانت الدالة د : د (س) = { س^٢ + ب س + ٣ ، س < ١ ، أ س + ب ، س ≥ ١ }

متصلة عند س = ١ ، د (١) = ٧ أوجد قيمة كل من : أ ، ب «٤ ، ٣»

٤ إذا كانت الدالة د (س) = { $\frac{س + جا ٢ س}{جا \frac{١}{٢} س}$ ، - π ≤ س < ٠ ، س + ك ، ٠ ≤ س ≤ π }

متصلة فى الفترة [- π ، π] فأوجد قيمة : ك «٦»

٥ إذا كانت الدالة د : د (س) = { ٤ س ، س ≤ -١ ، أ س + ب ، -١ < س < ٣ ، - ٢ س ، س ≥ ٣ } متصلة على ح

فما قيمة كل من : أ ، ب «$-\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{٩}{٢}$»

٦ إذا كانت : د (س) = { $\frac{\sqrt{س - أ} - ١}{\sqrt{س} - ٣}$ ، س ≠ ٩ ، س - ب ، س = ٩ } متصلة على ح

فما قيمة كل من : أ ، ب الحقيقية ؟ «٨ ، ٦»

٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الدالة د : د (س) = ٤ س$^{-٢}$ + $\frac{س}{س^٢ - ٩}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ) ح (ب) ح - {٠}

(جـ) ح - {٣ ، -٣} (د) ح - {٣ ، -٣ ، ٠}

② إذا كانت الدالة د : د (س) = $\frac{س + ١}{س^٢ + أ}$ متصلة على ح فإن : أ ∈ ....

(أ) ح (ب) $ح^+$ (جـ) $ح^-$ (د) $ح^- \cup \{٠\}$

③ الدالة د : د (س) = $\frac{١}{\sqrt[٣]{س + ٢}}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ) ح (ب) ح - {-٢} (جـ)]-٢ ، ∞[(د)]-٢ ، ∞[

④ الدالة د : د (س) = $\sqrt[٣]{٢س - ٥}$ + $\sqrt[٤]{س^٢ + ٤}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ) ح (ب) $ح^+$ (جـ) [$\frac{٥}{٢}$ ، ∞[(د) [-٤ ، $\frac{٥}{٢}$]

⑤ الدالة د : د (س) = ٤ س $\sqrt{-س}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ) ح (ب)]-∞ ، ٤] (جـ)]-∞ ، ٠] (د) [٠ ، ∞[

⑥ الدالة د : د (س) = $\frac{س + ٢}{\sqrt{س} - ٢}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ) [٤ ، ∞[(ب) [٠ ، ∞[

(جـ) [٠ ، ∞[- {٤} (د)]-∞ ، ٢[

⑦ الدالة د : د (س) = طا ٢ س متصلة لكل س ∈ ....

(أ) ح - {س : س = $\frac{\pi}{٢}$ + π ن ، ن ∈ ص}

(ب) ح - {س : س = $\frac{\pi}{٤}$ + $\frac{\pi ن}{٢}$ ، ن ∈ ص}

(جـ) ح - {س : س = $\frac{\pi}{٤}$ + π ن ، ن ∈ ص}

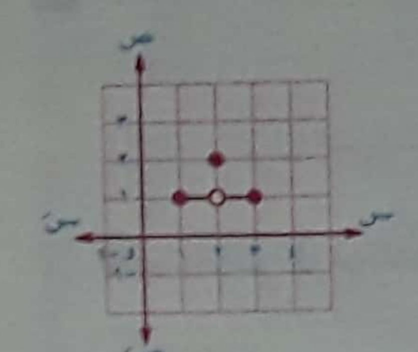
(د) ح - {س : س = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ π ن ، ن ∈ ص}

⑧ إذا كانت د : د (س) = $\begin{cases} س + ١ & ، ١ < س < ٣ \\ س^٢ + ب س + جـ & ، س ∈ ح -]١ ، ٣[\end{cases}$

متصلة على ح فإن : ب - جـ = ...

(أ) -٣ (ب) ١ (جـ) ٤ (د) -٧

⑨ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د أى الجمل الآتية صحيح ؟



(أ) د متصلة على الفترة [١ ، ٣]

(ب) د متصلة على الفترة]١ ، ٣[

(جـ) $\lim_{\text{س} \to \text{أ}}$ د (س) موجودة حيث أ ∈ [١ ، ٣]

(د) $\lim_{\text{س} \to \text{أ}}$ د (س) موجودة حيث أ ∈]١ ، ٣[



مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٨ ابحث اتصال كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين على مجالها :

① $\text{د (س)} = \begin{cases} |\text{س} - ١| + ٢\,\text{س} & ، \text{س} \leq ٢ \\ ٤\,\text{س} - \text{س}^{٢} & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$

② $\text{د (س)} = \begin{cases} \sqrt{٤ - \text{س}^{٢}} & ، |\text{س}| \leq ٢ \\ \text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} & ، |\text{س}| > ٢ \end{cases}$

٩ أوجد قيمة أ التى تجعل الدالة د : $\text{د (س)} = \frac{\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} + \text{أ س} + ٩}$ متصلة على ح

«]−٦ ، ٦[»

١٠ أوجد قيمة أ التى تجعل الدالة د : $\text{د (س)} = \frac{٢\,\text{س} + ١}{\text{س}^{٢} + ٦\,\text{س} + \text{أ}}$ متصلة على ح

«]٩ ، ∞[»

١١ إذا كانت : $\text{د (س)} = \begin{cases} -\text{س} & ، \text{س} < ٠ \\ ١ & ، \text{س} \geq ٠ \end{cases}$ ، $\text{ر (س)} = \begin{cases} ١ & ، \text{س} < ٠ \\ \text{س} & ، \text{س} \geq ٠ \end{cases}$

أثبت أن : د ، ر غير متصلة عند س = ٠ ، بينما الضرب (د . ر) متصلة عند س = صفر

١٢ إذا كانت : د (س) = { −١ ، س ≠ ٤ ؛ ١ ، س = ٤ }

، ر (س) = { ٤ س − ١٠ ، س ≠ ٤ ؛ −٦ ، س = ٤ }

فابحث اتصال كل من الدوال الآتية عند س = ٤

① د (س)

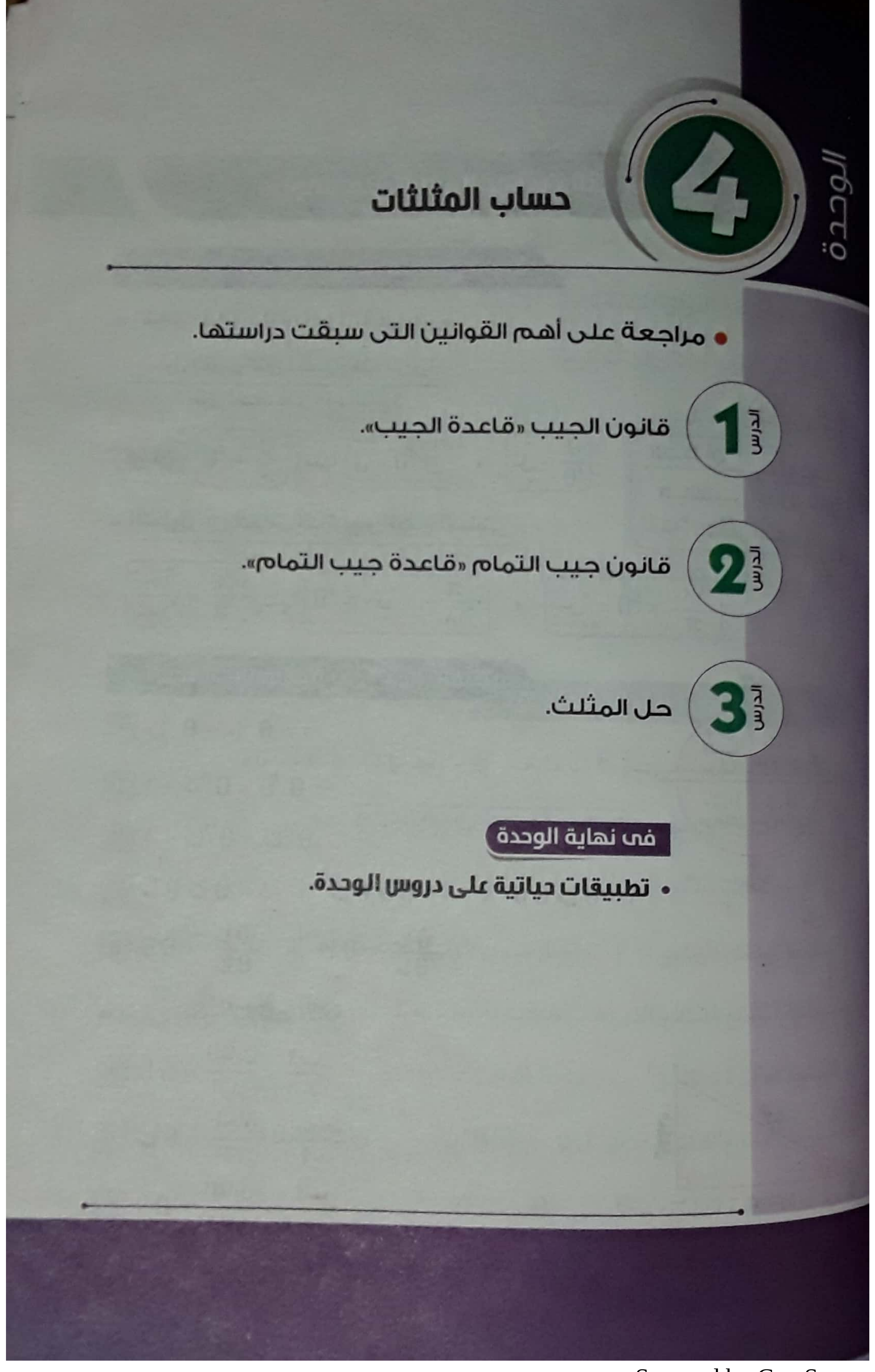
② ر (س)

③ د (س) . ر (س)

④ | د (س) |

⑤ ر (س) − ٦ د (س)

⑥ ر (د (س))



الوحدة 4

حساب المثلثات

- مراجعة على أهم القوانين التى سبقت دراستها.

الدرس 1 قانون الجيب «قاعدة الجيب».

الدرس 2 قانون جيب التمام «قاعدة جيب التمام».

الدرس 3 حل المثلث.

فى نهاية الوحدة

- تطبيقات حياتية على دروس الوحدة.

مراجعة على أهم القوانين التى سبقت دراستها

القياس الدائرى والقياس الستينى لزاوية



- القياس الدائرى لزاوية مركزية فى دائرة

$= \frac{\text{طول القوس الذى تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$

أى أن $\theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$ ومنها $ل = \theta^{ء}\ نق$ ، $نق = \frac{ل}{\theta^{ء}}$

لاحظ أن

π بالتقديـــر الدائرى تكافئ ${}^\circ١٨٠$ بالتقدير الستينى.

- **التحويل بين القياس الدائرى والقياس الستينى :**

$\frac{س^\circ}{١٨٠^\circ} = \frac{\theta^{ء}}{\pi}$ ومنها $\theta^{ء} = س^\circ \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ}$ ، $س^\circ = \theta^{ء} \times \frac{١٨٠^\circ}{\pi}$

العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية

١ $جتا^٢ \theta + جا^٢ \theta = ١$

٢ $١ + ظا^٢ \theta = قا^٢ \theta$

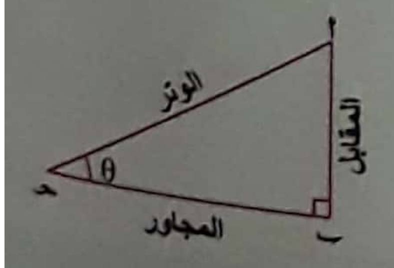
٣ $١ + ظتا^٢ \theta = قتا^٢ \theta$

٤ $جا \theta\ قتا \theta = ١$ ، $جتا \theta\ قا \theta = ١$ ، $ظا \theta\ ظتا \theta = ١$

٥ $ظا \theta = \frac{جا \theta}{جتا \theta}$ ، $ظتا \theta = \frac{جتا \theta}{جا \theta}$

ص
جميع النسب موجبة
جا ، قتا موجبتان
ظا ، ظتا موجبتان
جتا ، قا موجبتان
س
س َ
ص َ

- ينبغى تذكر العلاقات الآتية :



١ $جا \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{أب}{أحـ}$

٢ $جتا \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{بحـ}{أحـ}$

٣ $ظا \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{أب}{بحـ}$

٤ إذا كان الضلع النهائى للزاوية الموجهة التى قياسها θ فى وضعها القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة (س ، ص)

فإن : س = جتا θ ، ص = جا θ ، س^{٢} + ص^{٢} = ١

٥ العلاقات بين الدوال المثلثية للزوايا المنتسبة

هى متطابقات ويمكن أن نتذكرها

من الشكل المقابل :

فمثلاً :

جا (٩٠° + θ) = جتا θ

، طا (٣٦٠° − θ) = − طا θ

، ..... كل منهما متطابقة مثلثية.

مساحات بعض الأشكال الهندسية

- مساحة المثلث أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ أَ بَ جا حـ = $\frac{١}{٢}$ بَ حَ جا أ = $\frac{١}{٢}$ أَ حَ جا ب
- مساحة المثلث أ ب حـ = $\sqrt{ع (ع - أَ)(ع - بَ)(ع - حَ)}$

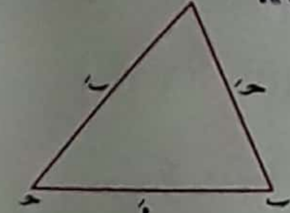
حيث ع = $\frac{أَ + بَ + حَ}{٢}$

- مساحة الشكل الرباعى = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى قطريه × جيب الزاوية المحصورة بينهما
- مساحة المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه ن وطول ضلعه س سم = $\frac{ن}{٤}$ س^{٢} ظتا $\frac{\pi}{ن}$
- مساحة الدائرة = π نق^{٢} ، محيط الدائرة = ٢ π نق
- مساحة القطاع الدائرى = $\frac{١}{٢}$ ل نق = $\frac{١}{٢}$ $\theta^{د}$ نق^{٢} ، محيط القطاع = ٢ نق + ل
- مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} ($\theta^{د}$ − جا θ)

الدرس 1

قانون الجيب (قاعدة الجيب)

«فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها».

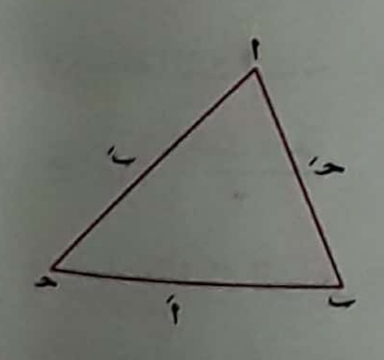


أى أنه فى أى مثلث ا ب حـ يكون : $\frac{\text{أَ}}{\text{جا ا}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{جا حـ}}$

حيث إن الرموز ا ، ب ، حـ تعبر عن قياسات زوايا Δ ا ب حـ

كما أن الرموز أَ ، بَ ، حَ تعبر عن أطوال الأضلاع : $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{ا حـ}}$ ، $\overline{\text{ا ب}}$ على الترتيب.

البرهـــان



$\because$ مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى ضلعين فيه

× جيب الزاوية المحصورة بينهما .

$\therefore$ مساحة Δ ا ب حـ = $\frac{1}{2}$ أَ حَ جا ب (١)

= $\frac{1}{2}$ حَ بَ جا ا (٢)

= $\frac{1}{2}$ أَ بَ جا حـ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) : $\therefore$ حَ بَ جا ا = أَ حَ جا ب = أَ بَ جا حـ

وبالقسمة على أَ بَ حَ : $\therefore$ $\frac{\text{جا ا}}{\text{أَ}} = \frac{\text{جا ب}}{\text{بَ}} = \frac{\text{جا حـ}}{\text{حَ}}$

$\therefore$ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا ا}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{جا حـ}}$ (وهو المطلوب)

برهـان آخـر

أولاً : إذا كان Δ ا ب حـ حاد الزوايا :

نرسم : اء ⊥ ب حـ ، ب هـ ⊥ ا حـ

فى Δ اء ب : $\frac{\text{اء}}{\text{اب}}$ = حا ب ∴ اء = ا ب حا ب = حَ حا ب

، فى Δ اء حـ : $\frac{\text{اء}}{\text{احـ}}$ = حا حـ ∴ اء = ا حـ حا حـ = بَ حا حـ

∴ حَ حا ب = بَ حا حـ ∴ $\frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا حـ}}$ (١)

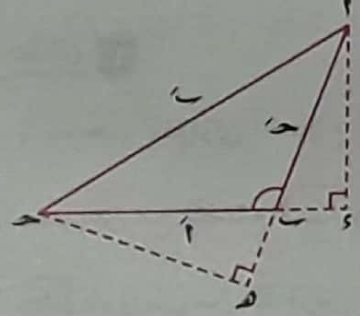
، وبالمثل فى Δ ب هـ ا : $\frac{\text{ب هـ}}{\text{اب}}$ = حا ا ∴ ب هـ = ا ب حا ا = حَ حا ا

، فى Δ ب هـ حـ : $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب حـ}}$ = حا حـ ∴ ب هـ = ب حـ حا حـ = أ حا حـ

∴ حَ حا ا = أ حا حـ ∴ $\frac{\text{أ}}{\text{حا ا}} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا حـ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{أ}}{\text{حا ا}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا حـ}}$ (وهو المطلوب)

ثانيًا : إذا كان Δ ا ب حـ منفرج الزاوية فى ب :



نرسم : اء ⊥ حـ ب ، حـ هـ ⊥ ا ب

فى Δ اء ب : $\frac{\text{اء}}{\text{اب}}$ = حا (∠ ا ب ء)

∴ اء = ا ب حا (١٨٠° − ب) = حَ حا ب

، فى Δ اء حـ : $\frac{\text{اء}}{\text{احـ}}$ = حا حـ ∴ اء = ا حـ حا حـ = بَ حا حـ

∴ حَ حا ب = بَ حا حـ ∴ $\frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا حـ}}$ (١)

، فى Δ حـ هـ ب : $\frac{\text{حـ هـ}}{\text{ب حـ}}$ = حا (∠ حـ ب هـ)

∴ حـ هـ = ب حـ حا (١٨٠° − ب) = أ حا ب

، فى Δ حـ هـ ا : $\frac{\text{حـ هـ}}{\text{احـ}}$ = حا ا ∴ حـ هـ = بَ حا ا

∴ أ حا ب = بَ حا ا ∴ $\frac{\text{أ}}{\text{حا ا}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{أ}}{\text{حا ا}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا حـ}}$ (وهو المطلوب)

* **لاحظ أن قانون الجيب صحيح أيضًا فى حالة المثلث القائم الزاوية.**



مثال ١

فى Δ أ ب حـ إذا كان : أ = ١٠ سم ، ق (∠ أ) = ٣٠° ، ق (∠ ب) = ٤٥°

فأوجد مستخدمًا حاسبة الجيب كلاً من :

بَ ، حـَ لرقم عشرى واحد وكذلك مساحة Δ أ ب حـ لأقرب عدد صحيح.

الحل

∵ ق (∠ حـ) = ١٨٠° − (٣٠° + ٤٥°) = ١٠٥°

∴ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{حـ}{جا حـ}$ ∴ $\frac{١٠}{جا ٣٠°} = \frac{ب}{جا ٤٥°} = \frac{حـ}{جا ١٠٥°}$

∴ بَ = $\frac{١٠ جا ٤٥°}{جا ٣٠°}$ ≈ ١٤,١ سم ، حـَ = $\frac{١٠ جا ١٠٥°}{جا ٣٠°}$ ≈ ١٩,٣ سم

، مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ بَ حـَ جا أ = $\frac{١}{٢}$ × ١٤,١ × ١٩,٣ جا ٣٠° ≈ ٦٨ سم^{٢}

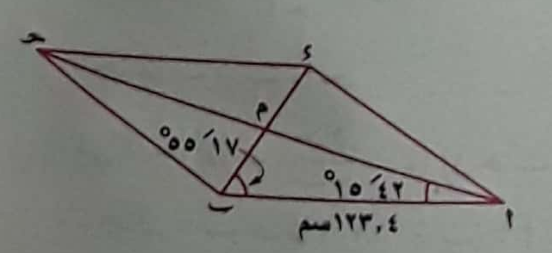
مثال ٢

أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ ب = ١٢٣,٤ سم ، القطران $\overline{أحـ}$ ، $\overline{بء}$

يصنعان مع الضلع $\overline{أب}$ زاويتين قياساهما ٤٢َ ١٥° ، ١٧َ ٥٥° على الترتيب **أوجد :**

١ طول كل من القطرين $\overline{بء}$ ، $\overline{أحـ}$ ٢ مساحة متوازى الأضلاع أ ب حـ ء

الحل



نفرض أن : $\overline{أحـ}$ ∩ $\overline{بء}$ = {م}

∴ فى Δ م أ ب :

ق (∠ أ م ب) = ١٨٠° − (٤٢َ ١٥° + ١٧َ ٥٥°) = ١َ ١٠٩°

∴ $\frac{١٢٣,٤}{جا ١َ ١٠٩°} = \frac{ب م}{جا ٤٢َ ١٥°} = \frac{أ م}{جا ١٧َ ٥٥°}$

∴ ب م = $\frac{١٢٣,٤ جا ٤٢َ ١٥°}{جا ١َ ١٠٩°}$ ≈ ٣٥,٣ سم ∴ ب ء = ٢ ب م = ٧٠,٦ سم

، م م = $\frac{١٢٣,٤ \text{ جا } ١٧ \text{ ً } ٥٥ \text{ ً}}{\text{جا } ١٠٩ \text{ ً}}$ ≈ ١٠٧,٣ سم ∴ م حـ = ٢ م م = ٢١٤,٦ سم

، مساحة ▱ م ب حـ ء = ٤ مساحة △ م م ب = ٤ × $\frac{١}{٢}$ × ب م × م م جا (∠ م م ب)

= ٤ × $\frac{١}{٢}$ × ٣٥,٣ × ١٠٧,٣ جا ١٠٩ ً ≈ ٧١٦٢ سم^{٢}

مثال ٣

م ب حـ مثلث فيه : ٣ جا م = ٤ جا ب = ٢ جا حـ أوجد أطوال أضلاعه إذا علم أن محيطه = ٣٩ سم

الحل

∵ ٣ جا م = ٤ جا ب = ٢ جا حـ وبالقسمة على ١٢ ∴ $\frac{\text{جا م}}{٤} = \frac{\text{جا ب}}{٣} = \frac{\text{جا حـ}}{٦}$

∴ $\frac{٤}{\text{جا م}} = \frac{٣}{\text{جا ب}} = \frac{٦}{\text{جا حـ}}$ ∴ مَ : بَ : حـَ = ٤ : ٣ : ٦

بفرض أن مَ = ٤ ك ، بَ = ٣ ك ، حـَ = ٦ ك

، ∵ محيط المثلث = ٣٩ سم ∴ ٤ ك + ٣ ك + ٦ ك = ٣٩

∴ ١٣ ك = ٣٩ ∴ ك = ٣

∴ مَ = ١٢ سم ، بَ = ٩ سم ، حـَ = ١٨ سم

مثال ٤

إذا كان محيط △ م ب حـ يساوى ٢٤ سم ، ق (∠ ب) = ٣٠ ً ، ق (∠ حـ) = ٤٨ ً أوجد : بَ

الحل

∵ ق (∠ م) = ١٨٠ ً − (٣٠ ً + ٤٨ ً) = ١٠٢ ً

∴ $\frac{\text{مَ}}{\text{جا م}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـَ}}{\text{جا حـ}}$ ∴ $\frac{\text{مَ}}{\text{جا } ١٠٢ \text{ ً}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا } ٣٠ \text{ ً}} = \frac{\text{حـَ}}{\text{جا } ٤٨ \text{ ً}}$

∵ $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالى}}$ = إحدى النسب ∴ $\frac{\text{مَ} + \text{بَ} + \text{حـَ}}{\text{جا } ١٠٢ \text{ ً} + \text{جا } ٣٠ \text{ ً} + \text{جا } ٤٨ \text{ ً}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا } ٣٠ \text{ ً}}$

∴ $\frac{٢٤}{\text{جا } ١٠٢ \text{ ً} + \text{جا } ٣٠ \text{ ً} + \text{جا } ٤٨ \text{ ً}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا } ٣٠ \text{ ً}}$

∴ بَ = $\frac{٢٤ \text{ جا } ٣٠ \text{ ً}}{\text{جا } ١٠٢ \text{ ً} + \text{جا } ٣٠ \text{ ً} + \text{جا } ٤٨ \text{ ً}}$ ≈ ٥,٤ سم

تمريـن مشهـور

في أي مثلث أ ب حـ يكون : $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حَـ}}{\text{جا حـ}} = ٢ \text{ نق}$

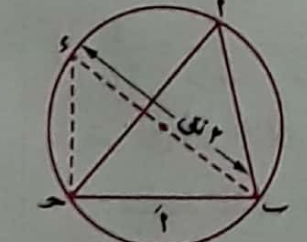
حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب حـ

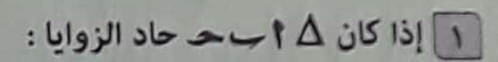
البرهـان

نرسم الدائرة التي تمر برؤوس Δ أ ب حـ

ثم نرسم القطر $\overline{\text{ب ء}}$ والوتر $\overline{\text{حـ ء}}$

١ إذا كان Δ أ ب حـ حاد الزوايا :





فيكون ق (∠ب حـ ء) = ٩٠° (محيطية مرسومة في نصف دائرة)

، ق (∠أ) = ق (∠ء) (محيطيتان تحصران $\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$)

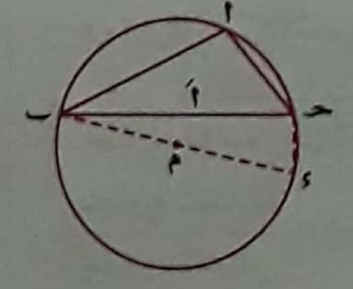
في Δ ء ب حـ : جا ء = $\frac{\text{أَ}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{أَ}}{٢ \text{ نق}}$

∴ جا أ = $\frac{\text{أَ}}{٢ \text{ نق}}$

∴ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}}$ = ٢ نق وبطريقة مماثلة يمكن إثبات أن : $\frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}}$ = ٢ نق ، $\frac{\text{حَـ}}{\text{جا حـ}}$ = ٢ نق

∴ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حَـ}}{\text{جا حـ}} = ٢ \text{ نق}$ (وهو المطلوب)

٢ إذا كان Δ أ ب حـ منفرج الزاوية :





فيكون : ق (∠ب ء حـ) = ١٨٠° - ق (∠أ)

∴ جا (١٨٠° - أ) = $\frac{\text{ب حـ}}{\text{ب ء}}$ ∴ جا أ = $\frac{\text{أَ}}{٢ \text{ نق}}$

∴ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}}$ = ٢ نق

∴ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حَـ}}{\text{جا حـ}} = ٢ \text{ نق}$ (وهو المطلوب)

مثال ٥

فى Δ أ ب حـ إذا كان : ب = ٧ سم ، ق (∠ ب) = ٣٠° ، حـ = ٩ سم

احسب طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب حـ واحسب أيضًا ق (∠ أ) لأقرب درجة.

الحـــل

∵ $\frac{ب}{جا ب}$ = ٢ نق ∴ $\frac{٧}{جا ٣٠°}$ = ٢ نق

∴ نق = $\frac{٧}{٢ جا ٣٠°}$ = ٧ سم

، ∵ $\frac{حـ}{جا حـ}$ = ٢ نق ∴ $\frac{٩}{جا حـ}$ = ١٤

∴ جا حـ = $\frac{٩}{١٤}$

∴ ق (∠ حـ) ≈ ٤٠° ∴ ق (∠ أ) = ١٨٠° − (٣٠° + ٤٠°) = ١١٠°

أ، ق (∠ حـ) ≈ ١٤٠° ∴ ق (∠ أ) = ١٨٠° − (٣٠° + ١٤٠°) = ١٠°

لاحظ أن

يوجد مثلثان يحققان هذه المعطيات وهذه الحالة تعرف بالحالة المبهمة وسوف ندرسها بالتفصيل فى درس حل المثلث.

مثال ٦

فى أى مثلث أ ب حـ

أثبت أن : مساحة Δ أ ب حـ = ٢ نق^{٢} جا أ جا ب جا حـ

حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ

الحـــل

∵ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ جا أ حيث ب = ٢ نق جا ب ، حـ = ٢ نق جا حـ

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٢ نق جا ب × ٢ نق جا حـ × جا أ

= ٢ نق^{٢} جا أ جا ب جا حـ





من أسئلة الكتاب المدرسى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① فى أى مثلث س ص ع يكون : س ص : ص ع = ...

(أ) حا س : حا ص (ب) حا ص : حا ع

(جـ) حا ع : حا س (د) حا ع : حا ص

② فى المثلث ء هـ و الذى فيه : ق (∠ ء) = ٨٠° ، ق (∠ هـ) = ٦٠°

إذا كان : وَ = ١٢ سم فإن : ءَ = ...

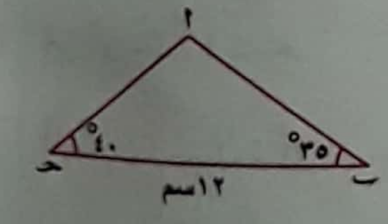
(أ) $\frac{١٢ \text{ حا } ٨٠°}{\text{حا } ٤٠°}$ (ب) $\frac{١٢ \text{ حا } ٨٠°}{\text{حا } ٦٠°}$

(جـ) $\frac{١٢ \text{ حا } ٤٠°}{\text{حا } ٨٠°}$ (د) $\frac{١٢ \text{ حتا } ٨٠°}{\text{حتا } ٤٠°}$

③ س ص ع مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه $١٠ \sqrt{٣}$ سم فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث يساوى ....

(أ) ٥ سم (ب) ١٠ سم (جـ) ١٥ سم (د) ٢٠ سم

④ فى الشكل المقابل :



طول $\overline{أب}$ ≃ .... سم (لأقرب سنتيمتر)

(أ) ٦ (ب) ٧

(جـ) ٨ (د) ٩

⑤ دائرة طول قطرها ٢٠ سم ، تمر برؤوس Δ أ ب جـ

الحاد الزوايا الذى فيه : ب جـ = ١٠ سم فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ١٥٠°

⑥ إذا كان طول ضلع ما فى أى مثلث = ١٢ سم ، وقياس الزاوية المقابلة لهذا الضلع = ٥٥° فإن محيط الدائرة المارة برؤوس هذا المثلث ≃ .... سم

(أ) ٣٦ (ب) ٤٢ (جـ) ٤٦ (د) ٥٢

(٧) في Δ س ص ع يكون المقدار : ٢ نق جا س = ...

(أ) عَ (ب) صَ

(جـ) سَ (د) مساحة Δ س ص ع

(٨) إذا كان نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث س ص ع

فإن : $\frac{\text{صَ}}{\text{٢ جا ص}}$ = ...

(أ) نق (ب) ٢ نق (جـ) $\frac{١}{٢}$ نق (د) ٤ نق

(٩) في أي مثلث أ ب حـ يكون $\frac{\text{جا (أ + ب)}}{\text{جا أ + جا ب}}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{\text{حـَ}}{\text{أَ + بَ}}$ (جـ) $\frac{\text{أَ}}{\text{بَ + حـَ}}$ (د) $\frac{\text{بَ}}{\text{أَ + حـَ}}$

(١٠) في Δ أ ب حـ يكون : $\frac{\text{أَ}}{\text{أَ + بَ}} = \frac{\text{جا أ}}{\text{.........}}$

(أ) جا ب (ب) جا حـ (جـ) جا أ + جا ب (د) جا أ + جا حـ

(١١) في Δ س ص ع : إذا كان ٣ جا س = ٤ جا ص = ٢ جا ع

فإن سَ : صَ : عَ = ...

(أ) ٢ : ٣ : ٤ (ب) ٦ : ٤ : ٣ (جـ) ٣ : ٤ : ٦ (د) ٤ : ٣ : ٦

(١٢) أ ب حـ مثلث فيه : $\frac{\text{جا أ}}{٣} = \frac{\text{٢ جا ب}}{٥} = \frac{\text{جا حـ}}{٤}$ فإن : أَ : بَ : حـَ = ...

(أ) ٦ : ٥ : ٨ (ب) ٨ : ٥ : ٦ (جـ) ٧ : ٢ : ٤ (د) ٣ : ٥ : ٤

---

٢ س ص ع مثلث فيه : ق (∠ س) = ٨٠° ، ق (∠ ص) = ٦٠° ، عَ = ١٠ سم

أوجد كلًا من سَ ، صَ لأقرب سم «١٥ سم ، ١٣ سم»

---

٣ أ ب حـ مثلث فيه : حـَ = ١٩ سم ، ق (∠ أ) = ١١٢° ، ق (∠ ب) = ٣٢°

أوجد بَ ثم أوجد طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث أ ب حـ لأقرب رقمين عشريين. «١٨,٠٤ سم ، ١٦,٥٦سم»

---

٤ ل م ن مثلث فيه : مَ = ٦٨,٤ سم ، ق (∠ م) = ١٠٠° ، ق (∠ ن) = ٤٠°

أوجد : (١) لَ (٢) طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ل م ن

(٣) مساحة المثلث ل م ن لأقرب سم^{٢} «٤٤,٦٤ سم ، ٣٤,٧٣ سم ، ٩٨١ سم^{٢}»

٥ ل م ن مثلث فيه : ق (∠ ل) = ٥٢َ ١٨° ، ق (∠ ن) = ١٧َ ٤٤° ، ن ل = ٣٥ سم

أوجد : (١) طول كل من : $\overline{م ن}$ ، $\overline{ل م}$

(٢) مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث ل م ن

«١٢,٧ سم ، ٢٧,٤ سم ، ١٢٠٨,٧ سم٢»

---

٦ أ ب حـ مثلث فيه : بَ = ١٠ سم ، ق (∠ أ) = ٤٠° ، ق (∠ حـ) = ٨٠°

أوجد طول أكبر الأضلاع طولاً. «١١ سم»

---

٧ أ ب حـ مثلث فيه : حَ = ٤,٥ سم ، ق (∠ أ) = ١٠٠° ، ق (∠ ب) = ١٥°

أوجد طول أصغر الأضلاع طولاً. «١,٢ سم»

---

٨ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٦٠° ، أَ = ٧ √٣ سم أوجد مساحة ومحيط الدائرة

المارة برؤوس المثلث أ ب حـ (π = ٢٢/٧) «١٥٤ سم٢ ، ٤٤ سم»

---

٩ 📖 أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٦٠° ، ق (∠ ب) = ٤٥°

أثبت أن : أَ : بَ : حَ = √٦ : ٢ : √٣ + ١

---

١٠ أ ب حـ مثلث فيه : أَ = ١٣ سم ، ق (∠ أ) = ٨َ ٥٣° ، حَ = ١٥ سم

احسب طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ ، احسب ق (∠ حـ)

«٨,١ سم ، ٩ً ٢٣َ ٦٧° أ ، ٥١ً ٣٦َ ١١٢°»

---

١١ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٣٥° ، أَ = ٨ سم ، بَ = ٦ سم **أوجد :** ق (∠ ب)

«٤٥ً ٢٨َ ٢٥°»

---

١٢ 📖 أوجد محيط المثلث أ ب حـ الذى فيه : حَ = ٨,٧ سم ، ق (∠ أ) = ١٣َ ٥٧°

، ق (∠ ب) = ١٨َ ٦٤°

«٢٦,٥ سم»

---

١٣ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ ب) = ٤٥° ، ق (∠ حـ) = ٦٠° ، وطول قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٤٠ سم احسب مساحة ومحيط هذا المثلث لأقرب عدد صحيح.

«٤٧٣ سم٢ ، ١٠٢ سم»

١٤ أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه : ق (∠ أ) = ١٢٠° ، وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوى ١٢ سم أوجد حـَ ثم احسب مساحة Δ أ ب حـ «١٢ سم ، ٦٢,٤ سم^٢»

---

١٥ أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه : أَ = بَ ، ق (∠ أ) = ١٥° ، محيطه = ٢٥ سم

أوجد مساحة الدائرة المارة برؤوسه. «٤٧٤ سم^٢»

---

١٦ 📖 إذا كان محيط Δ أ ب حـ = ٤٠ سم ، ق (∠ أ) = ٤٤° ، ق (∠ ب) = ٦٦°

فأوجد أطوال أضلاع المثلث أ ب حـ «١٠,٩ سم ، ١٤,٣ سم ، ١٤,٨ سم»

---

١٧ أ ب حـ مثلث فيه : حـَ = ١٢ سم ، ق (∠ ب) = ٣ ق (∠ أ) = ٦٠°

أوجد أَ ثم أوجد مساحة المثلث لأقرب سم^٢ «٤,٢ سم ، ٢٢ سم^٢»

---

١٨ 📖 أ ب حـ مثلث مساحة سطحه ٤٥٠ سم^٢ ، ق (∠ ب) = ٨٢° ، ق (∠ حـ) = ٥٦°

فما قيمة أَ ؟ «٢٧ سم»

---

١٩ أ ب حـ مثلث حاد الزوايا فيه : أ حـ = ١٢ سم ، جا أ = ٠,٦ ، مساحته تساوى ٤٣,٢ سم^٢

أوجد طول $\overline{\text{أ ب}}$ ، طول $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ق (∠ ب) «١٢ سم ، ٧,٦ سم ، ٧١° ٣٤َ»

---

٢٠ أوجد محيط المثلث أ ب حـ الحاد الزوايا إذا كان :

أَ = ٧ سم ، بَ = ٨ سم ، ق (∠ أ) = ٦٠° «٢٠ سم»

---

٢١ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، ء ∈ $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، ء ∉ $\overline{\text{ب حـ}}$ بحيث حـ ء = ٤ سم

، ق (∠ أ ء حـ) = ١٥° ٤٥َ ، ق (∠ حـ أ ء) = ١٨° أوجد طول $\overline{\text{أ ب}}$ لأقرب سم «٨ سم»

---

٢٢ س ص ع مثلث فيه : ص ع = ١٥ سم ، ق (∠ ص) = ٣٠° ، ق (∠ ع) = ٧٠°

احسب طول العمود الساقط من س على $\overline{\text{ص ع}}$ «٧,١٦ سم»

---

٢٣ أ ب حـ مثلث منفرج الزاوية فى حـ فيه : أَ = ٨ سم ، حـَ = ٢٠ سم ، ظا أ = $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$

أوجد : ق (∠ حـ) «١٢٣° ٣٣َ»

---

٢٤ أ ب حـ مثلث فيه : بَ = ٥ سم ، ظا حـ = $\frac{٤}{٣}$ ، ق (∠ ب) = ٣٠°

أوجد لأقرب سنتيمتر كلاً من أَ ، حـَ ومساحة المثلث أ ب حـ «١٠ سم ، ٨ سم ، ٢٠ سم^٢»

٢٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① في أي مثلث أ ب حـ يكون : $\frac{أ}{ب} \times \frac{جا ب}{جا أ}$ = ...

(أ) $\frac{حـ}{جا حـ}$ (ب) $\frac{جا حـ}{حـ}$ (جـ) ٤ نق^{٢} (د) ١

② إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : أ − ب = ٤ سم ، جا أ = $\frac{٣}{٢}$ جا ب

فإن : أ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٢

③ إذا كان أ ب حـ مثلث محيطه ٢٤ سم وكان : جا أ + جا ب = ٣ جا حـ

فإن : حـ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٩

④ أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، ق (∠ أ) − ق (∠ حـ) = °٩٠

فإن : طا حـ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

⑤ إذا كان نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث أ ب حـ وكان أ = نق

فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) °٣٠ (ب) °٣٠ أ، °١٢٠ (جـ) °١٥٠ (د) °٣٠ أ، °١٥٠

⑥ إذا كانت مساحة المثلث أ ب حـ هي Δ ، نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه

فإن : $\frac{٤ نق Δ}{أ ب حـ}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) $\frac{١}{٢}$

⑦ 📖 في Δ أ ب حـ يكون $\frac{٢ ب}{جا ب}$ = ... نق

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

⑧ إذا كان المثلث أ ب حـ قائم الزاوية ومتساوي الساقين ، نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه فإن مساحة Δ أ ب حـ = ... (بدلالة نق)

(أ) $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} (ب) ٢ نق^{٢} (جـ) نق^{٢} (د) ٤ نق^{٢}

⑨ في الشكل المقابل :

إذا كان محيط Δ أ ب حـ = ٢٠ سم

فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه ≈ .... سم

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

⑩ إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : جا (ب + حـ) = $\frac{٣}{٥}$ ، ب حـ = ٨ سم

فإن طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١٠

---

٢٦ س ص ع مثلث فيه : جا س + جا ص + جا ع = ٢,٣٧ ، ومحيطه = ٥٦,٨٨ سم

أوجد طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه. «١٢ سم»

---

٢٧ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٦٠° ، ق (∠ ب) = ٤٥° فإذا كان :

أ + ب = ($\sqrt{٦}$ + ٢) سم فأوجد كلاً من : أ ، ب «$\sqrt{٦}$ سم ، ٢ سم»

---

٢٨ أ ب حـ مثلث فيه : جا أ : جا ب : جا حـ = ٢ : ٤ : ٥ ، حـ − ب = ٣ سم

أوجد كلاً من : أ ، ب «٦ سم ، ١٢ سم»

---

٢٩ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) : ق (∠ ب) : ق (∠ حـ) = ٣ : ٤ : ٣

فإذا كان : أ = ٥ سم فأوجد محيط المثلث. «١٥,٩ سم»

---

٣٠ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) : ق (∠ ب) : ق (∠ حـ) = ١ : ٣ : ٥

، فإذا كان محيط المثلث = ١٦ سم فأوجد طول أصغر أضلاع المثلث طولاً. «٢,٥ سم»

---

٣١ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = $\frac{٢}{٣}$ ق (∠ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق (∠ حـ) ، طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ١٠ سم أوجد مساحة Δ أ ب حـ «١١٠ سم٢»

---

٣٢ أ ب حـ مثلث فيه : ٦ جا أ = ٤ جا ب = ٣ جا حـ ، محيطه = ٤٥ سم

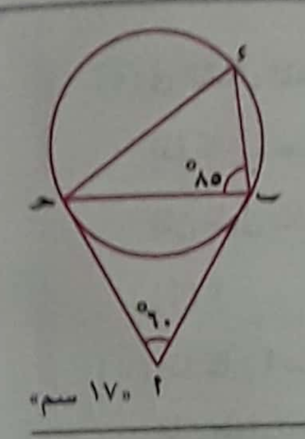
أوجد كلاً من : أ ، حـ «١٠ سم ، ٢٠ سم»

---

٣٣ في Δ أ ب حـ إذا كان : $\frac{أ + ب - حـ}{٣} = \frac{أ + حـ - ب}{٥} = \frac{ب + حـ - أ}{٧}$

فأثبت أن : جا أ : جا ب : جا حـ = ٤ : ٥ : ٦

٣٤ فى الشكل المقابل :



أب ، أحـ قطعتان مماستان للدائرة عند ب ، حـ

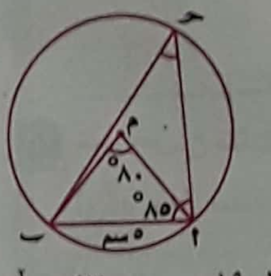
فإذا كان : ق (∠ أ) = ٦٠° ، ق (∠ ء ب حـ) = ٨٥°

، مساحة المثلث أ ب حـ = ٩ $\sqrt{3}$ سم²

فأوجد لأقرب سنتيمتر محيط المثلث ء ب حـ

«١٧ سم»

٣٥ فى الشكل المقابل :



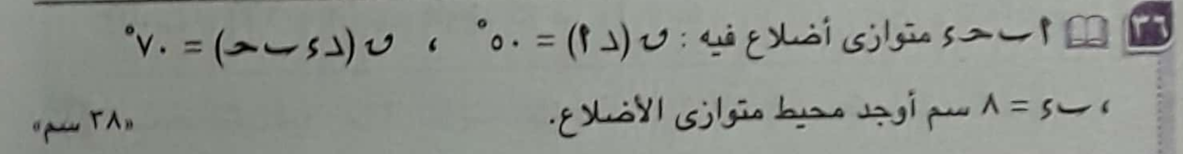
م دائرة ، أ ب = ٥ سم ، ق (∠ أ م ب) = ٨٠°

، ق (∠ حـ أ ب) = ٨٥°

أوجد : (١) محيط Δ أ ب حـ

(٢) مساحة سطح الدائرة م

«١٩,١٢ سم ، ٤٧,٥ سم²»



٣٦ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : ق (∠ أ) = ٥٠° ، ق (∠ ء ب حـ) = ٧٠°

، ب ء = ٨ سم أوجد محيط متوازى الأضلاع.

«٣٨ سم»

٣٧ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ ب = ١٨ سم ، ق (∠ حـ أ ب) = ٣٦°

، ق (∠ ء ب أ) = ٤٤° أوجد طول القطر أحـ ، ومساحة متوازى الأضلاع.

«٢٥,٣٩ سم ، ٢٦٩ سم²»

٣٨ أ ب حـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م ، أ حـ = ٢٠ سم ، ق (∠ أ م ء) = ١٣٠°

، ق (∠ حـ أ ب) = ٨٥° أوجد طول ب ء ثم أوجد مساحة متوازى الأضلاع أ ب حـ ء

«٢٨,٢ سم ، ٢١٦ سم²»

٣٩ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : أء // ب حـ ، أ ء = ٢٠ سم ، ق (∠ ء) = ١٢٠°

، ق (∠ ب) = ٦٢° ، ق (∠ أ حـ ب) = ٢٣° ٢٥َ

أوجد : (١) طول كل من : أحـ ، ب حـ لأقرب سم

(٢) مساحة شبه المنحرف أ ب حـ ء لأقرب سم²

«٢٩ سم ، ٣٣ سم ، ٣٠٥ سم²»

٤٠ أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : حـ ء = ١٠٠ سم ، ق (∠ ب حـ أ) = ٣٦°

، ق (∠ ب ء أ) = ٥٥° ، ق (∠ ب حـ ء) = ٨٥° ، ق (∠ حـ ء أ) = ٨٧°

أوجد طول كل من : ب ء ، أ حـ لأقرب سنتيمتر «١١٢ سم ، ١٤٤ سم»

٤١ إذا كان أ ب حـ ء شكلاً رباعيًا فيه : ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠° ، ق (∠ ب أ ء) = ٨٠°

، أ ب = أ ء = ١٠ سم ، ب ء = ب حـ احسب مساحة الشكل أ ب حـ ء «١٠٢ سم²»

٤٢ فى أى مثلث أ ب حـ :

أثبت أن : (١) $\frac{٣ أ - ٤ ب}{٣ جا أ - ٤ جا ب} = \frac{حـ}{جا حـ}$ (٢) مساحة المثلث = $\frac{أ^٢ جا ب جا حـ}{٢ جا أ}$

(٣) مساحة المثلث = $\frac{أ ب حـ}{٤ نق}$

حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٤٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث أ ب حـ يساوى ٣ سم

فإن : $\frac{أ ب حـ}{جا أ جا ب جا حـ}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٢٧ (د) ٢١٦

(٢) إذا كان أ ب حـ مثلث فإن : أ قتا أ + ب قتا ب + حـ قتا حـ = ...

(أ) ٢ نق (ب) ٤ نق (جـ) ٦ نق (د) ٨ نق

(٣) إذا كان : أ = جا ب ، ب = جا حـ ، حـ = جا أ فإن محيط الدائرة المارة

برؤوس المثلث أ ب حـ يساوى ....

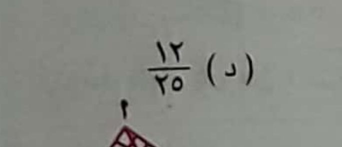
(أ) ١ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) π (د) ٢ π

(٤) فى Δ أ ب حـ : $\frac{أ جا أ + ب جا ب + حـ جا حـ}{أ^٢ + ب^٢ + حـ^٢}$ = ...

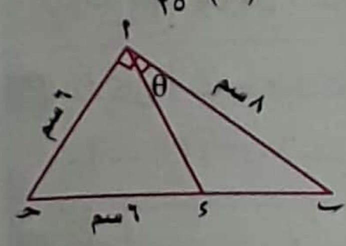
(أ) $\frac{١}{نق^٢}$ (ب) $\frac{١}{٢ نق}$ (جـ) ٢ نق (د) نق²

⑤ إذا كان أ ب حـ مثلث مساحته ٢٤ سم^{٢} وكان طول نصف قطر الدائرة الخارجة عنه ٥ سم فإن : جا أ جا ب جا (أ + ب) = ……………

(أ) $\frac{٣}{٢٥}$ (ب) $\frac{٦}{٢٥}$ (جـ) $\frac{٩}{٢٥}$ (د) $\frac{١٢}{٢٥}$



⑥ في الشكل المقابل :

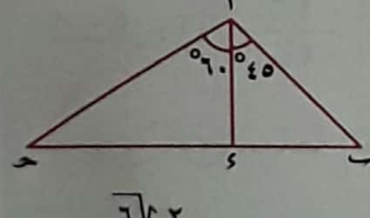


ظا θ = ……………

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$

(جـ) ٢ (د) ١

⑦ في الشكل المقابل :

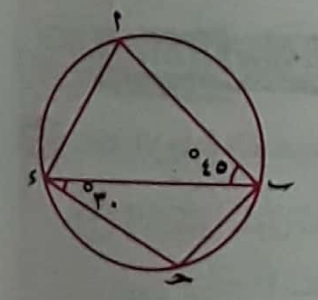


إذا كان : حـ ء = ٢ ء ب

فإن : $\frac{\text{جا ب}}{\text{جا حـ}}$ = ……………

(أ) $\sqrt{٦}$ (ب) $\frac{\sqrt{٦}}{٤}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٦}}{٣}$ (د) $\frac{٢\sqrt{٦}}{٣}$

⑧ في الشكل المقابل :



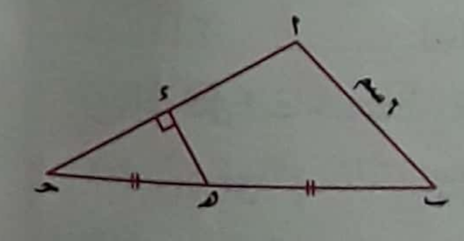
إذا كان : أ ء = ٤ $\sqrt{٢}$ سم

فإن : ب حـ = …………… سم

(أ) ٢ $\sqrt{٢}$ (ب) ٤

(جـ) ٤ $\sqrt{٢}$ (د) ٨

⑨ في الشكل المقابل :



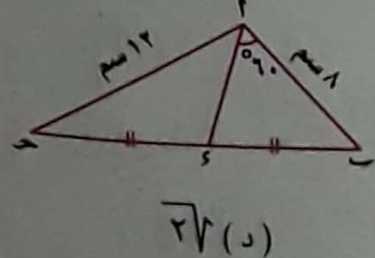
إذا كان : ظا (∠ ء هـ حـ) = $\frac{٣}{٤}$

فإن طول نصف قطر الدائرة المارة

برؤوس Δ أ ب حـ = …………… سم

(أ) ٣ (ب) ٣,٥ (جـ) ٣,٧٥ (د) ٤

⑩ في الشكل المقابل :



ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ق (∠ ب أ ء) = ٦٠°

فإن : ظا (∠ ء أ حـ) = ……………

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (جـ) ١ (د) $\sqrt{٢}$

(١١) فى الشكل المقابل :

مساحة الجزء المظلل ≈ .... سم^{٢}

(أ) ٤,٣٧ (ب) ٢٦,٢

(جـ) ٤٣,٧ (د) ٥٢,٦

---

٤٤ إذا كان أ ب حـ ء شكلاً رباعيًا دائريًا

أثبت أن : ب حـ × جا (د أ ب ء) = أ ء × جا (د حـ ء ب)

---

٤٥ فى المثلث أ ب حـ :

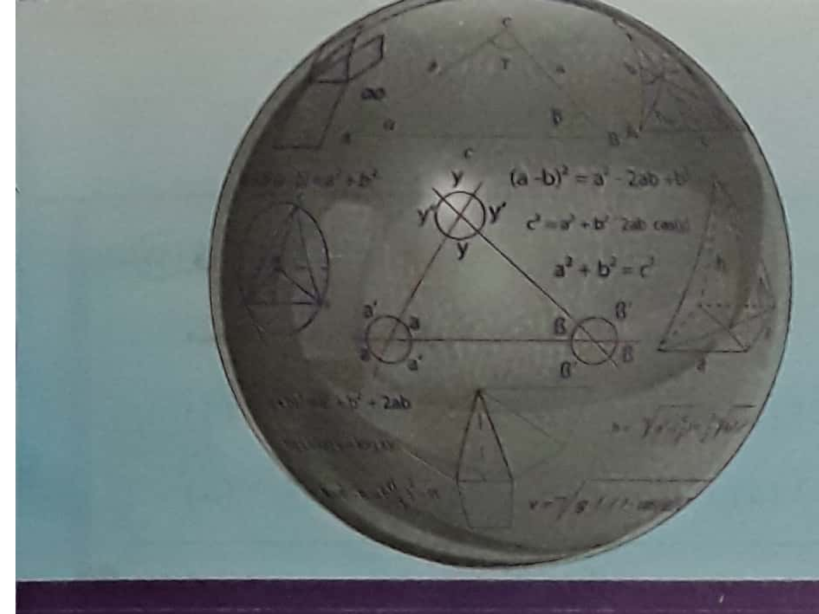
أثبت أن : (١) جا أ + جا ب + جا حـ = $\frac{\text{٤ ع }\Delta}{\text{أَ بَ حَ}}$

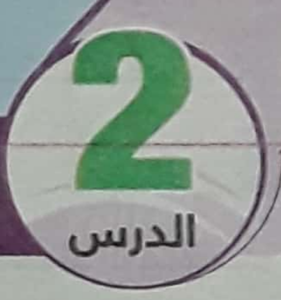
(٢) $\frac{\text{١}}{\text{حَ جا أ}} + \frac{\text{١}}{\text{أَ جا ب}} + \frac{\text{١}}{\text{بَ جا حـ}} = \frac{\text{ع}}{\Delta}$

حيث ع نصف محيط المثلث أ ب حـ ، Δ مساحة المثلث أ ب حـ

---

٤٦ أثبت أن مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ تساوى $\frac{\pi\ \text{أَ بَ}}{\text{٤ جا أ جا ب}}$





قانون جيب التمام (قاعدة جيب التمام)

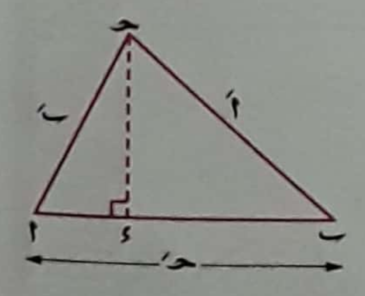
فى أى مثلث أ ب حـ يكون :

$أ^2 = ب^2 + حـ^2 - 2 ب حـ$ جتا أ	ومنها	جتا أ $= \frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{2 ب حـ}$
$ب^2 = أ^2 + حـ^2 - 2 أ حـ$ جتا ب	ومنها	جتا ب $= \frac{أ^2 + حـ^2 - ب^2}{2 أ حـ}$
$حـ^2 = أ^2 + ب^2 - 2 أ ب$ جتا حـ	ومنها	جتا حـ $= \frac{أ^2 + ب^2 - حـ^2}{2 أ ب}$

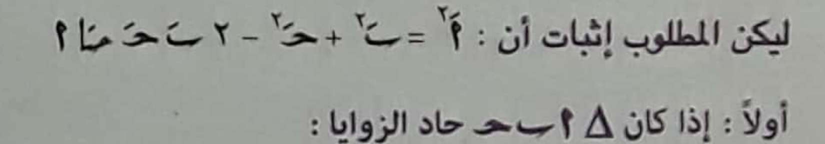
تستخدم هذه القاعدة إذا علم طولا ضلعين فى Δ أ ب حـ وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

تستخدم هذه القاعدة إذا علمت أطوال أضلاع Δ أ ب حـ أو النسبة بينها.

البرهـــان



ليكن المطلوب إثبات أن : $أ^2 = ب^2 + حـ^2 - 2 ب حـ$ جتا أ



أولاً : إذا كان Δ أ ب حـ حاد الزوايا :

نرسم $\overleftrightarrow{حـ ء} \perp \overline{أ ب}$ يقطعها فى ء

، من Δ أ ء حـ نجد أن : حـ ء = ب جا أ ، أ ء = ب جتا أ

$\therefore$ ب ء = حـ − ب جتا أ

، فى Δ حـ د ب القائم الزاوية فى د : ∵ (ب حـ)^{٢} = (حـ د)^{٢} + (د ب)^{٢}

أى أن أَ^{٢} = (بَ جا أ)^{٢} + (حَ − بَ جتا أ)^{٢}

= بَ^{٢} جا^{٢} أ + حَ^{٢} − ٢ بَ حَ جتا أ + بَ^{٢} جتا^{٢} أ

= بَ^{٢} (جا^{٢} أ + جتا^{٢} أ) + حَ^{٢} − ٢ بَ حَ جتا أ

∴ أَ^{٢} = بَ^{٢} + حَ^{٢} − ٢ بَ حَ جتا أ

ومنها جتا أ = $\frac{\text{بَ}^{٢} + \text{حَ}^{٢} - \text{أَ}^{٢}}{\text{٢ بَ حَ}}$ (وهو المطلوب)

تذكر أن

جا^{٢} أ + جتا^{٢} أ = ١

ثانيًا : إذا كان Δ أ ب حـ منفرج الزاوية فى أ :

نرسم $\overleftrightarrow{\text{حـ د}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ يقطعه فى د

، فى Δ أ د حـ نجد أن : حـ د = بَ جا (١٨٠° − أ)

، أ د = بَ جتا (١٨٠° − أ) ∴ ب د = حَ + بَ جتا (١٨٠° − أ)

، فى Δ حـ د ب القائم الزاوية فى د : ∵ (ب حـ)^{٢} = (حـ د)^{٢} + (د ب)^{٢}

أى أن أَ^{٢} = (بَ جا (١٨٠° − أ))^{٢} + (حَ + بَ جتا (١٨٠° − أ))^{٢}

= (بَ جا أ)^{٢} + (حَ − بَ جتا أ)^{٢} = بَ^{٢} جا^{٢} أ + حَ^{٢} − ٢ بَ حَ جتا أ + بَ^{٢} جتا^{٢} أ

= بَ^{٢} (جا^{٢} أ + جتا^{٢} أ) + حَ^{٢} − ٢ بَ حَ جتا أ

∴ أَ^{٢} = بَ^{٢} + حَ^{٢} − ٢ بَ حَ جتا أ ومنها جتا أ = $\frac{\text{بَ}^{٢} + \text{حَ}^{٢} - \text{أَ}^{٢}}{\text{٢ بَ حَ}}$ (وهو المطلوب)

لاحظ أن : قانون جيب التمام صحيح أيضًا فى حالة المثلث القائم الزاوية

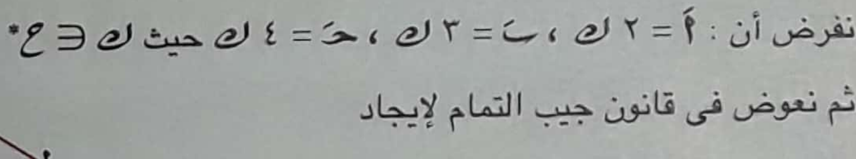
[وذلك بوضع جتا أ = جتا ٩٠° = صفر]

ملاحظـــات

* لإيجاد قياس إحدى زوايا مثلث يفضل استخدام قانون جيب التمام لأنه يحدد نوع الزاوية إذا كانت حادة أو منفرجة.

* إذا كان أَ : بَ : حَ = ٢ : ٣ : ٤

نفرض أن : أَ = ٢ ك ، بَ = ٣ ك ، حَ = ٤ ك حيث ك ∈ ع*



ثم نعوض فى قانون جيب التمام لإيجاد

قياسات زوايا △ أ ب حـ

* لإثبات أن الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى :

– نثبت أن زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان :

ق (∠ أ) + ق (∠ حـ) = ١٨٠° **أى أن** حتا أ + حتا حـ = صفر

أ ، ق (∠ ب) + ق (∠ ء) = ١٨٠° **أى أن** حتا ب + حتا ء = صفر

– نثبت أن قياسى زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة فيه وفى جهة واحدة منها متساويان :

كأن نثبت أن : ق (∠ ب أ حـ) = ق (∠ ب ء حـ) **أى أن** حتا (∠ ب أ حـ) = حتا (∠ ب ء حـ)

مثال ١

فى △ أ ب حـ أوجد قيمة أَ إذا كان :

بَ = ٣٠ سم ، حَ = ١٤ سم ، ق (∠ أ) = ٦٠°

الحـــل

∵ $أَ^٢$ = $بَ^٢$ + $حَ^٢$ − ٢ بَ حَ حتا أ

∴ $أَ^٢$ = $(٣٠)^٢$ + $(١٤)^٢$ − ٢ × ٣٠ × ١٤ × حتا ٦٠° = ٦٧٦ ∴ أَ = $\sqrt{٦٧٦}$ = ٢٦ سم

مثال ٢

س ص ع مثلث فيه : سَ = ٤ سم ، صَ = ٥ سم ، عَ = ٦ سم

احسب قياس أكبر زواياه ، وكذلك احسب مساحته.

الحل

أكبر الزوايا قياسًا تقابل أكبر الأضلاع طولاً.

$\therefore \text{جتا ع} = \frac{\text{س}^2 + \text{ص}^2 - \text{ع}^2}{2\,\text{س ص}} = \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2 \times 4 \times 5} = 0.125 \quad \therefore \text{ق}(\angle \text{ع}) \approx 82^\circ\ 49'\ 9''$

، مساحة المثلث $= \frac{1}{2}\,\text{س ص جا ع} = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \text{جا}\ 82^\circ\ 49'\ 9'' \approx 9.9$ سم^2

مثال ٣

أ ب ح مثلث فيه : $\frac{1}{2}\,\text{جا أ} = \frac{1}{3}\,\text{جا ب} = \frac{1}{4}\,\text{جا ح}$ احسب : ق$(\angle$ ح$)$

الحل

$\because \frac{\text{جا أ}}{2} = \frac{\text{جا ب}}{3} = \frac{\text{جا ح}}{4} \qquad \therefore \frac{2}{\text{جا أ}} = \frac{3}{\text{جا ب}} = \frac{4}{\text{جا ح}}$

$\therefore$ أَ : بَ : حَ $= 2 : 3 : 4$ وبفرض أن : أَ $= 2$ ك ، بَ $= 3$ ك ، حَ $= 4$ ك

$\therefore \text{جتا ح} = \frac{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 - \text{ح}^2}{2\,\text{أ ب}} = \frac{4\text{ك}^2 + 9\text{ك}^2 - 16\text{ك}^2}{2 \times 2\text{ك} \times 3\text{ك}} = \frac{-3\text{ك}^2}{12\text{ك}^2} = -\frac{1}{4}$

$\therefore \text{ق}(\angle \text{ح}) = 104^\circ\ 28'\ 39''$

مثال ٤

أ ب ح مثلث فيه : أَ $= 13$ سم ، بَ $= 14$ سم ، حَ $= 15$ سم

أوجد طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه.

الحل

$\because \text{جتا أ} = \frac{\text{ب}^2 + \text{ح}^2 - \text{أ}^2}{2\,\text{ب ح}} = \frac{196 + 225 - 169}{2 \times 14 \times 15} = \frac{3}{5} \qquad \therefore \text{جا أ} = \frac{4}{5}$

، $\because \frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = 2\,\text{نق} \qquad \therefore \frac{13}{\frac{4}{5}} = 2\,\text{نق} \qquad \therefore \text{نق} = \frac{13}{2 \times \frac{4}{5}} = 8\frac{1}{8}$ سم

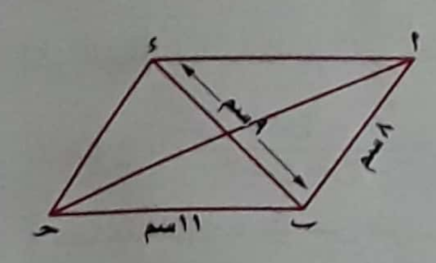
مثال ٥

أ ب ح ء متوازي أضلاع فيه : أ ب $= 8$ سم ، ب ح $= 11$ سم ، ب ء $= 9$ سم

أوجد طول قطره : $\overline{\text{أ ح}}$



الحـــل



في Δ ا ب ء : حتا ا = $\frac{(٨)^٢ + (١١)^٢ - (٩)^٢}{٢ \times ٨ \times ١١} = \frac{١٣}{٢٢}$

، ∵ ∠ب تكمل ∠ا (زاويتان متتاليتان في ▱ ا ب حـ ء)

∴ حتا ب = - حتا ا = $\frac{-١٣}{٢٢}$

∴ في Δ ا ب حـ : $(اح)^٢ = (٨)^٢ + (١١)^٢ - ٢ \times ٨ \times ١١ \times \frac{-١٣}{٢٢} = ٢٨٩$

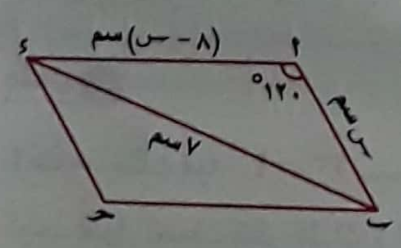
∴ ا حـ = ١٧ سم

مثال ٦

ا ب حـ ء متوازي أضلاع فيه : ق (∠ا) = ١٢٠° ، ومحيطه = ١٦ سم

وطول القطر الأكبر فيه = ٧ سم أوجد مساحة متوازي الأضلاع علمًا بأن ا ب < ب حـ

الحـــل



نصف محيط متوازي الأضلاع = $\frac{١٦}{٢}$ = ٨ سم

فبفرض أن ا ب = س سم ∴ ا ء = (٨ - س) سم

∴ في Δ ا ب ء : ∵ $(ب ء)^٢ = (ا ب)^٢ + (ا ء)^٢ - ٢$ (ا ب) (ا ء) حتا ١٢٠°

∴ $٤٩ = س^٢ + (٨ - س)^٢ - ٢ س (٨ - س) \times (-\frac{١}{٢})$

∴ $٤٩ = س^٢ + ٦٤ - ١٦ س + س^٢ + ٨ س - س^٢$

∴ $س^٢ - ٨ س + ١٥ = ٠$ ∴ (س - ٣) (س - ٥) = ٠ ∴ س = ٣ أ، س = ٥

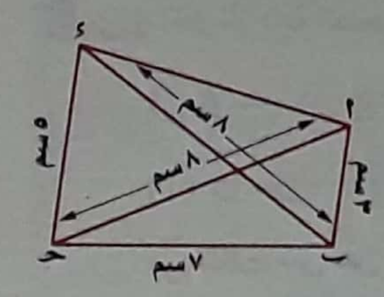
، ∵ ا ب < ب حـ ∴ ا ب = ٣ سم ، ا ء = ٥ سم

∴ م (▱ ا ب حـ ء) = ٢ م (Δ ا ب ء) = $٢ \times \frac{١}{٢} \times ٣ \times ٥ \times$ حا ١٢٠° = $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$ سم^٢

مثال ٧

أ ب حـ ء شكل رباعي فيه : أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٧ سم ، حـ ء = ٥ سم ، أ حـ = ب ء = ٨ سم **أثبت أن :** الشكل أ ب حـ ء رباعي دائرى.

الحل



فى Δ ب أ حـ : جتا (∠ ب أ حـ) = $\frac{(٣)^{٢} + (٨)^{٢} - (٧)^{٢}}{٢ \times ٣ \times ٨} = \frac{١}{٢}$

، فى Δ ب ء حـ : جتا (∠ ب ء حـ) = $\frac{(٥)^{٢} + (٨)^{٢} - (٧)^{٢}}{٢ \times ٥ \times ٨} = \frac{١}{٢}$

∴ جتا (∠ ب أ حـ) = جتا (∠ ب ء حـ)

∴ ق (∠ ب أ حـ) = ق (∠ ب ء حـ) (وهما مرسومتان على $\overline{\text{ب حـ}}$ وفى جهة واحدة منها)

∴ الشكل أ ب حـ ء رباعي دائرى.

مثال ٨

أ ب حـ مثلث فيه : ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ **أثبت أن :** (أ ب)^{٢} + (أ حـ)^{٢} = ٢ (أ ء)^{٢} + ٢ (ب ء)^{٢}

وإذا كان : أ ب = ٣ سم ، أ حـ = ٤ سم ، أ ء = $\sqrt{٣,٥}$ سم **فأوجد طول :** $\overline{\text{ب حـ}}$

الحل

Δ أ ب ء فيه :

(أ ب)^{٢} = (أ ء)^{٢} + (ب ء)^{٢} − ٢ (أ ء) (ب ء) جتا (∠ أ ء ب) (١)

، Δ أ حـ ء فيه :

(أ حـ)^{٢} = (أ ء)^{٢} + (حـ ء)^{٢} − ٢ (أ ء) (حـ ء) جتا (∠ أ ء حـ)

، ∵ جتا (∠ أ ء ب) = − جتا (∠ أ ء حـ) ، حـ ء = ب ء

∴ (أ حـ)^{٢} = (أ ء)^{٢} + (ب ء)^{٢} + ٢ (أ ء) (ب ء) جتا (∠ أ ء ب) (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ (أ ب)^{٢} + (أ حـ)^{٢} = ٢ (أ ء)^{٢} + ٢ (ب ء)^{٢} (المطلوب أولاً)

∴ (٣)^{٢} + (٤)^{٢} = ٢ $(\sqrt{٣,٥})^{٢}$ + ٢ (ب ء)^{٢}

∴ ٢٥ = ٧ + ٢ (ب ء)^{٢} ∴ (ب ء)^{٢} = ٩

∴ ب ء = ٣ سم ∴ ب حـ = ٦ سم (المطلوب ثانيًا)





تمارين 20
على قانون جيب التمام (قاعدة جيب التمام)

من أسئلة الكتاب المدرسي

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① فى Δ س ص ع المقدار $\frac{\text{س}^2 + \text{ص}^2 - \text{ع}^2}{2\ \text{س ص}}$ = ...

(أ) جتا س　(ب) جتا ص　(جـ) جتا ع　(د) جا ع

② فى المثلث س ص ع يكون : ص٢ + ع٢ − س٢ = ٢ ص ع × ....

(أ) جتا س　(ب) جا ع　(جـ) جتا ع　(د) جا س

③ فى المثلث س ص ع إذا كان : س = ص فإن : جتا س = ...

(أ) $\frac{2\ \text{ص}^2}{\text{ع}}$　(ب) $\frac{\text{ع}}{2\ \text{ص}}$　(جـ) $\frac{\text{ع}}{4\ \text{س}}$　(د) $\frac{\text{ص}}{2\ \text{س}}$

④ فى Δ أ ب جـ يكون جتا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 - \text{جـ}^2}{2\ \text{أ ب}}$　(ب) $\frac{\text{أ}^2 + \text{جـ}^2 - \text{ب}^2}{2\ \text{أ ب}}$

(جـ) $\frac{\text{ب}^2 + \text{جـ}^2 - \text{أ}^2}{2\ \text{ب جـ}}$　(د) $\frac{\text{جـ}^2 - \text{أ}^2 - \text{ب}^2}{2\ \text{أ ب}}$

---

٢ س ص ع مثلث فيه : ق (∠ ع) = ٩٥° ، س = ١٣ سم ، ص = ١٦ سم

أوجد : ع　«٢١,٥ سم»

---

٣ أ ب جـ مثلث فيه : أ = ٣ سم ، جـ = ٥ سم ، ق (∠ ب) = ٢١َ ٣٦°

أوجد : ب لأقرب سم　«٣ سم»

---

٤ فى المثلث أ ب جـ إذا كان : أ = ٣ سم ، ب = ٥ سم ، جـ = ٧ سم

أثبت أن : ق (∠ جـ) = ١٢٠°

---

٥ أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ الذى فيه : أ = ٧,٦ سم ، ب = ٥,٨ سم ، جـ = ٣,٤ سم

«١٠٨ ٣٤°، ٤٦ ٢٠°، ٢٥ ٦°»

٦ ا ب حـ مثلث فيه : أ = ١٣ سم ، ب = ١٤ سم ، حـ = ١٥ سم

أوجد : ق (∠ ب) ثم أوجد مساحة سطح المثلث ا ب حـ لأقرب سم^2 «٢٩َ ٥٩° ، ٨٤ سم^2»

٧ أوجد قياس أصغر زاوية فى Δ س ص ع إذا كان :

س = ١٨ سم ، ص = ٢٧ سم ، ع = ٢٤ سم

ثم أوجد مساحة الدائرة المارة بروؤس المثلث س ص ع «٤٨َ ٤٠° ، ٥٩٦ سم^2»

٨ ا ب حـ مثلث فيه : ق (∠ حـ) = ٢٣َ ٩٦° ، أ = ٧ سم ، ب = ٩ سم أوجد :

(١) حـ (٢) مساحة سطح المثلث ا ب حـ لأقرب سم^2

(٣) طول نصف قطر الدائرة المارة بروؤس المثلث ا ب حـ لأقرب سنتيمتر.

«١٢ سم ، ٣١ سم^2 ، ٦ سم»

٩ ا ب حـ مثلث محيطه ٥٢ سم ، أ = ١٣ سم ، ب = ١٧ سم أوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث ثم احسب مساحة سطحه لأقرب سنتيمتر مربع. «٢٢َ ٩٣° ، ١١٠ سم^2»

١٠ أوجد قياس أكبر زاوية فى Δ س ص ع الذى فيه : س = ٢٤,٥ سم ، ص = ١٨ سم ، ع = ١٠ سم ثم أوجد محيط الدائرة المارة برؤوسه ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$) «١٩َ ١١٩° ، ٨٨ سم»

١١ ا ب حـ مثلث فيه : حا ا = $\frac{٢}{٥}$ ، ب = ٢,٥ سم ، حـ = ٢ سم

أثبت أن المثلث ا ب حـ متساوى الساقين.

١٢ Δ س ص ع النسبة بين أطوال أضلاعه س : ص : ع = ٤ : ٥ : ٦ بين أن قياس أصغر زواياه هو ٢٥َ ٤١° تقريبًا.

١٣ س ص ع مثلث فيه : حا س : حا ص : حا ع = ٧ : ٨ : ١٢

أوجد قياس أكبر زواياه. «٤َ ١٠٦°»

١٤ ا ب حـ مثلث فيه : أ = ٤ سم ، ب = ٥ سم ، حتا حـ = $\frac{-١}{٢}$

أوجد حـ ثم أوجد مساحة Δ ا ب حـ «٧,٨ سم ، ٥ $\sqrt{٣}$ سم^2»

15 أ ب حـ مثلث فيه : أ = ١٦ سم ، حـ = ١٨ سم ، طا ب = $\frac{٣}{٤}$
أوجد مساحة المثلث ثم احسب محيطه. «٨٦,٤ سم^{٢} ، ٤٥ سم»

16 أ ب حـ مثلث فيه : ٢ حا أ = ٣ حا ب = ٤ حا حـ أوجد قياس أصغر زواياه. «٢٣ ٢٦°»

17 أ ب حـ مثلث فيه : $\frac{١}{٣}$ حا أ = $\frac{١}{٤}$ حا ب = $\frac{١}{٥}$ حا حـ
أوجد : ق (∠ حـ) وإذا كان محيط المثلث = ٢٤ سم أوجد مساحته. «٩٠° ، ٢٤ سم^{٢}»

18 أ ب حـ مثلث فيه : ء منتصف ب حـ فإذا كان : ق (∠ ب) = ٧٥° ، ق (∠ أ) = ٦٠°
، أ = ٨ سم فأوجد طول كل من : أ حـ ، أ ء «٨,٩٢ سم ، ٦,٧ سم»

19 أ ب حـ مثلث فيه : أ = ٨ سم ، ب = ٧ سم ، حـ = ٩ سم ، فرضت نقطة
ء على ب حـ بحيث ب ء = ٤ سم احسب طول أ ء ثم أوجد طول نصف قطر الدائرة
الخارجة للمثلث أ ب حـ «٧ سم ، ٤,٧ سم»

20 أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ حـ = ١٦ سم ، ب ء = ٢٠ سم ، ق (∠ أ م ب) = ٥٠°
حيث م ملتقى القطرين أوجد : أ ب ، أ ء لأقرب سم «٨ سم ، ١٦ سم»

21 أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ ب = ٩ سم ، ب حـ = ١٣ سم ، أ حـ = ٢٠ سم
أوجد طول ب ء «١٠ سم»

22 أ ب حـ ء متوازى أضلاع محيطه ٢٠ سم فإذا كانت النسبة بين طولى ضلعين متجاورين
٢ : ٣ فإذا كان : ب ء = ٨ سم فأوجد طول أ حـ «٦,٣ سم»

23 أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : ق (∠ أ) = ٦٠° ، محيطه = ٤٤ سم ، طول القطر الأصغر
يساوى ١٤ سم ، أ ب < أ ء أوجد : ق (∠ أ ء ب) ثم احسب مساحة متوازى الأضلاع
أ ب حـ ء لأقرب سم^{٢} «٤٧ ٢١° ، ٨٣ سم^{٢}»

24 أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : أ ء // ب حـ ، أ ء = ٤٢ سم ، أ ب = ٣٠ سم
، ب حـ = ٤٨ سم ، ق (∠ أ) = ١٠٠°
أوجد طول كل من : ب ء ، حـ ء
«٥٥,٧ سم ، ٣٠ سم»

٢٥ ا ب حـ ء شكل رباعى فيه : ا ب = ا ء = ٩ سم ، ب حـ = ٥ سم ، حـ ء = ٨ سم ، ا حـ = ١١ سم أثبت أن : الشكل ا ب حـ ء رباعى دائرى.

٢٦ ا ب حـ ء شكل رباعى دائرى فيه :

ا ب = ا ء = ٩ سم ، ب حـ = ٥ سم ، حـ ء = ٨ سم أوجد : ا حـ «١١ سم»

٢٧ ا ب حـ ء شكل رباعى فيه : ا ب = ٦ سم ، ب حـ = ١٤ سم ، حـ ء = ١٠ سم ، ا حـ = ب ء = ١٦ سم أثبت أن : الشكل ا ب حـ ء رباعى دائرى.

٢٨ ا ب حـ ء شكل رباعى فيه : ا ب = ٢٧ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، حـ ء = ٨ سم ، ء ا = ١٢ سم ، ا حـ = ١٨ سم أثبت أن : $\overleftrightarrow{ا حـ}$ ينصف ∠ ب ا ء

ثم أوجد مساحة الشكل : ا ب حـ ء «١٢٤ سم^{٢}»

٢٩ ا ب حـ ء شكل رباعى فيه : ق (∠ ء ا ب) = ق (∠ ء ب حـ) = ٩٠° ، ب ء = ١٠ سم ، ا ء = ٨ سم ، ق (∠ ء حـ ب) = ٣٠° أوجد : ا حـ لأقرب سم. «٢٢ سم»

٣٠ ا ب حـ مثلث فيه : اَ = ٣ بَ ، ق (∠ حـ) = ٦٠°

أوجد : ق (∠ ب) ، ق (∠ ا) «٦ ١٩َ° ، ٥٤ ١٠٠َ°»

٣١ ا ب حـ مثلث فيه : اَ = ٥ سم ، ق (∠ ب) = ١٢٠° ، مساحته = $١٠\sqrt{٣}$ سم^{٢}

أوجد كلاً من : حـَ ، بَ وكذلك ق (∠ ا) «٨ سم ، ١١٫٣٦ سم ، ٢٥ ٢٢َ°»

٣٢ ا ب حـ مثلث مساحته ٦٤ سم^{٢} ، ق (∠ ا) = ٣٠° ، بَ : حـَ = ٣ : ٤

أوجد محيط Δ ا ب حـ «٤١٫٨ سم»

٣٣ ا ب حـ مثلث فيه : اَ = ٦ سم ، بَ = ١٠ سم ، مساحة المثلث تساوى ٢٠ سم^{٢}

فإذا كانت ∠ ا حـ ب منفرجة فأوجد كلاً من : ق (∠ حـ) ، طول $\overline{ا ب}$ «١١ ١٣٨َ° ، ١٥سم»

٣٤ إذا كان : حا ا = $\frac{٢}{٣}$ حا ب = $\frac{١}{٢}$ حا حـ ، حـَ - اَ = ٤ سم

أوجد كلًا من : بَ ، ق (∠ ا) «٦ سم ، ١٨ ٥٧َ ٢٨°»

٣٥ إذا كان جا أ : جا ب : جا جـ = ٣ : ٥ : ٧ أثبت أن : جتا أ : جتا ب : جتا جـ = ١٣ : ١١ : -٧

٣٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : أ ب جـ مثلث فيه : ٥ جا أ جا ب = ٦ جا ب جا جـ = ٩ جا جـ جا أ

فإن : ق (∠ جـ) ≈ .... (لأقرب درجة)

(أ) ٢٨° (ب) ٣٢° (جـ) ٣٦° (د) ٤٢°

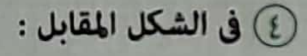
② إذا كان : أ ب جـ مثلث فيه : ٦ أَ = ٤ بَ = ٣ جـَ

فإن قياس أصغر زوايا المثلث ≈ .... (لأقرب دقيقة)

(أ) ٢٨َ ٥٧° (ب) ١٢َ ٤١° (جـ) ٥٧َ ٢٨° (د) ٥٢َ ٣٦°

③ أ ب جـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٦٠° ، بَ : جـَ = ٥ : ٨ وكانت مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث تساوى ١٤٧ π سم٢ فإن : محيط Δ أ ب جـ = ... سم

(أ) ٢١ (ب) ٣٤ (جـ) ٥٤ (د) ٦٠



④ في الشكل المقابل :

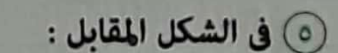
أ ب جـ ء شكل رباعي فيه :

أ ب = ٨ سم ، ب جـ = ٦ سم ، ق (∠ ب) = ٩٠°

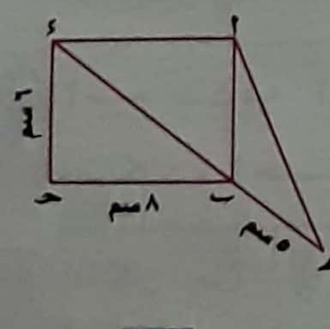
، ء جـ = ٥ سم ، ق (∠ أ جـ ء) = ٦٠°

فإن مساحة الدائرة المارة برؤوس Δ أ ء جـ = ... سم٢

(أ) ٩ π (ب) ١٦ π (جـ) ٢٥ π (د) ٤٩ π



⑤ في الشكل المقابل :



أ ب جـ ء مستطيل فيه : ء جـ = ٦ سم

، ب جـ = ٨ سم ، هـ ∈ ء ب⃖ حيث : ب هـ = ٥ سم

فإن : أ هـ = ... سم

(أ) $\sqrt{٩٣}$ (ب) $\sqrt{٩٧}$ (جـ) ١٠ (د) $\sqrt{١٠٣}$

⑥ فى الشكل المقابل :

قيمة س = ... سم

(أ) ٧ (ب) ٨

(جـ) ٩ (د) ١٠

(النقطة أ والزاوية ١٢٠°، الأضلاع: س سم ، (س+١)سم ، (س+٦)سم)

٣٧ أ ب حـ مثلث محيطه ٧٠ سم ، أ = ٢٦ سم ، ق(∠أ) = ٦٠°

أوجد : مساحة سطحه. «١٠٥ $\sqrt{3}$ سم^2»

٣٨ أ ب حـ مثلث محيطه ٣٤ سم ، أ = ١٢ سم ، ب - حـ = ٦ سم

أوجد قياس أصغر زواياه ثم احسب مساحته. «١٩° ٤٦َ ٣٤ً ، ٤٧,٩ سم^2»

٣٩ مثلث أطوال أضلاعه هى ١٤ ، ١٠ ، س من السنتيمترات فإذا كان قياس أكبر زواياه هو ١٢٠° أوجد س علمًا بأن (س < ١٠) «٦ سم»

٤٠ Δ أ ب حـ فيه : ق(∠حـ) = ١٢٠° ، أ = ب - ٢ ، حـ = ب + ٢

أوجد كلًا من : أ ، ب ، حـ «٣ ، ٥ ، ٧»

٤١ فى المثلث أ ب حـ إذا كان (أ + ب + حـ) (أ + ب - حـ) = ٣ أ ب

أثبت أن : ق(∠حـ) = ٦٠°

٤٢ فى المثلث أ ب حـ إذا كان : (أ + ب + حـ) (أ + ب - حـ) = ك أ ب

فأثبت أن : ك ∈]٠ ، ٤[ثم أوجد : ق(∠حـ) عندما ك = ١ «١٢٠°»

٤٣ أ ب حـ ء متوازى أضلاع أثبت أن : (أ حـ)^2 + (ب ء)^2 = ٢ (أ ب)^2 + ٢ (ب حـ)^2

٤٤ أ ب حـ مثلث فيه : ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ أثبت أن : (أ ب)^2 + (أ حـ)^2 = ٢ (أ ء)^2 + ٢ (ب ء)^2

وإذا كان : أ ب = ٥ سم ، أ حـ = ٨ سم ، ب حـ = ١٢ سم أوجد : أ ء «$\frac{\sqrt{34}}{2}$ سم»

٤٥ أثبت أن : ظتا ب + ظتا حـ = $\frac{\text{أ}^2}{2\,\Delta}$ حيث Δ يعبر عن مساحة Δ أ ب حـ

٤٦ $\triangle$ أ ب حـ مثلث فيه : $ب^٢ = (حـ - أ)^٢ + حـ أ$ أوجد : ق (∠ ب) «٦٠°»

٤٧ س ص ع مثلث فيه : $س^٢ = ص^٢ + ع^٢ - ص ع$ ظا س

أوجد : ق (∠ س) «٩٠° أ ٣٠° أ ١٥٠°»

٤٨ Δ أ ب حـ فيه : حا ب = $\frac{حـ}{٢ أ}$ أثبت أن : Δ أ ب حـ متساوى الساقين.

٤٩ أ ب حـ ء هـ خماسى منتظم طول ضلعه ١٨,٢٦ سم ، أوجد طول قطره $\overline{أ حـ}$ «٢٩,٥ سم»

٥٠ اكتشف الخطأ : أ ب حـ مثلث فيه :

أ = ٧ سم ، ب = ١٠ سم ، حـ = ٥ سم ، ق (∠ أ) = ٤٠,٥٤°

أوجد : ق (∠ ب)

حل زياد

$\because \frac{ب}{حا ب} = \frac{أ}{حا أ}$

$\therefore \frac{١٠}{حا ب} = \frac{٧}{حا ٤٠,٥٤°}$

$\therefore$ حا ب $= \frac{١٠ \text{ حا } ٤٠,٥٤°}{٧} \simeq ٠,٩٢٨٥$

$\therefore$ ق (∠ ب) = ٦٨,٢°

حل كريم

$\because$ حتا ب $= \frac{أ^٢ + حـ^٢ - ب^٢}{٢ أ حـ}$

$\therefore$ حتا ب $= \frac{(٧)^٢ + (٥)^٢ - (١٠)^٢}{٢ \times ٧ \times ٥}$

$\simeq -٠,٣٧١٤$

$\therefore$ ق (∠ ب) $\simeq$ ١١١,٨°

أى من الحلين هو الصحيح ؟ ولماذا ؟

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٥١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : أ (٠ ، ١) ، ب (٣ ، ٤) ، حـ (١ ، ٣) هى رؤوس مثلث

فإن : حتا (∠ أ حـ ب) = ...

(أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $\frac{-٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{-٣}{٥}$

② في الشكل المقابل :

لإيجاد طول $\overline{ءهـ}$ يلزم معرفة ....

(أ) طول $\overline{أب}$

(ب) مساحة Δ أ ب حـ

(جـ) محيط Δ أ ب حـ

(د) أي مما سبق.

③ في الشكل المقابل :

أ ب = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٧

(جـ) ٨ (د) ٩

④ في الشكل المقابل :

حتا أ = ...

(أ) $-\frac{١}{٦}$ (ب) $-\frac{١}{٣}$

(جـ) $\frac{١}{\sqrt{٢}٢}$ (د) $\frac{١}{٢}$

⑤ في الشكل المقابل :

ق (∠ ب أ هـ) = ...

(أ) °٣٤ ٣٩ (ب) °٣٩ ٣٤

(جـ) °١٨ ٣٤ (د) °٣٤ ١٨

⑥ في الشكل المقابل :

إذا كان : ق (∠ حـ) = ٤٠,٤°

فإن محيط الجزء المظلل ≃ .... سم

(أ) ١٥,٣ (ب) ١٣,٤ (جـ) ٦,٩ (د) ٢١,٣

⑦ إذا كانت مساحة المثلث أ ب حـ = ١٢ سم٢

فإن : (ب٢ + حـ٢ − أ٢) ظا أ = ...

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ٤٨ (د) ٩٦

⑧ فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق(∠ أ) = ٦٠°

فإن : (١ + أ/حـ + ب/حـ) (١ + حـ/ب − أ/ب) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

⑨ فى أى مثلث أ ب حـ إذا كان : أ٢ = (أ٣ + ب٣ + حـ٣)/(أ + ب + حـ) فإن : ق(∠ أ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ١٥٠°

⑩ فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء ، س حـ هـ و مربعان

إذا كان : ب حـ = ٢ حـ هـ

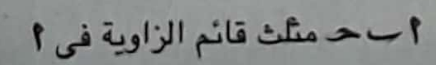
فإن : جا (∠ ب س هـ) = ...



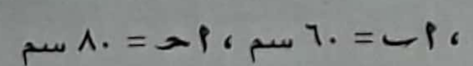
(أ) ١/√٥ (ب) ٢/√٥ (جـ) −١/√٥ (د) −٢/√٥



⑪ فى الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى أ



، أ ب = ٦٠ سم ، أ حـ = ٨٠ سم

ورسم أء يقسم Δ أ ب حـ إلى مثلثين لهما نفس المحيط

فإن : أء = ... سم

(أ) ٢٤ √٥ (ب) ٥ √٢٤ (جـ) ٣٥ ٢/٣ (د) ٤٥ ١/٣

٥٢ في Δ أ ب جـ إذا كان : $\frac{\text{جتا ب}}{\text{أ}} = \frac{\text{جتا أ}}{\text{ب}}$

فأثبت أن : Δ أ ب جـ إما قائم الزاوية أو متساوي الساقين.

---

٥٣ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب فإذا كان هـ نقطة داخل المثلث بحيث أن

هـ أ = ١٠ سم ، هـ ب = ٦ سم ، ق(∠أ هـ ب) = ق(∠ب هـ جـ) = ق(∠جـ هـ أ)

أوجد : طول $\overline{\text{هـ جـ}}$ «٣٣ سم»

---

٥٤ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب ، م ، ن تنتميان إلى $\overline{\text{أ جـ}}$ بحيث أ م = م ن = ن جـ

فإذا كان ب م = ٣ سم ، ب ن = ٤ سم أوجد : محيط Δ أ ب جـ لأقرب سنتيمتر.

---

٥٥ في أي مثلث أ ب جـ أثبت أن :

(١) $\frac{\text{جتا أ}}{\text{أ}} + \frac{\text{جتا ب}}{\text{ب}} + \frac{\text{جتا جـ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{جـ}^2}{\text{٢ أ ب جـ}}$

(٢) $\text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{جـ}^2 = ٢\,(\text{ب جـ جتا أ} + \text{أ جـ جتا ب} + \text{أ ب جتا جـ})$

(٣) $\frac{\text{ظا أ}}{\text{ظا جـ}} = \frac{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 - \text{جـ}^2}{\text{ب}^2 + \text{جـ}^2 - \text{أ}^2}$



الدرس 3 حـــل المثـلــث

حل المثلث يعنى إيجاد أطوال أضلاعه وقياسات زواياه المجهولة إذا علم ثلاثة من هذه العناصر الستة (أحدها على الأقل طول ضلع). **وهناك أربعة حالات لحل المثلث نعرض لها فيما يلى :**

الحالة الأولى | **حل المثلث إذا علم فيه قياسا زاويتين وطول ضلع**

فى Δ أ ب حـ إذا علم ق(∠ أ) ، ق(∠ ب) ، أ :

١ نستخدم العلاقة : ق(∠ حـ) = ١٨٠° − [ق(∠ أ) + ق(∠ ب)] لإيجاد : ق(∠ حـ)

٢ نستخدم القانون : $\frac{أ}{جا\, أ} = \frac{ب}{جا\, ب} = \frac{حـ}{جا\, حـ}$ لإيجاد : ب ، حـ

مثال ١

حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : ق(∠ أ) = ٣٨° ٥٢َ ، ق(∠ ب) = ٩٦° ٥١َ ، أ = ٢٢,٣ سم

الحـــل

ق(∠ حـ) = ١٨٠° − (٣٨° ٥٢َ + ٩٦° ٥١َ) = **٤٤° ١٧َ**

، ∵ $\frac{أ}{جا\, أ} = \frac{ب}{جا\, ب} = \frac{حـ}{جا\, حـ}$ ∴ $\frac{٢٢,٣}{جا\, ٣٨° ٥٢َ} = \frac{ب}{جا\, ٩٦° ٥١َ} = \frac{حـ}{جا\, ٤٤° ١٧َ}$

∴ ب = $\frac{٢٢,٣\ جا\, ٩٦° ٥١َ}{جا\, ٣٨° ٥٢َ}$ ≈ **٣٥,٣ سم** ، حـ = $\frac{٢٢,٣\ جا\, ٤٤° ١٧َ}{جا\, ٣٨° ٥٢َ}$ ≈ **٢٤,٨ سم**

الحالة الثانية حل المثلث إذا علم فيه طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما

فى Δ ا ب حـ إذا علم أ ، ب ، ق(∠حـ) :

1. نستخدم القانون : $حـ^2 = أ^2 + ب^2 - 2 أ ب جتا حـ$ لإيجاد : حـ
2. يفضل استخدام القانون : $جتا ا = \frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{2 ب حـ}$ لإيجاد : ق(∠ا)

وذلك لأن قانون جيب التمام يفرق بين الزاوية الحادة والزاوية المنفرجة (أو يستخدم قانون الجيب لإيجاد قياس الزاوية المقابلة لأصغر الضلعين المعلومين)

3. نستخدم العلاقة : ق(∠ب) = ١٨٠° − [ق(∠ا) + ق(∠حـ)] لإيجاد : ق(∠ب)

مثال ٢

حل المثلث ا ب حـ الذى فيه : أ = ٨ سم ، ب = ٥ سم ، ق(∠حـ) = ٢ً ٦٠°

الحل

∵ $حـ^2 = أ^2 + ب^2 - 2 أ ب جتا حـ = ٦٤ + ٢٥ - ٢ × ٨ × ٥ جتا ٢ً ٦٠° ≈ ٤٩,٠٤$

∴ حـ ≈ **٧ سم** ∴ $جتا ا = \frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{2 ب حـ} = \frac{٢٥ + ٤٩ - ٦٤}{٢ × ٥ × ٧} = \frac{١}{٧}$

∴ ق(∠ا) ≈ **٤٧ً ٨١°** ∴ ق(∠ب) = ١٨٠° − (٢ً ٦٠° + ٤٧ً ٨١°) = **١١ً ٣٨°**

حل آخر

بعد إيجاد حـ يمكن إيجاد ق(∠ب) باستخدام قانون الجيب لأن ∠ب تقابل أصغر الضلعين المعلومين بالمعطيات ، ثم نوجد ق(∠ا)

∵ $\frac{حـ}{جا حـ} = \frac{ب}{جا ب}$ ∴ $\frac{٧}{جا ٢ً ٦٠°} = \frac{٥}{جا ب}$ ∴ $جا ب = \frac{٥ جا ٢ً ٦٠°}{٧} ≈ ٠,٦١٨٨$

∴ ق(∠ب) ≈ ١٤ً ٣٨° أ، ٤٦ً ١٤١° ، ∵ ب ليس طول أكبر أضلاع المثلث

∴ ∠ب لا يمكن أن تكون منفرجة ∴ ق(∠ب) = ١٤ً ٣٨°

∴ ق(∠ا) = ١٨٠° − (٢ً ٦٠° + ١٤ً ٣٨°) = ٤٤ً ٨١°

لاحظ أن : الاختلافات البسيطة فى قياسات الزوايا بين الحلين يرجع إلى استخدام قيم تقريبية بحاسبة الجيب.

الحالة الثالثة حل المثلث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة

فى Δ أ ب حـ إذا علم أَ ، بَ ، حـَ :

١ نستخدم القانون : جتا أ = $\frac{بَ^2 + حـَ^2 - أَ^2}{٢ بَ حـَ}$ لإيجاد : ق (∠ أ)

٢ نستخدم القانون : جتا ب = $\frac{حـَ^2 + أَ^2 - بَ^2}{٢ حـَ أَ}$ لإيجاد : ق (∠ ب)

٣ نستخدم العلاقة : ق (∠ حـ) = ١٨٠° − [ق (∠ أ) + ق (∠ ب)] لإيجاد : ق (∠ حـ)

مثال ٣

حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أَ = ٥ سم ، بَ = ٧ سم ، حـَ = ١١ سم

الحل

∵ جتا أ = $\frac{بَ^2 + حـَ^2 - أَ^2}{٢ بَ حـَ}$ = $\frac{٤٩ + ١٢١ - ٢٥}{٢ \times ٧ \times ١١}$ = $\frac{١٤٥}{١٥٤}$ ∴ ق (∠ أ) ≈ ١٩° ٤١َ

، ∵ جتا ب = $\frac{حـَ^2 + أَ^2 - بَ^2}{٢ حـَ أَ}$ = $\frac{١٢١ + ٢٥ - ٤٩}{٢ \times ١١ \times ٥}$ = $\frac{٩٧}{١١٠}$ ∴ ق (∠ ب) ≈ ٢٨° ٨َ

∴ ق (∠ حـ) = ١٨٠° − (١٩° ٤١َ + ٢٨° ٨َ) = ١٣٢° ١١َ

تذكر أن

مجموع طولى أى ضلعين فى مثلث أكبر من طول الضلع الثالث فمثلًا إذا كان : أَ = ٢ سم ، بَ = ٥ سم ، حـَ = ٨ سم فإن هذه الأطوال لا تصلح أن تكون أطوالًا لأضلاع مثلث.

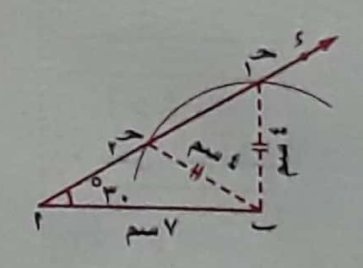
الحالة الرابعة حل المثلث إذا علم فيه طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما [الحالة المبهمة]

مثال توضيحي

باستخدام الأدوات الهندسية ارسم Δ أ ب حـ الذى فيه : أ ب = ٧ سم ، ق (∠ أ) = ٣٠°

، ب حـ = ٤ سم ثم تحقق من إجابتك باستخدام قانون الجيب.

الحل



* نرسم قطعة مستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ طولها = ٧ سم
* نرسم ∠ أ قياسها ٣٠° مع $\overline{\text{أ ب}}$ ولتكن ب أ ء
* نركز بسن الفرجار فى النقطة ب وبفتحة طولها ب حـ = ٤ سم

  ونرسم قوس يقطع المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ فى حـ
* نلاحظ أن النقطة حـ لها موضعين أى أننا يمكننا رسم مثلثين لهم نفس الشروط السابقة

  هما أ ب حـ١ ، أ ب حـ٢ وبالقياس نجد أن :

  ق (∠ حـ) ≈ ٦١° فى Δ أ ب حـ١ أ، ق (∠ حـ) ≈ ١١٩° فى Δ أ ب حـ٢

التحقق من الإجابة باستخدام قانون الجيب

∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ ∴ $\frac{٤}{\text{جا ٣٠°}} = \frac{٧}{\text{جا حـ}}$

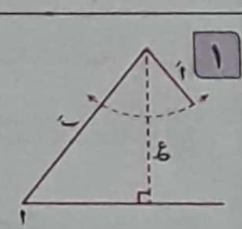
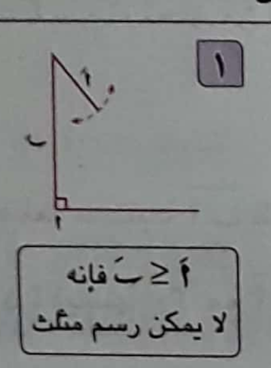
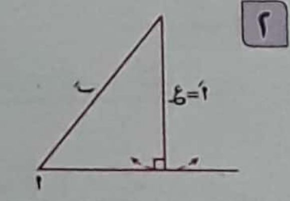
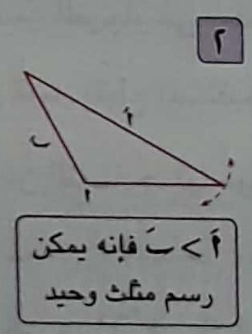
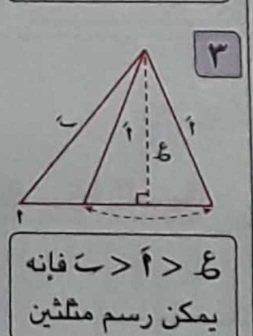
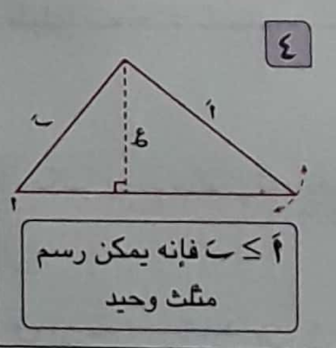
∴ جا حـ = $\frac{\text{٧ جا ٣٠°}}{٤} = \frac{٧}{٨}$ (موجبة) ∴ حـ تقع فى الربع الأول (حادة) أ، الثانى (منفرجة)

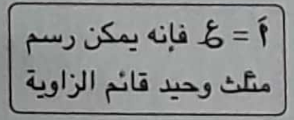
∴ ق (∠ حـ) ≈ ٦١° أ، ق (∠ حـ) ≈ ١١٩°

وعمومًا باستخدام الحل الهندسى يمكن التوصل إلى ما يلى :

* في Δ أ ب حـ إذا علم أ ، ب ، ق (∠ أ) نوجد ع = ب حا أ

ولإيجاد عدد الحلول الممكنة للمثلث نقارن بين قيم أ ، ب ، ع كما يلي :

أولًا : إذا كانت ∠ أ حادة وكان :	ثانيًا : إذا كانت ∠ أ قائمة أو منفرجة وكان :
١  أ < ع فإنه لا يمكن رسم مثلث	١  أ ≥ ب فإنه لا يمكن رسم مثلث
٢  أ = ع فإنه يمكن رسم مثلث وحيد قائم الزاوية	٢  أ > ب فإنه يمكن رسم مثلث وحيد
٣  ع < أ < ب فإنه يمكن رسم مثلثين	
٤  أ ≤ ب فإنه يمكن رسم مثلث وحيد	



* يمكن حل المثلث في هذه الحالة باستخدام قانون الجيب مباشرة دون تحديد عدد المثلثات الممكنة مع الأخذ في الاعتبار ما يلي :

١ ∠ أ تقع في الربع الأول (إذا كانت حادة)، تقع في الربع الثاني (إذا كانت منفرجة).

٢ دالة الجيب مداها [-١ ، ١]

٣ إذا كان في المثلث زاوية منفرجة فإن الزاويتين الأخريين لابد وأن تكونا حادتين.

مثال ٤

بين ما إذا كانت الشروط الآتية تحقق وجود مثلث وحيد أو أكثر من مثلث أو لا تحقق وجود أى مثلث على الإطلاق ثم أوجد الحلول الممكنة :

١ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ١١٢° ، أ = ٧ سم ، ب = ٤ سم

٢ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ١١٢° ، أ = ٤ سم ، ب = ٧ سم

٣ ل م ن مثلث فيه : ق (∠ ل) = ٥٠° ، لَ = ٤ سم ، مَ = ٧ سم

٤ ء هـ و مثلث فيه : ق (∠ ء) = ٦٠° ، ءَ = ٧,٥ سم ، هـَ = ٥ $\sqrt{3}$ سم

٥ ل م ن مثلث فيه : ق (∠ ل) = ٣٠° ، لَ = ٦ سم ، مَ = ٩ سم

٦ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٤٠° ، أَ = ٨,٥ سم ، بَ = ٧ سم

الحل

١ ∵ ∠ أ منفرجة ، أَ > بَ

∴ يوجد للمثلث حل وحيد

، ∵ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}}$

∴ $\frac{٧}{\text{جا } ١١٢°} = \frac{٤}{\text{جا ب}}$ ∴ جا ب = $\frac{٤ \text{ جا } ١١٢°}{٧}$ ≈ ٠,٥٢٩٨

∴ ق (∠ ب) ≈ ٣٢°

ومنها ق (∠ حـ) = ١٨٠° − (١١٢° + ٣٢°) = ٣٦°

، ∵ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{حـَ}}{\text{جا حـ}}$ ∴ $\frac{٧}{\text{جا } ١١٢°} = \frac{\text{حـَ}}{\text{جا } ٣٦°}$

∴ حـَ ≈ ٤,٤ سم

> **لاحظ أن**
>
> المثلث به زاوية واحدة على الأكثر منفرجة.
>
> ، ∵ ∠ أ منفرجة ∴ ∠ ب لابد وأن تكون حادة
>
> ∴ ب تقع فى الربع الأول فقط

٢ ∵ ∠ أ منفرجة ، أَ < بَ

∴ الشروط لا تحقق وجود أى مثلث على الإطلاق

> **لاحظ أن**
>
> ∵ $\frac{٤}{\text{جا } ١١٢°} = \frac{٧}{\text{جا ب}}$ ∴ جا ب = $\frac{٧ \text{ جا } ١١٢°}{٤}$ ≈ ١,٦
>
> وهذا مستحيل لأن جا ب ∉ [−١ ، ١]

٣ ∵ ∠ ل حادة ، ع = مَ جا ل = ٧ جا ٥٠° ≈ ٥,٤ سم

، ∵ لَ < ع ∴ الشروط لا تحقق وجود أى مثلث على الإطلاق

٤ ∵ ∠و حادة ، ع = هـَ حا و = ٥ √٣ حا ٦٠° = ٧,٥ سم

، ∵ وَ = ع ∴ يوجد للمثلث حل وحيد وهو مثلث قائم الزاوية فى هـ

∴ ق (∠د) = ١٨٠° − (٦٠° + ٩٠°) = **٣٠°**

، دَ = √((٥ √٣)² − (٧,٥)²) = **(٥ √٣) / ٢ سم**

٥ ∵ ∠ل حادة ، ع = مَ حا ل = ٩ حا ٣٠° = ٤,٥ سم ، ∵ ٤,٥ < ٦ < ٩

أى أن ع < لَ < مَ ∴ يوجد للمثلث حلان

∵ لَ / حا ل = مَ / حا م ∴ ٦ / حا ٣٠° = ٩ / حا م ∴ حا م = ٣ / ٤

∴ م تقع فى الربع الأول أو الثانى

∴ ق (∠م) ≈ **٤٨° ٣٥َ ٢٥ً**

ومنها ق (∠ن)

= ١٨٠° − (٣٠° + ٤٨° ٣٥َ ٢٥ً)

= **١٠١° ٢٤َ ٣٥ً**

، ∵ لَ / حا ل = نَ / حا ن

∴ ٦ / حا ٣٠° = نَ / حا ١٠١° ٢٤َ ٣٥ً

∴ نَ ≈ **١١,٧٦ سم**

أو ،

ق (∠م) = ١٨٠° − ٤٨° ٣٥َ ٢٥ً

= **١٣١° ٢٤َ ٣٥ً**

ومنها ق (∠ن)

= ١٨٠° − (٣٠° + ١٣١° ٢٤َ ٣٥ً)

= **١٨° ٣٥َ ٢٥ً**

، ∵ ٦ / حا ٣٠° = نَ / حا ١٨° ٣٥َ ٢٥ً

∴ نَ ≈ **٣,٨٣ سم**

٦ ∵ ∠أ حادة ، أ > ب

∴ يوجد للمثلث حل وحيد

، ∵ أ / حا أ = ب / حا ب

∴ ٨,٥ / حا ٤٠° = ٧ / حا ب

لاحظ أن

إذا أخذنا هنا ق (∠ب) بحيث تقع فى الربع الثانى

∴ ق (∠ب) = ١٨٠° − ٣٢° = ١٤٨°

وهذا مستحيل لأنه ليس من المعقول أن يكون مجموع زاويتين فى مثلث = ٤٠° + ١٤٨° = ١٨٨° أكبر من ١٨٠°

∴ جا ب = $\frac{٧ \text{ جا } ٤٠^\circ}{٨,٥}$ ≈ ٠,٥٣ ∴ ق(∠ ب) ≈ ٣٢°

ومنها ق(∠ حـ) = ١٨٠° − (٤٠° + ٣٢°) = ١٠٨°

، ∵ $\frac{أ}{\text{جا } أ} = \frac{حـ}{\text{جا } حـ}$ ∴ $\frac{٨,٥}{\text{جا } ٤٠^\circ} = \frac{حـ}{\text{جا } ١٠٨^\circ}$

∴ حـ = $\frac{٨,٥ \text{ جا } ١٠٨^\circ}{\text{جا } ٤٠^\circ}$ ≈ ١٢,٥٨ سم

ملاحظات

يمكن حل المثلث فى الحالة المبهمة باستخدام قانون جيب التمام لإيجاد طول الضلع الثالث فنحصل على معادلة تربيعية وبحلها يكون عدد المثلثات هو عدد الحلول الموجبة الناتجة من هذه المعادلة.

مثال ٥

باستخدام الملاحظة السابقة حل المثلث أ ب حـ الذى فيه :

أ = ٦ سم ، ب = ٨ سم ، ق(∠ أ) = ٣٠°

الحل

∵ $أ^٢ = ب^٢ + حـ^٢ - ٢ \text{ ب حـ جتا أ}$

∴ $(٦)^٢ = (٨)^٢ + حـ^٢ - ٢ \times ٨ \times حـ \text{ جتا } ٣٠$

∴ $حـ^٢ - ٨\sqrt{٣} \text{ حـ} + ٢٨ = ٠$

∴ حـ = $\frac{٨\sqrt{٣} \pm \sqrt{(-٨\sqrt{٣})^٢ - ٤(١)(٢٨)}}{٢(١)}$

∴ حـ ≈ ١١,٤ سم أ، حـ ≈ ٢,٤٥٦ سم

، ∵ كل قيمة موجبة لـ حـ تقابل مثلثًا واحدًا

تذكر أنه

القانون العام لحل معادلة تربيعية على الصورة أ $س^٢$ + ب س + حـ = ٠

هو س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ \text{ أ حـ}}}{٢ \text{ أ}}$



∴ يوجد لدينا مثلثان ثم نوجد جتا ب من العلاقة : $جتا ب = \frac{حـَ^٢ + أ^٢ - بَ^٢}{٢ حـَ أ}$

عندما حـَ ≈ ١١,٤ سم

∴ $جتا ب_١ = \frac{(١١,٤)^٢ + (٦)^٢ - (٨)^٢}{٢ (١١,٤) (٦)}$

∴ ق (∠ب$_١$) ≈ ٤٩َ ٤١°

ومنها ق (∠حـ$_١$) = ١٨٠° − (٣٠° + ٤٩َ ٤١°)

= ١١َ ١٠٨°

عندما حـَ = ٢,٤٥٦ سم

∴ $جتا ب_٢ = \frac{(٢,٤٥٦)^٢ + (٦)^٢ - (٨)^٢}{٢ (٢,٤٥٦) (٦)}$

∴ ق (∠ب$_٢$) ≈ ١٢َ ١٣٨°

ومنها ق (∠حـ$_٢$) = ١٨٠° − (٣٠° + ١٢َ ١٣٨°)

= ٤٨َ ١١°

∴ الحل الأول هو حـَ = ١١,٤ سم ، ق (∠ب) = ٤٩َ ٤١° ، ق (∠حـ) = ١١َ ١٠٨°

، الحل الثانى هو حـَ = ٢,٤٥٦ سم ، ق (∠ب) = ١٢َ ١٣٨° ، ق (∠حـ) = ٤٨َ ١١°

* حاول حل هذا المثال باستخدام قاعدة الجيب

مثال ٦

حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : ق (∠أ) = ٤٠° ، ق (∠حـ) = ٣٥°

، طول نصف قطر الدائرة المارة برءوسه ٦ سم

الحل

ق (∠ب) = ١٨٠° − (٤٠° + ٣٥°) = ١٠٥°

∴ $\frac{أ}{جا ٤٠°} = \frac{بَ}{جا ١٠٥°} = \frac{حـَ}{جا ٣٥°} = ١٢$

∴ أ ≈ **٧,٧ سم** ، بَ ≈ **١١,٦ سم** ، حـَ ≈ **٦,٩ سم**

تمارين 21

على حل المثلث

📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

أولًا مسائل على الحالة الأولى لحل المثلث (طول ضلع وقياسا زاويتين)

١ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : بَ = ١١ سم ، ق (∠ أ) = ٦٧° ، ق (∠ حـ) = ٤٦°

«١١ سم ، ٨,٦ سم ، ٦٧°»

---

٢ 📖 حل المثلث ل م ن الذى فيه : مَ = ١٧ سم ، ق (∠ ل) = ١٦ ٣٣° ، ق (∠ ن) = ١٩ ٤٤°

«٩,٥ سم ، ١٢,٢ سم ، ٢٥ ١٠٢°»

---

٣ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ ب = ٩ سم ، ق (∠ أ) = ٢ ق (∠ ب) = ٨٠°

ثم احسب مساحته لأقرب سم٢

«١٠,٢ سم ، ٦,٧ سم ، ٦٠° ، المساحة ≈ ٣٠ سم٢»

---

٤ حل المثلث س ص ع الذى فيه : س ص = ٤٠ سم ، ق (∠ س) = ١٢ ٧٥° ، ق (∠ ص) = ١٥ ٤٨° ثم أوجد ارتفاع المثلث المرسوم من ع على س ص

«٤٦,٤ سم ، ٣٥,٨ سم ، ٣٣ ٥٦° ، الارتفاع ≈ ٣٤,٦ سم»

ثانيًا مسائل على الحالة الثانية لحل المثلث (طولا ضلعين وقياس زاوية محصورة)

٥ 📖 حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أَ = ٥ سم ، بَ = ٧ سم ، ق (∠ حـ) = ٦٥°

«٦,٧ سم ، ٥٠ ٧١° ، ١٠ ٤٣°»

---

٦ 📖 حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : ق (∠ أ) = ١٢ ١٥٣° ، بَ = حـَ = ٦ سم

«١١,٦٧ سم ، ٢٤ ١٣° ، ٢٤ ١٣°»

---

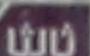
٧ حل المثلث ل م ن الذى فيه : لَ = ١٢,٥ سم ، نَ = ٧,٢٥ سم ، ق (∠ م) = ٩١,٢°

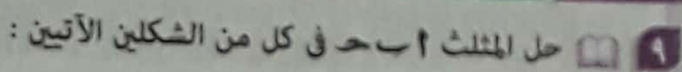
«١١,٩٦ سم ، ٥٣ ٧٦° ، ٢٢ ٣٤°»

---

٨ حل المثلث ل م ن الذى فيه : ل م = ٤٨,٥ سم ، م ن = ٤٦ سم ، جتا م = -٦,٠

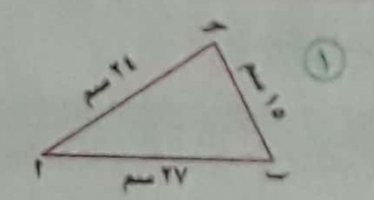
«٨٤,٥٣ سم ، ٤٨ ٢٥° ، ٥٢ ١٢٦° ، ٢٠ ٢٧°»

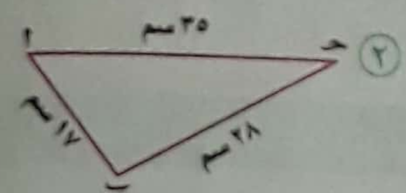




ثالثًا مسائل على الحالة الثالثة لحل المثلث (أطوال ثلاثة أضلاع)

٩ حل المثلث أ ب حـ في كل من الشكلين الآتيين :





١٠ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ١٣ سم ، ب = ١٤ سم ، حـ = ١٥ سم

٨٠ َ ٥٣ °، ٣٩ َ ٥٩ °، ٣٣ َ ٦٧ °.

١١ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٥ سم ، ب = ٢ حـ = ٨ سم

٥٠ َ ٤٠ َ ٣٠ °، ٦ َ ١٢٥ °، ٩ َ ٢٤ °.

١٢ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٢ سم ، ب = ٤ √٢ سم ، حـ = ٢ √٥ سم

٦٠ َ ٢٦ َ ١٨ °، ٣٤ َ ١١٦ °، ٤٥ °.

رابعًا مسائل على الحالة الرابعة لحل المثلث (طولا ضلعين وقياس زاوية مقابلة لأحدهما)

١٣ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ١٠ سم ، ب = ٩ سم ، ق (∠ب) = ٥٧°

١٤ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : ق (∠أ) = ٥٠° ، أ = ٤ سم ، ب = ٣ سم

١٥ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : ق (∠حـ) = ١١٦° ، حـ = ١٢ سم ، أ = ١٠ سم

١٦ بيِّن ما إذا كانت الشروط الآتية تحقق وجود مثلث وحيد أو أكثر من مثلث أو لا تحقق وجود أى مثلث على الإطلاق ثم أوجد الحلول الممكنة مقربًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة :

(١) أ = ١٥ سم ، ب = ١٠ سم ، ق (∠أ) = ١٢٠°

(٢) أ = ٤ سم ، حـ = ١٦ سم ، ق (∠حـ) = ١١٥°

(٣) أ = ١٢ سم ، ب = ١٥ سم ، ق (∠أ) = ١٠٠°

(٤) أ = ٢٠ سم ، ب = ٢٨ سم ، ق (∠أ) = ٤٢°

⑤ أ = ٥ سم ، ب = ٧ سم ، ق (∠ أ) = ٦٠°

⑥ أ = ١٢ سم ، حـ = ٧ سم ، ق (∠ أ) = ٢٧°

⑦ أ = ٤ $\sqrt{3}$ سم ، ب = ٦ سم ، ق (∠ ب) = ٦٠°

⑧ أ = ٦ سم ، ب = ٨ سم ، ق (∠ أ) = ٤٧°

١٧ مسألة مفتوحة : أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ ب) = ٥٨° ، أ = ٤٢ سم.
أوجد : ب التى لا يوجد حل للمثلث أ ب حـ عندها . فسر إجابتك.

خامسًا مسائل متنوعة

١٨ حل المثلث أ ب حـ المتساوى الساقين الذى فيه : ق (∠ أ) = ١١٠° ، أ = ٨ سم

«٤,٩ سم ، ٤,٩ سم ، ٣٥° ، ٣٥°»

١٩ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٢١ سم ، جتا ب = $\frac{3}{5}$ ، ظا حـ = $\frac{5}{12}$

«١٧,٣ سم ، ٨,٣ سم ، ١٥َ ١٠٤° ، ٨َ ٥٣° ، ٣٧َ ٢٢°»

٢٠ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٥ سم ، ق (∠ ب) = ١٢٠°
، ومساحته تساوى ١٠ $\sqrt{3}$ سم٢ «١١,٣٦ سم ، ٨ سم ، ٢٤َ ٢٢° ، ٣٦َ ٣٧°»

٢١ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه ق (∠ أ) : ق (∠ ب) : ق (∠ حـ) = ٤ : ٥ : ٦
ومحيطه يساوى ٥٠ سم «١٤,٥ سم ، ١٦,٩ سم ، ١٨,٦ سم ، ٤٨° ، ٦٠° ، ٧٢°»

٢٢ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه حا أ : حا ب : حا حـ = ٣ : ٤ : ٦ ومحيطه يساوى ٥٢ سم

«١٢ سم ، ١٦ سم ، ٢٤ سم ، ٢٣َ ٢٦° ، ٢٠َ ٣٦° ، ١٧َ ١١٧°»

٢٣ حل المثلث أ ب حـ الحاد الزوايا الذى فيه : أ = ٢١ سم ، ب = ٢٥ سم ، وطول
قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوى ٢٨ سم «٢٦ سم ، ٣٥َ ٤٨° ، ١٤َ ٦٣° ، ١١َ ٦٨°»

٢٤ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : حـ = ٥ سم ، ق (∠ أ) = ٨٢° ، وطول نصف قطر الدائرة
المارة برؤوسه = ٨ سم «١٥,٨ سم ، ١٥,٧ سم ، ٤٧َ ٧٩° ، ١٣َ ١٨°»

٢٥ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٧ سم ، ق (∠ ب) = ٤٠° ، ومحيط الدائرة المارة برؤوس المثلث = ٤٤ سم ($\pi = \frac{22}{7}$)

«٩ سم ، ١٣ سم ، ٣٠° ، ١١٠°»

٢٦ حل المثلث س ص ع الذى فيه : ق (∠ س) = ٨٢° ، ق (∠ ع) = ٥٦° ومساحته = ٩٠٠ سم^2

«٥٦ سم ، ٣٨ سم ، ٤٧ سم ، ٤٢°»

٢٧ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه :

ق (∠ أ) = ٣٥° ، ق (∠ ب) = ٧٥° ، أ + ٣ حـ = ٢٥ سم

«٤,٢ سم ، ٧,١ سم ، ٦,٩ سم ، ٧٠°»

٢٨ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ١٣ سم ، ق (∠ ب) = ٤٢° ، طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوى ٨ سم.

«١٠,٧ سم ، ١٥,٩ سم ، ١٠,٧ سم ، ٣,٤ سم ، ٤٠ َ ٥٤° ، ٢٠ َ ٨٣° أ ، ٤٠ َ ١٢٥° ، ٢٠ َ ١٢°»

٢٩ فى كل مما يأتى هل يمكن تكوين مثلث أ ب حـ أم لا ؟ وإذا كان ممكنًا حل هذا المثلث :

① أ = ٣,٢ سم ، ب = ٧,٦٣ سم ، حـ = ٦,٤ سم

② أ = ١٢ سم ، ب = ٢١ سم ، ق (∠ حـ) = ٩٥°

③ أ = ١ سم ، ب = ٥ سم ، حـ = ٤ سم

④ ق (∠ أ) = ٤٢° ، أ = ٧ سم ، ب = ١٠ سم

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٣٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : أ = ٣ سم ، ب = ٨ سم ، جا أ = $\frac{5}{13}$

فإن عدد المثلثات التى يمكن تكوينها من المعلومات السابقة هى ....

(أ) صفر (ب) ١

(جـ) ٢ (د) المعلومات غير كافية.

(٢) إذا كان أ ب ح مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، ق (∠ ب) = ٤٠°

وكان ٨ حا ٤٠° < ب ح < أ ح فإن ....

(أ) لا يمكن رسم المثلث.

(ب) يمكن رسم مثلث وحيد.

(ج) يمكن رسم مثلثين.

(د) يمكن رسم عدد لانهائى من المثلثات.

(٣) إذا كان أ ب ح مثلث فيه : أ ح = ٨ سم ، ق (∠ أ) = ٤٠° وكان ب ح < ٨ حا ٤٠°

فإن ....

(أ) لا يمكن رسم المثلث.

(ب) يمكن رسم مثلث وحيد.

(ج) يمكن رسم مثلثين.

(د) يمكن رسم عدد لانهائى من المثلثات.



تطبيقات حياتية على الوحدة الرابعة

من أسئلة الكتاب المدرسي

تطبيقات حياتية على الدرس الأول

١ الربط بالجغرافيا :

الشكل المقابل يمثل مواقع ثلاث مدن أ ، ب ، حـ

أوجد لأقرب كيلومتر :

(١) المسافة بين أ ، حـ (٢) المسافة بين ب ، حـ

«٦٩ كم ، ١٩٣ كم»

٢ فى الشكل المقابل :

العلامتان أ ، ب تقعان على الحافة نفسها لجدول مياه والمسافة بينهما ١٧ مترًا ، تقع العلامة حـ على الحافة المقابلة بحيث : ق (∠ب أ حـ) = ٧٢° ، ق (∠أ ب حـ) = ٥٣°

أوجد : (١) المسافة بين العلامتين أ ، حـ لأقرب متر.

(٢) المسافة بين حافتى الجدول بفرض أنهما متوازيتان لأقرب رقمين عشريين.

«١٧ م ، ١٥.٧٦ م»

تطبيقات حياتية على الدرس الثانى

١ **معارض الفنون :** علقت صورة فى معرض بواسطة خيط مربوط بحلقتين على الحافة الأفقية العليا من الصورة ويمر على مسمار فى حائط ، فإذا كان طول الخيط على كل جهة من المسمار ٣٠ سم ، وقياس الزاوية بين جزئى الخيط ٥٠° فأوجد المسافة بين الحلقتين على حافة الصورة لأقرب سنتيمتر.

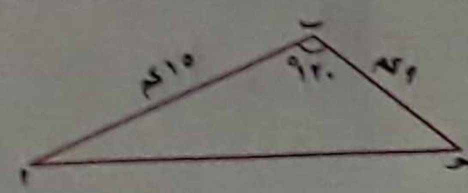
«٢٥ سم»

٢ **الربط بالزراعة :** يريد مزارع وضع سياج بقطعة أرض مثلثة الشكل طولا ضلعين فيها ٩٨ م ، ٦٤ م ، وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٥٢° فما طول هذا السياج ؟ «٢٣٩ م»

٣ تحركت سفينتان أ ، ب فى نفس اللحظة من أحد الموانئ ، فإذا تحركت أ فى اتجاه ٢٠° جنوب الشرق حيث قطعت مسافة ٢٤ كم وتحركت ب فى اتجاه ٥٥° شمال الشرق حيث قطعت مسافة ١٠ كم فى نفس الزمن أوجد المسافة بين السفينتين فى نهاية هذا الزمن.

«٢٣.٥ كم»

٤ 📖 **مسافات :** يركب كريم دراجته البخارية ليقطع المسافة من المدينة أ إلى المدينة حـ مرورًا بالمدينة ب بسرعة منتظمة مقدارها ٣٦ كم/س ، ثم يعود من المدينة حـ إلى المدينة أ مباشرة بسرعة منتظمة مقدارها ٤٢ كم/س أوجد :



① الإزاحة بالكيلومتر بين المدينة حـ ، المدينة أ

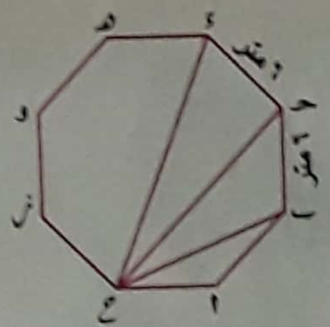
② الزمن الكلى بالدقيقة للرحلة كلها.

«٢١٠ كم ، ٧٠ دقيقة»

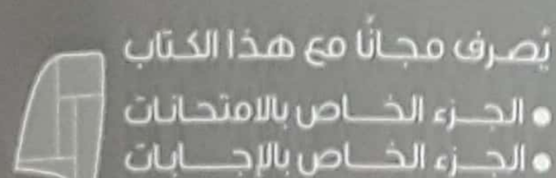
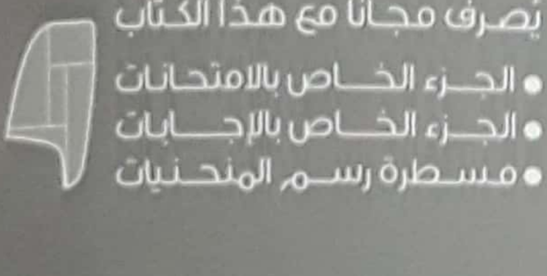
٥ 📖 **التصميم المعمارى :**

صمم مهندس معمارى مبنى على شكل مثمن منتظم ، طول كل ضلع من أضلاعه ٦ أمتار.

أوجد أطوال الأقطار $\overline{\text{ع ب}}$ ، $\overline{\text{ع حـ}}$ ، $\overline{\text{ع ء}}$

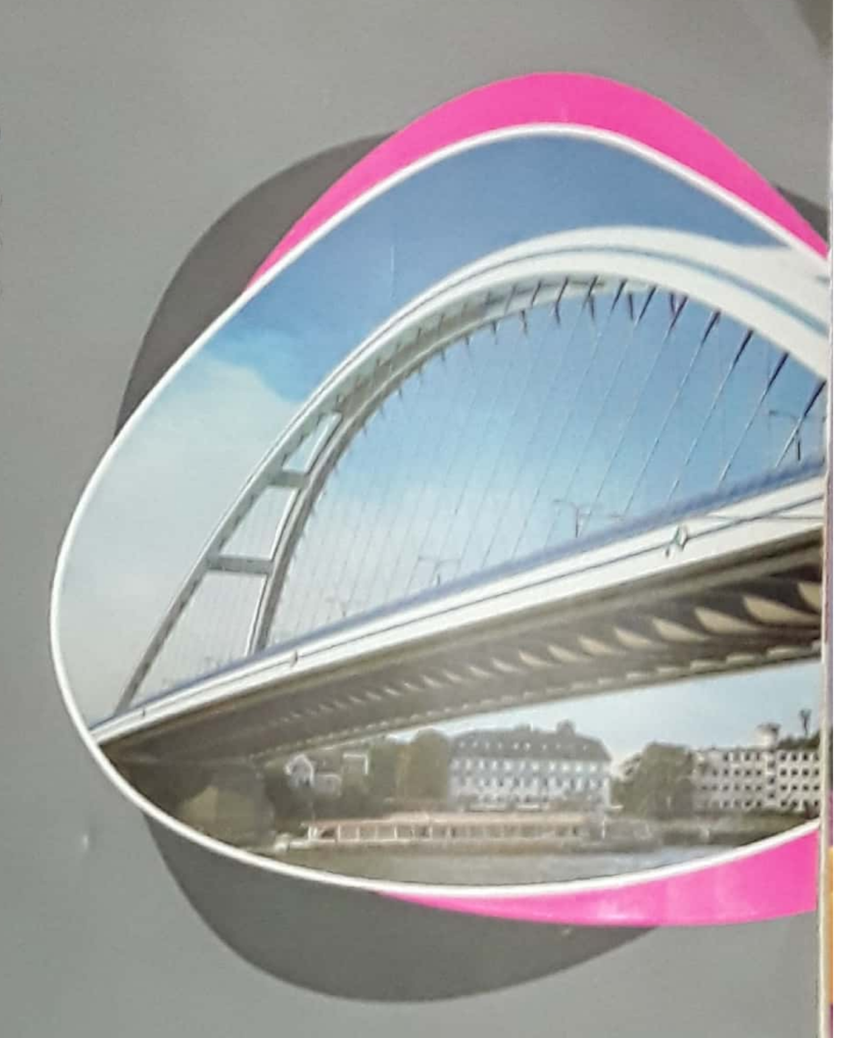


«١١.١ متر ، ١٤.٥ متر ، ١٥.٧ متر»

يُصرف مجانًا مع هذا الكتاب

- الجزء الخاص بالامتحانات
- الجزء الخاص بالإجابات
- مسطرة رسم المنحنيات







2
ثانوى
2020



في:

- تطبيقات الرياضيات (علمى)
- الرياضيات العامة (أدبى)
- اللغة الإنجليزية
- اللغة الفرنسية

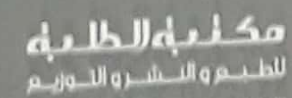
للصف الثانى الثانوى






/ElMoasser.eg





مكتبة الطلبة
للطبع والنشر والتوزيع
٣ شارع كامل صدقى - الفجالة
تليفون: ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٢٥٩٣٤٠١٢/٢.
e-mail: info@elmoasserbooks.com
www.elmoasserbooks.com